DECONVOLUCIÓN DISPERSA UTILIZANDO LA SOLUCIÓN DE WIENER

Carmen Sánchez Ávila y Pablo Cobos Arribas

Departamento de Matemática Aplicada

ETSI de Telecomunicación. 28040 Madrid

e-mail: csa@mat.upm.es

Resumen

En este trabajo se aborda el problema de la deconvolución de secuencias picudas o dispersas cuando existe algún tipo de error o ruido en la secuencia de datos del sistema. Es bien conocido que el problema inverso de la deconvolución de señales es generalmente, en espacios de Hilbert, un problema *ill-posed* en el sentido de Hadamard [1] [3]. Su resolución precisa, por tanto, alguna técnica de regularización. En [4] proponíamos, para este mismo problema, métodos de regularización basados en la técnica de Tikhonov-Miller [3], utilizando conocimientos *a priori* deterministas. En este trabajo introducimos un nuevo método POCS adaptativo de regularización utilizando la solución de Wiener parcial, basándonos, por tanto, en información estadística conocida *a priori*. El comportamiento de este método es evaluado mediante simulaciones sobre una secuencia dispersa, y se comparan los resultados con los que se obtienen utilizando el método POCS adaptativo, el único -hasta ahora- alternativo al que presentamos, formulado por Sezan *et al.* [6], observándose una evidente mejora en la calidad de las estimaciones obtenidas con la técnica que aquí proponemos.

1 Introducción

En numerosos problemas prácticos (deconvolución sísmica, codificación de voz, evaluación no destructiva) es necesario obtener una solución dispersa a partir de observaciones degradadas. Este problema puede modelarse, para el caso de secuencias, mediante la ecuación de Fredholm de primera especie discreta

$$Df + n = g \tag{1}$$

donde $f \in \mathbb{R}^N$ es la secuencia o vector original a obtener, $g \in \mathbb{R}^M$ es el vector de datos o secuencia degradada, n es una realización de un proceso estocástico que

supondremos gaussiano, y $D \in \mathbb{R}^{M \times N}$ es la matriz (rectangular) del sistema (conocida también como *operador de degradación* del sistema).
Conocido g, resolver la ecuación (1) en f (es decir la deconvolución de la secuencia) es un problema *ill-posed*. Si seguimos la definición de Hadamard, un problema es *well-posed* (o está bien propuesto) si existe una única solución y la solución depende continuamente de los datos; en otro caso se dice que el problema es *ill-posed* (o bien que está mal propuesto). Generalmente, en el problema de la deconvolución de secuencias, al igual que en restauración de imágenes, la solución no depende continuamente de los datos g puesto que D es una matriz *mal condicionada* (en el caso, comúnmente utilizado, del modelo de degradación convolucional). Esta dependencia discontinua de la solución con respecto a los datos produce una amplificación importante del ruido que perturba al sistema, lo cual hace que no se distinga la secuencia original después de efectuar el proceso de deconvolución. Este efecto (amplificador) es significativo en los entornos de las singularidades del operador inverso. En este trabajo hemos considerado el caso de un operador convolucional en términos de una respuesta al impulso finita, y las singularidades están referidas a los ceros de la función de transferencia.
Es conocido que los problemas de deconvolución *ill-posed* pueden *regularizarse* incorporando información *a priori*, e imponiendo, a partir de esta información, lo que se conoce como *restricciones* de regularización, a la solución [1] [3]. Existen dos clases de métodos de regularización, los conocidos como métodos deterministas (los cuales consideran la secuencia como una cantidad determinista y las restricciones que se imponen son también deterministas, tales como soporte finito, no negatividad, suavidad, etc [7]), entre los que se encuentra el método de Tikhonov-Miller en el que basamos nuestro estudio anterior [4] [5]; y los que se conocen como *métodos estocásticos de regularización*, basados en información estadística adicional, entre los que se encuentra el método de Sezan *et al.* [6].
En este trabajo, proponemos un método POCS alternativo al propuesto por Sezan *et al.* mediante la incorporación al conjunto de la solución de Wiener parcial, un operador adaptativo que permite obtener mejores estimaciones sin necesidad de incorporar ningún conocimiento estadístico adicional de la secuencia original.

