ESTABILIDAD ASINTÓTICA EN UNA ECUACIÓN PERIÓDICA CON UNA NOLINEALIDAD SINGULAR DE TIPO REPULSIVO

Pedro J. Torres *

Departamento de Matemática Aplicada,

Universidad de Granada, 18071 Granada, Spain

Introducción.

Nuestro propósito es estudiar una clase general de ecuaciones diferenciales de segundo orden que incluye la ecuación

$$x''(t) + cx'(t) - \frac{1}{x^{\alpha}} = p(t) \tag{1}$$

donde $c > 0, \alpha > 01$ y p es una función continua y T-periódica para algún $T > 0$. En concreto, estamos interesados en la existencia y estabilidad de soluciones T-periódicas positivas.

Considérese la ecuación más general

$$x''(t) + cx'(t) - g(x(t)) = p(t) \tag{2}$$

donde $c > 0$, p es una función T-periódica y continua y $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ es estrictamente decreciente, convexa y C^1, verificando que

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty, \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0.$$

Un caso particular relevante de este tipo de término no lineal es $g(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ con $\alpha > 0$. Se prueba en [1] que si

$$\int_0^1 g(s)ds = +\infty$$

(que corresponde al caso $\alpha \geq 1$), una condición necesaria y suficiente para la existencia de soluciones T-periódicas positivas de (2) es que el valor medio

*Financiado por D.G.C.Y.T. PB92-0953, M.E.C., Spain.

$\overline{p} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt < 0$, mientras que si esta integral es finita (caso $0 < \alpha < 1$), existen p tales que no hay soluciones T-periódicas.

Esta ecuación describe, por ejemplo, el movimiento de un pistón en un cilindro que contiene un gas perfecto sometido a una fuerza externa periódica $p(t)$ y a la fuerza expansiva $g(x)$ del gas, con un rozamiento constante $c > 0$:

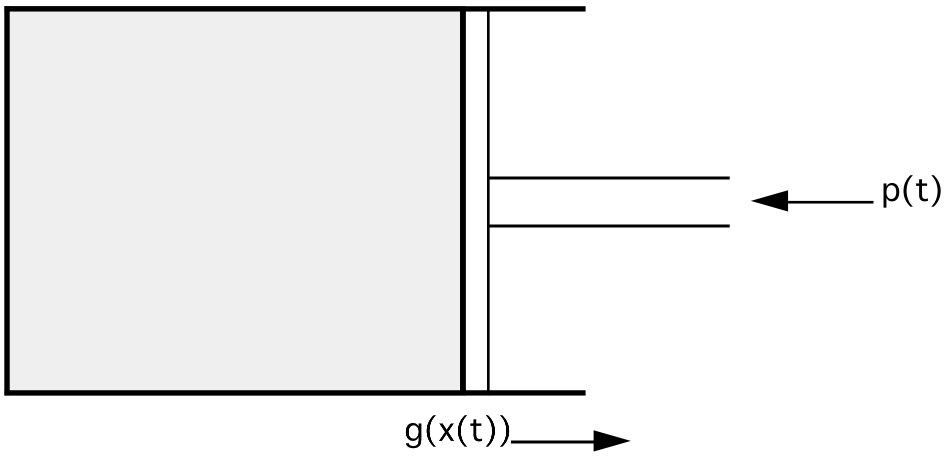

Figure 1: Movimiento de un pistón en un cilindro

Por otra parte, la estabilidad de estas soluciones ha sido menos estudiada. Es conocido que en el caso autónomo ($p(t) = p_0 < 0$) hay un único punto fijo que es globalmente asintóticamente estable (G.A.S.). En cambio, en el caso no autónomo esto no es cierto en general; como se verá, existen $p(t)$ tales que la ecuación tiene soluciones inestables. Nuestro fin es encontrar condiciones que aseguren G.A.S. Para ello variaremos distintos parámetros como el rozamiento, periodo o valor medio de p y usaremos los resultados obtenidos en [2].

1. Preliminares.

Las siguientes funciones, definidas en [2], serán importantes en nuestros resultados:

$$A[k] = \begin{cases} k^{-1/2}\exp\{-cw_k^{-1}\tanh^{-1}(w_k/c)\} & si\ 0 < k < c^2/4 \\ 2c^{-1}/e & si\ k = c^2/4 \\ k^{-1/2}\exp\{-cw_k^{-1}\arctan(w_k/c)\} & si\ k > c^2/4 \end{cases}$$

y

$$B[k] = \begin{cases} 0 & si\ 0 < k \leq c^2/4 \\ k^{1/2}\exp\{cw_k^{-1}[\arctan(w_k/c) - \pi]\} & si\ k > c^2/4 \end{cases}$$

donde $w_k = \sqrt{|4k - c^2|}$ y $\arctan : (-\infty, +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

En primer lugar, mostraremos la posibilidad de que la ecuación (2) sea inestable:

Proposición 1. *Para todo $T > 0$, existe $p(t)$ función continua y T-periódica tal que* (2) *tiene una solución T-periódica inestable.*

Demostración. Es consecuencia directa del Teorema II en [4].

