Análisis de la resolución de un modelo termoelastoplástico.

M. Serrano, J.A. Huidobro, A. Robles

Dpto de Matemáticas, Universidad de Oviedo, ETSII Carretera de Castiello s/n 33204, Gijón.

1 INTRODUCCION

Se considera un medio continuo que ocupa una región Ω de $\mathbf{R^3}$ conexa, de interior no vacío y frontera Γ suficientemente regular. Durante un intervalo de tiempo $[0, s]$, el cuerpo está sometido a la acción de un sistema de fuerzas externas y a un sistema calorífico externo que modifican su estado termodinámico. En el contexto de la teoría infinitesimal, las leyes generales de la Mecánica y la Termodinámica establecen que las variables que determinan el estado del cuerpo deben satisfacer en cada $(x, t) \in \Omega \times [0, s]$ el conjunto de ecuaciones e inecuaciones siguiente:

1. $div\sigma + f = \rho\ddot{u}$ *(conservación del momento lineal)*
2. $\sigma^t = \sigma$ *(conservación del momento angular)*
3. $\rho\dot{e} - \rho r - \sigma : \dot{\epsilon} + divq = 0$ *(conservación de la energía)*
4. $D = \sigma : \dot{\epsilon} - \rho\dot{e} + \rho T\dot{\eta} - q\frac{\nabla T}{T} \geq 0$ *(inecuación de Clausius-Duhem)*

donde $u = (u_1, u_2, u_3)$ denota el desplazamiento, T la temperatura absoluta, σ el tensor de tensiones de Cauchy, ρ la densidad de masa, q el vector flujo de calor, e la densidad de energía interna por unidad de masa, η la densidad de entropía por unidad de masa, f las fuerzas de volumen, r el calor de radiación, D la potencia disipada y ϵ el tensor de pequeñas deformaciones, definido como:

$$\epsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t)$$

Denotando la disipación interna como

$$D_{int} = \sigma : \dot{\epsilon} - \rho\dot{e} + \rho T\dot{\eta}$$

y la disipación por conducción por

$$D_{con} = -q\frac{\nabla T}{T}$$

la inecuación de Clausius-Duhem queda expresada en la forma habitual:

$$D = D_{int} + D_{con} \geq 0$$

Las ecuaciones e inecuaciones anteriores constituyen los axiomas comunes a los medios continuos en procesos con transmisión de calor. Estas ecuaciones tienen validez general y por lo tanto son independientes del material que constituya el cuerpo que se deforma . Sin embargo este sistema de ecuaciones e inecuaciones queda indeterminado, tanto matemática como físicamente, por lo que debe completarse con las leyes constitutivas o de comportamiento. El origen experimental de estas leyes hacen que cada tipo de material tenga una ley propia, caracterizando la respuesta que cada uno ofrece ante la misma solicitación. En este sentido, la inecuación de Clausius-Duhem es a menudo interpretada como una limitación a la clase de leyes de comportamiento admisibles.

2 RELACIONES CONSTITUTIVAS EN TERMOELASTOPLASTICIDAD

Las leyes constitutivas se introducirán en el contexto de la teoría de las variables internas, consistente en postular la existencia de cierto número de variables locales internas que determinan en cada punto y en cada instante el estado del material. Además de u y de T el modelo termoelastoplástico que se introduce postula la existencia de las siguientes variables internas:

- ϵ^p llamada deformación plástica, que es la parte de la deformación total que disipa energía; llamaremos deformación elástica a la parte de la deformación que almacena energía y la denotaremos por $\epsilon^e = \epsilon - \epsilon^p$.
- ξ que es un parámetro escalar que determina el endurecimiento isotrópico.
- η^p llamada entropía plástica o entropía configuracional que es debida a movimientos de dislocaciones y es la parte de la entropía que disipa energía; se denota por $\eta^e = \eta - \eta^p$ la parte de la entropía que almacena energía.

Las dos primeras variables, ϵ^p y ξ son habituales en modelos de elastoplasticidad isotérmica, mientras que η^p es introducida por SIMO-MIEHE [4] para la construcción de un modelo termoelastoplástico.

El modelo matemático se obtendrá mediante cuatro hipótesis constitutivas. Las dos primeras establecen las leyes termoelásticas. En la hipótesis 3 se introducen las leyes de flujo que determinan la evolución de las variables plásticas y la hipótesis 4 precisa el modelo de conducción:

- HIPOTESIS 1:

  Existe una función regular e tal que la energía interna se puede expresar como $e = e(x, \epsilon^e, \xi, \eta^e)$.