2 El método POCS

El método POCS (Operadores de Proyección en Conjuntos Convexos) [7] es un método iterativo para obtener un elemento común a una serie de conjuntos convexos dados. Éstos actúan como restricciones sobre las estimaciones, y se formulan teniendo en cuenta los conocimientos *a priori* de que se disponga. Así si C_i, $i = 1, ..., m$ son los conjuntos convexos formulados y P_i, $i = 1, ..., m$ son los operadores de proyección en estos conjuntos, la secuencia generada por el algoritmo POCS

$$f_{k+1} = P_m \, P_{m-1} \, \cdots \, P_1 \, f_k, \quad k = 0, 1, ... \qquad f_0 \text{ arbitrario} \tag{2}$$

o más generalmente por el algoritmo POCS

$$f_{k+1} = T_m \, T_{m-1} \, \cdots \, T_1 \; f_k, \quad k = 0, 1, ... \qquad f_0 \text{ arbitrario} \tag{3}$$

donde

$$T_i = I - \lambda_i (I - P_i), \quad 0 < \lambda_i < 2 \tag{4}$$

es el operador de relajación (y λ_i el parámetro de relajación), converge a un elemento del conjunto intersección $C_o = \cap_{i=1}^{m} C_i$ (suponiendo que las restricciones son consistentes, es decir $C_o \neq \emptyset$). El siguiente Teorema, considerando un espacio de Hilbert H genérico, muestra el comportamiento del método.

TEOREMA 1. [7] *Sea $C_o \neq \emptyset$, entonces para cualquier $f_0 \in H$, y para cualquier elección de los parámetros λ_i, $i = 1, ..., m$ tales que $0 < \lambda_i < 2$, $\forall i$, la secuencia $\{f_k\}_k$ resultante al aplicar el algoritmo POCS (3), converge en límite a un elemento de C_o.*

En concreto, puede asegurarse que, cuando se trabaja en espacios normados finito-dimensionales (como es nuestro caso), esta convergencia es en norma [4].

Hemos de hacer constar, por último, que los algoritmos POCS son, en general, no lineales, puesto que los proyectores son, en general, operadores no lineales.

3 El método de regularización propuesto

Encontramos en la literatura diferentes algoritmos POCS que utilizan diversos tipos de información *a priori* para el problema de la deconvolución regularizada de secuencias [2] [4] [6]. La información estadística y cualitativa *a priori*, acerca de la secuencia original y del ruido, que utilizamos en este trabajo nos permitirá definir dos conjuntos convexos y por tanto dos operadores de proyección, que pasamos a estudiar a continuación.

3.1 El conjunto de Wiener parcial

El conjunto de Wiener parcial es una forma especial del conjunto Transformada Parcial de Fourier, C_M, comúnmente utilizado en el problema de reconstrucción de imágenes tomográficas [7]

$$C_M \doteq \{y \in \mathbb{R}^N \; / \; F[y](\omega) = M(\omega), \quad \omega \in \mathcal{S}\} \tag{5}$$

donde $F[\cdot]$ denota la Transformada Discreta de Fourier (DFT) y $\mathcal{S}$ es un subconjunto de frecuencias predeterminado. La secuencia $M(\omega)$ se supone conocida *a priori*. Es decir, C_M es el conjunto de secuencias en $\mathbb{R}^N$ cuyas DFT's alcanzan valores conocidos *a priori* en un conjunto predeterminado de frecuencias. De esta forma, para un elemento arbitrario $x \in \mathbb{R}^N$, el operador de proyección sobre C_M, P_M, tiene la siguiente expresión [7]

$$F[P_M \, x] = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in \mathcal{S} \\ F[x](\omega), & \omega \notin \mathcal{S} \end{cases} \tag{6}$$