Seguidamente obtendremos algunas estimaciones de utilidad. Consideremos $\overline{p} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt$, $\widetilde{p}(t) = p(t) - \overline{p}$.

Lema 2. *Dada $x(t)$ una solución T-periódica de* (2)*, se cumple que*

$$|x(t) - x(s)| \leq \frac{\sqrt{T}\|\widetilde{p}\|_2}{c}, \qquad \forall\, t, s \in [0, T].$$

Demostración. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$|x(t) - x(s)| = \left|\int_s^t x'(\tau)d\tau\right| \leq \left(\int_s^t (x'(\tau))^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{T} \leq \|x'\|_2\sqrt{T}$$

Pero multiplicando (2) por x' e integrando obtenemos

$$\|x'\|_2 \leq \frac{\|\widetilde{p}\|_2}{c}$$

de donde se obtiene la acotación buscada.

Lema 3. *Sea $\xi = g^{-1}(-\overline{p})$.Dada $x(t)$ una solución T-periódica de* (2)*, entonces*

$$\max_{t\in[0,T]} x(t) > \xi > \min_{t\in[0,T]} x(t).$$

Demostración. Si $x(t) > \xi\, \forall t$ (resp. $x(t) < \xi$), entonces $-g(x(t)) > \overline{p}\ \forall t$ (resp. $-g(x(t)) > \overline{p}$) e integrando (2) sobre un periodo tenemos una contradicción.

Proposición 4. *Sea $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\int_{\varepsilon}^{\xi} g(s)ds = \frac{\|\widetilde{p}\|_2(-\overline{p}\sqrt{T} + \|\widetilde{p}\|_2)}{c}.$$

Entonces, dada $x(t)$ solución T-periódica de (2), se tiene que

$$x(t) > \varepsilon \qquad \forall t.$$

Demostración. Supongamos que el mínimo de $x(t)$ se alcanza en t_0 y el máximo en t_1, con $t_1 < t_0$. Multiplicando (2) por x' e integrando en $]t_1, t_0[$ obtenemos

$$\int_{x(t_0)}^{x(t_1)} g(s)ds < \frac{-\overline{p}\sqrt{T}\|\widetilde{p}\|_2}{c} + \|\widetilde{p}\|_2\|x'\|_2 < \frac{-\overline{p}\sqrt{T}\|\widetilde{p}\|_2 + \|\widetilde{p}\|_2^2}{c} = \int_{\varepsilon}^{\xi} g(s)ds$$

y al ser $x(t_1) > \xi$, entonces $x(t_0) > \varepsilon$.

Proposición 5. *Sea $M = \xi + \frac{\|\widetilde{p}\|_2\sqrt{T}}{c}$. Entonces, dada una solución T-periódica de (2), se tiene que*

$$x(t) < M \qquad \forall t$$

Demostración. Directa de los Lemas 1 y 2.

Proposición 6. *Sea $\varepsilon_2 > 0$ tal que*

$$\int_{\varepsilon_2}^{\xi} g(s)ds = \frac{T\|\widetilde{p}\|_\infty(-\overline{p} + \|\widetilde{p}\|_\infty)}{c}.$$

Entonces, dada $x(t)$ solución T-periódica de (2), se tiene que

$$x(t) > \varepsilon_2 \qquad \forall t.$$

Demostración. Basta con observar que $\|\widetilde{p}\|_2 \leq \sqrt{T}\|\widetilde{p}\|_\infty$, de donde se deduce que

$$\int_{\varepsilon_2}^{\xi} g(s)ds > \int_{\varepsilon}^{\xi} g(s)ds,$$

con lo que $\varepsilon_2 < \varepsilon$.

2. Resultados principales.

Teorema 7. *Dado $\overline{p} < 0$, existe $K(\overline{p}) > 0$ tal que dada $\widetilde{p}$ función T-periódica con valor medio cero y $\|\widetilde{p}\|_2 < K(\overline{p})$, la ecuación (2) tiene una única solución T-periódica positiva, que es g.a.s. Además,*

$$\lim_{\overline{p}\to 0} K(\overline{p}) = +\infty, \qquad \lim_{\overline{p}\to -\infty} K(\overline{p}) = 0.$$

Demostración. Sabemos que existe una solución T-periódica y que $\varepsilon < x(t) < M$, $\forall t$.