  Utilizando esta hipótesis y la descomposición aditiva de la deformación y de la entropía, la disipación interna se expresa como:

  $$D_{int} = P_m + P_t = \rho\left(T - \frac{\partial e}{\partial \eta^e}\right)\dot{\eta}^e + \left(\sigma - \rho\frac{\partial e}{\partial \epsilon^e}\right) : \dot{\epsilon}^e - \rho\frac{\partial e}{\partial \xi} : \dot{\xi} + \sigma : \dot{\epsilon}^p + \rho T\dot{\eta}^p$$

  donde P_m es la parte mecánica de la disipación,

  $$P_m = \rho\left(T - \frac{\partial e}{\partial \eta^e}\right)\dot{\eta}^e + \left(\sigma - \rho\frac{\partial e}{\partial \epsilon^e}\right) : \dot{\epsilon}^e - \rho\frac{\partial e}{\partial \xi}\dot{\xi} + \sigma : \dot{\epsilon}^p$$

y P_t es la parte de la disipación interna inducida por el campo de temperaturas,

$$P_t = \rho T \dot{\eta}^p$$

- HIPOTESIS 2:

  Admitiremos, de acuerdo con el significado de las variables internas ϵ^p y η^p, que la disipación mecánica es independiente de las velocidades de las variables elásticas $\dot{\epsilon}^e$ y de $\dot{\eta}^e$, por lo que se anularán los coeficientes de dichos términos en la expresión de la disipación mecánica, obteniéndose

  $$T = \frac{\partial e}{\partial \eta^e} \qquad \sigma = \rho \frac{\partial e}{\partial \epsilon^e}$$

  Estas relaciones son análogas a las obtenidas en la teoría de termoelasticidad reemplazando ϵ^e por ϵ y η^e por η.

  Denotando por

  $$\beta = -\rho \frac{\partial e}{\partial \xi}$$

  la fuerza termodinámica asociada al parámetro de endurecimiento ξ, la disipación mecánica y la disipación interna quedan expresadas como:

  $$P_m = \sigma : \dot{\epsilon}^p + \beta \dot{\xi} \qquad D_{int} = P_m + P_t = \sigma : \dot{\epsilon}^p + \beta \dot{\xi} + \rho T \dot{\eta}^p$$

- HIPOTESIS 3:

  Existe una función convexa y diferenciable $\breve{F}(\sigma, \beta, T)$ que verifica

  $$(\dot{\epsilon}^p, \dot{\xi}, \rho \dot{\eta}^p) = \gamma\left(\frac{\partial \breve{F}}{\partial \sigma}, \frac{\partial \breve{F}}{\partial \beta}, \frac{\partial \breve{F}}{\partial T}\right)$$

  $$\gamma \geq 0, \quad \breve{F} \leq 0, \quad \breve{F}\gamma = 0$$

  Denotando por M_s las matrices reales y simétricas de orden tres y por $K = \{(\sigma, \beta, T) \in M_s \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \quad / \quad \breve{F}(\sigma, \beta, T) \leq 0\}$, estas relaciones pueden ser expresadas como

  $$(\dot{\epsilon}^p, \dot{\xi}, \rho \dot{\eta}^p) \in \partial I_K(\sigma, \beta, T)$$

  Esta hipótesis ha sido introducida por SIMO-MIEHE [] extendiendo al modelo termoelastoplástico el principio de máxima disipación.

- HIPOTESIS 4:

  Se admite que el vector flujo de calor y la temperatura están relacionados mediante la ley de Fourier:

  $$q = -k \nabla T \quad \text{con} \quad k(\epsilon, T) \geq 0$$

Las leyes de conservación junto con las hipótesis constitutivas permiten construir el modelo matemático completo. Para facilitar su expresión se introduce el potencial de energía libre vía transformada de Legendre de la función energía interna:

$$\omega(\epsilon^e, \xi, T) = e(\epsilon^e, \xi, \eta^e) - \eta^e T$$

En términos de la energía libre, el modelo termoelastoplástico introducido puede ser expresado por medio del sistema:

$$div\sigma + f = \rho\ddot{u} \tag{1}$$
$$\sigma^t = \sigma \tag{2}$$
$$\rho c\dot{T} + div(-k\nabla T) = P_m - H \tag{3}$$
$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \tag{4}$$
$$\eta = \eta^e + \eta^p \tag{5}$$
$$\sigma = \rho\frac{\partial w}{\partial\epsilon^e} \tag{6}$$
$$\beta = -\rho\frac{\partial w}{\partial\xi} \tag{7}$$
$$\eta^e = -\frac{\partial\omega}{\partial T} \tag{8}$$
$$(\dot{\epsilon}^p, \dot{\xi}, \rho\dot{\eta}^p) \in \partial I_K(\sigma, \beta, T) \tag{9}$$

donde c es el calor específico a deformación constante, H el calentamiento elástico estructural (efecto de Gough-Joule) y P_m la disipación mecánica, definidos como:

$$c = -T\frac{\partial^2\omega}{\partial T^2} \tag{10}$$
$$H = -\rho T\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\epsilon^e\partial T}\dot{\epsilon}^e + \frac{\partial^2\omega}{\partial T\partial\xi}\dot{\xi}\right) \tag{11}$$
$$P_m = \sigma : \dot{\epsilon}^p + \beta\dot{\xi} \tag{12}$$

Es conveniente observar que el sistema anterior no recoge explícitamente la inecuación de Clausius-Duhem, ya que la Hipótesis 3 garantiza $D_{int} \geq 0$ y la hipótesis 4 $D_{con} \geq 0$.