Linealizando en (2) obtenemos

$$y''(t) + cy'(t) - g_x(x(t))y(t) = 0$$

Si definimos $a = -g_x(M), b = -g_x(\varepsilon)$, en virtud de la convexidad de g, se tiene que

$$a < -g_x(x(t)) < b, \qquad \forall t.$$

Ahora bien, observamos que

$$\lim_{\|\widetilde{p}\|_2\to 0} \varepsilon(\|\widetilde{p}\|_2) = \xi = \lim_{\|\widetilde{p}\|_2\to 0} M(\|\widetilde{p}\|_2),$$

luego existe un $K(\overline{p})$, *que puede ser computado*, tal que si $\widetilde{p}$ está en las condiciones impuestas, entonces

$$A[a(\|\widetilde{p}\|_2)]B[b(\|\widetilde{p}\|_2)] < 1$$

con lo cual, usando los resultados de [2], la solución $x(t)$ es g.a.s.

Además, $\lim_{\overline{p}\to 0} \xi(\overline{p}) = +\infty$, con lo cual $\lim_{\overline{p}\to 0} \varepsilon(\overline{p}) = +\infty$ y en consecuencia $\lim_{\overline{p}\to 0} K(\overline{p}) = +\infty$. Del mismo modo se prueba que $\lim_{\overline{p}\to -\infty} K(\overline{p}) = 0$.

Así pues, si llamamos $\lambda = \overline{p}$ y $\mu = \|\widetilde{p}\|_2$, tenemos una región de estabilidad asintótica global como la mostrada en la Figura 2.

A continuación, enunciamos dos Teoremas en la misma línea que el anterior, cuyas demostraciones respectivas siguen ideas análogas, usando en el Teorema 8 la Proposición 3.

Teorema 8. *Dada $p(t)$ función T-periódica y continua con $\overline{p} < 0$, existe $c^* > 0$ tal que si $c > c^*$, entonces la ecuación (2) tiene una única solución T-periódica positiva, que es g.a.s.*

Teorema 9. *Dado $p(t)$ función T-periódica y continua con $\overline{p} < 0$, existe $T^* > 0$ (que sólo depende de $\overline{p}$ y $\|\widetilde{p}\|_\infty$) tal que si $T < T^*$, entonces la ecuación* (2) *tiene una única solución T-periódica positiva, que es g.a.s.*

Nota: Hay que destacar que, al igual que $K(\overline{p})$, tanto c^* como T^* son computables.

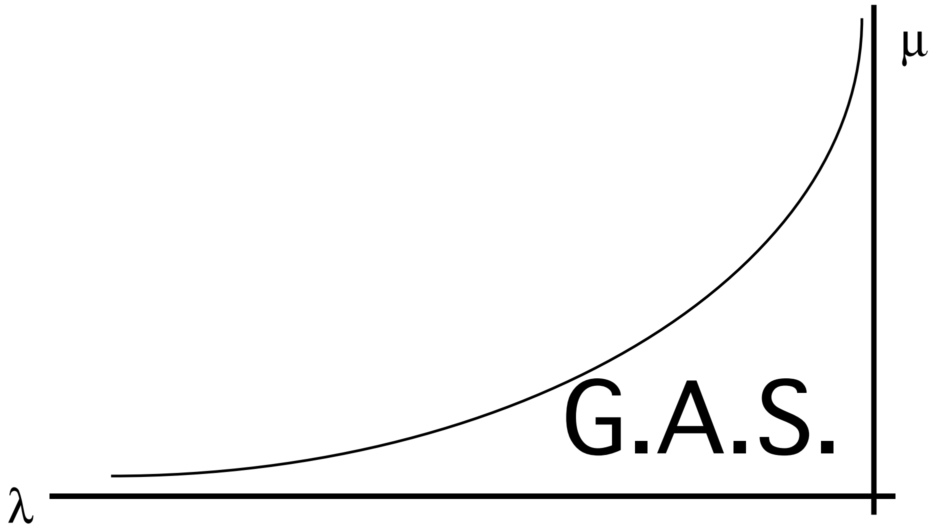

Figure 2: Región de g.a.s.

Referencias

[1] P. Habets; L. Sánchez [1990], Periodic solutions of some Liénard equations with singularities, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **109**, 1035-1044.

[2] J.M. Alonso; R. Ortega [1995], Boundedness and global asymptotic stability of a forced oscillator, *Nonlinear Analysis*, **25**, 297-309.

[3] J.M. Alonso [1995], Optimals intervals of stability of a forced oscillator, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **123**, 2031-2040.

[4] R. Ortega [1992], The first interval of stability of a periodic equation of Duffing type , *Proc. Amer. Math. Soc.*,**115**, 1061-1067.

[5] J.J. Nieto; L. Sánchez [1988], Periodic boundary value problem for some Duffing equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **vol. 1**, 399-408.