3 RESOLUCION NUMERICA

A fin de facilitar el análisis de métodos que permitan resolver numéricamente el sistema (1)-(12) se consideran algunas hipótesis simplificativas del modelo:

- Pequeñas aceleraciones.
- Pequeñas variaciones de temperatura respecto a una temperatura de referencia T_0.
- Calor especifico constante.
- Módulo de difusión constante.
- Cuerpo homogéneo e isotrópico.

- Criterio de fluencia de Von Mises: $\breve{F}(\sigma,\beta,T) = |\sigma^D| - \sigma_Y(\beta,T)$

Bajo estas hipótesis es razonable (ver FEIJO-MOURA [2]) reemplazar el sistema (1)-(12) por:

$$
\begin{aligned}
div\sigma + f &= 0 && (13)\\
\rho c\dot{T} - div(k\nabla T) &= P_m - H && (14)\\
\epsilon &= \epsilon^e + \epsilon^p && (15)\\
\eta &= \eta^e + \eta^p && (16)\\
\sigma &= E:\epsilon^e - m(T-T_0)I && (17)\\
\beta &= -h\xi && (18)\\
\eta^e &= \frac{1}{\rho}mI:\epsilon + \frac{c}{T_0}(T-T_0) && (19)\\
H &= mT_0I:\dot{\epsilon}^e && (20)\\
P_m &= \sigma:\dot{\epsilon}^p + \beta\dot{\xi} && (21)\\
(\dot{\epsilon}^p,\dot{\xi},\rho\dot{\eta}^p) &\in \partial I_K(\sigma,\beta,T) && (22)\\
&\text{Condiciones de contorno} && (23)\\
&\text{Condiciones iniciales} && (24)
\end{aligned}
$$

siendo E el tensor de elasticidad, $m\,I$ el tensor deformación-temperatura y h el coeficiente de endurecimiento isotrópico.

La idea básica para la construcción de un método numérico para el problema (13)-(24) es utilizar el principio de normalidad global expresado por la relación (22). Este principio de normalidad global, permite adaptar las técnicas utilizadas en la resolución de problemas elastoplásticos isotérmicos, que consisten en resolver alternativamente un problema elástico y un *problema plástico*. La extensión de este procedimiento al presente modelo conduce a un problema similar al de termoelasticidad lineal acoplada y a un *problema plástico*:

- Suponiendo conocido $(\dot{\epsilon}^p,\dot{\xi},\rho\dot{\eta}^p)$, se calculan u, T, σ, β y η^e resolviendo el problema de termoelasticidad lineal acoplada:

$$
\begin{aligned}
div\sigma + f &= 0 && (25)\\
\rho c\dot{T} - div(k\nabla T) &= \sigma:\dot{\epsilon}^p + \beta\dot{\xi} - mT_0I:\dot{\epsilon} && (26)\\
\sigma &= E:\epsilon - m(T-T_0)I - E:\epsilon^p && (27)\\
\beta &= -h\xi && (28)\\
\eta^e &= \frac{1}{\rho}mI:\epsilon + \frac{c}{T_0}(T-T_0) && (29)
\end{aligned}
$$

- Se actualiza $(\dot{\epsilon}^p,\dot{\xi},\rho\dot{\eta}^p)$ resolviendo el *problema plástico* obtenido al reemplazar la subdiferencial del convexo de elasticidad por su aproximante Yosida (BERMUDEZ-MORENO[1]):

$$(\dot{\epsilon}^p, \dot{\xi}, \rho\dot{\eta}^p) = \frac{1}{\lambda}(I - \Pi_K)\Big((\sigma, \beta, T) + \lambda(\dot{\epsilon}^p, \dot{\xi}, \rho\dot{\eta}^p)\Big) \tag{30}$$

siendo λ un número real positivo y Π_K la proyección ortogonal sobre el convexo K.

El problema termoelástico es resuelto desacoplando el sistema mediante un algoritmo de tipo adiabático, en el que es necesario resolver una fase termomecánica (a entropía constante) y otra fase puramente térmica.

Despejando la temperatura en (19) y sustituyendola en (17) se obtiene:

$$\sigma = (E + \frac{T_0 m^2}{c\rho} I \otimes I) : \epsilon(u) - \frac{mT_0}{c}\eta^e - E : \epsilon^p$$

Mediante esta ecuación el desacoplamiento en una fase termomecánica y otra térmica se obtiene del modo siguiente:

- Suponiendo conocida la entropía elástica η^e, se calculan el desplazamiento u y la tensión σ resolviendo el problema:

$$div\sigma + f = 0 \tag{31}$$

$$\sigma = (E + \frac{T_0 m^2}{c\rho} I \otimes I) : \epsilon(u) - \frac{mT_0}{c}\eta^e - E : \epsilon^p \tag{32}$$

- Suponiendo conocidos el desplazamiento u y la tensión σ, se calcula la temperatura resolviendo el problema térmico:

$$\rho c\dot{T} - div(k\nabla T) = \sigma : \dot{\epsilon}^p + \beta\dot{\xi} - mT_0 I : \dot{\epsilon}(u) \tag{33}$$

- La entropia elástica es actualizada evaluando en la ecuación:

$$\eta^e = \frac{1}{\rho} mI : \epsilon + \frac{c}{T_0}(T - T_0)$$

Hay que observar que el problema (31)-(32) es análogo a un problema de elasticidad lineal en el que es necesario actualizar, en cada fase del método iterativo, la entropía elástica y la deformación plástica que intervienen en el segundo miembro. No obstante, la matriz de rigidez del sistema permanece constante en todo el proceso. Por otra parte, el problema térmico (33) representa la ecuación clásica del calor, en el que únicamente los términos que representan las fuentes de calor (independientes de la temperatura) deben ser actualizados en cada fase del método iterativo.

4 EJEMPLO NUMERICO

El algoritmo iterativo propuesto en la sección anterior ha sido aplicado a un ejemplo-modelo analizado por otros autores (ver SIMO-MIEHE [4], LUBLINER [3]). Se considera de un tubo cilíndrico de radio interno 100 mm y radio externo de 200 mm. La pared interna del cilindro es sometida a presión normal y a una temperatura conocida y en la pared externa se supone que los desplazamientos son nulos y que está aislada térmicamente. Suponiendo que la longitud del tubo es suficientemente grande en comparación con el radio externo, es razonable suponer (ver LUBLINER [3]) que las tensiones y deformaciones de secciones transversales alejadas de los extremos del tubo dependen únicamente del radio.

Se ha considerado que la función que determina la evolución del nivel de fluencia es lineal en el parámetro de endurecimiento y en la temperatura:

$$\sigma_Y(\xi, T) = y_0 + h\xi - w_0 y_0 (T - T_0)$$

siendo y_0, h y w_0 constantes positivas que dependen del material. El hecho de que el coeficiente de la temperatura sea negativo hace que el nivel de fluencia decrezca al aumentar la temperatura.

La resolucin numrica se ha realizado introduciendo un esquema implcito de Euler para la variable temporal y un mtodo de elementos finitos mixtos para la variable espacial. Se han considerado elementos finitos P1 para el desplazamiento y la temperatura y elementos P0 para el resto de las variables.

Los datos físicos utilizados son:

Módulo de Bulk	κ	58333	N/mm^2
Módulo de cizalladura	μ	26926	N/mm^2
Tensión de fluencia	y_0	70	N/mm^2
Módulo de endurecimiento	h	210	N/mm^2
Densidad	ρ	2.7×10^{-9}	Ns^2/mm^4
Coeficiente de expansión	α	23.8×10^{-5}	K^{-1}
Conductividad	k	150	N/sK
Módulo térmico	w_0	3×10^{-4}	K^{-1}

En la tabla 1 se muestran los resultados de convergencia obtenidos al cabo de un paso de tiempo de 1.5 s, para una presión interna de 180 N/mm^2 y una temperatura en la cara interior de 350 K, siendo la temperatura de referencia $T_0 = 310$.

$\lambda/10^4$	4	4.5	5	5.5	6	7	9
Número de iteraciones	78	19	11	9	10	13	17

Tabla 1: Convergencia en función del parámetro λ

5 REFERENCIAS

1. Bermudez A.-Moreno C.: Duality methods for solving variational inequalities. Comp.

Maths. Appls. 7 (1981) 43-58

2. Feijoo R.A.-Moura C.A.: Un método variacional en problemas de termoelasticidad dinámica acoplada. Revista Brasileira de Ciências Mecânicas vol III, n 2, (1981).

3. Lubliner J.: Plasticity theory. Maxwell MacMillan, (1990).

4. Simo, J.C.-Miehe C.: Associative coupled thermoplasticity at finite strain: Formulation, numerical analysis and implementation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 98 (1992) 41-104