En el contexto de la deconvolución de secuencias, se define el conjunto de Wiener parcial de la forma dada en la expresión (5), tomando como secuencia $M(\omega)$ la *solución de Wiener*, $\mathcal{W}(\omega)$, en el dominio de la frecuencia. Esto es

$$C_W \doteq \{y \in \mathbb{R}^N \;/\; F[y](\omega) = \mathcal{W}(\omega), \quad \omega \in \mathcal{S}\} \tag{7}$$

siendo

$$\mathcal{W}(\omega) \doteq \frac{\mathcal{H}^*(\omega)}{|\mathcal{H}(\omega)|^2 + \frac{\mathcal{S}_{nn}(\omega)}{\mathcal{S}_{ff}(\omega)}}\, \mathcal{G}(\omega) \tag{8}$$

donde $\mathcal{H}$ y $\mathcal{G}$ denotan las Transformadas Discretas de Fourier de la función de transferencia del sistema y de la secuencia de datos g, respectivamente. $\mathcal{S}_{ff}$ y $\mathcal{S}_{nn}$ son las densidades de potencia espectral de la secuencia original f y del ruido n, respectivamente. La expresión del operador de proyección en el conjunto C_W, P_W, será la misma que (6) (sustituyendo $M(\omega)$ por $\mathcal{W}(\omega)$). Vemos en (6) que, si P_W es uno de los operadores de proyección de un algoritmo POCS (2), en cada iteración se fuerza a que la estimación que se obtiene sea igual a la solución de Wiener en el conjunto de frecuencias $\mathcal{S}$.
La forma del conjunto de frecuencias $\mathcal{S}$ depende de las causas que provocan la introducción de "artefactos" o "ruido de reconstrucción" en la deconvolución. Para evaluar este hecho consideramos un filtro de deconvolución LSI (Linear Space Invariant), y analizamos las causas del "error de reconstrucción". En este caso, conocidas la secuencia de datos g y la respuesta al impulso h del sistema, la DFT de la secuencia estimada, $\hat{\mathcal{F}}(\omega)$, puede expresarse de la forma

$$\hat{\mathcal{F}}(\omega) = \Psi(\omega)\mathcal{G}(\omega) = \Psi(\omega)\mathcal{H}(\omega)\mathcal{F}(\omega) + \Psi(\omega)\mathcal{N}(\omega) \tag{9}$$

donde $\mathcal{F}$ y $\mathcal{N}$ son las DFT's de la secuencia original f y de una realización del proceso estocástico n, respectivamente, y Ψ denota la función de transferencia del filtro de deconvolución. Si sumamos y restamos $\mathcal{F}(\omega)$ en la expresión (9) tenemos

$$\hat{\mathcal{F}}(\omega) = \mathcal{F}(\omega) + (\Psi(\omega)\mathcal{H}(\omega) - 1)\mathcal{F}(\omega) + \Psi(\omega)\mathcal{N}(\omega) = \mathcal{F}(\omega) + \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\omega) + \mathcal{E}_{\mathcal{N}}(\omega) \tag{10}$$

donde

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\omega) \doteq (\Psi(\omega)\mathcal{H}(\omega) - 1)\mathcal{F}(\omega) \tag{11}$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{N}} \doteq \Psi(\omega)\mathcal{N}(\omega) \tag{12}$$

son los errores de reconstrucción dependientes de la secuencia y del ruido, respectivamente. Generalmente, el error de reconstrucción proviene del término $\mathcal{E}_{\mathcal{N}}$, el cual provoca un efecto de amplificación del ruido, especialmente en los entornos de los ceros de $\mathcal{H}$, durante el proceso de la deconvolución [2]. Con el objeto de suprimir este efecto amplificador del ruido, utilizaremos el conjunto de Wiener parcial descartando la solución de Wiener en las frecuencias ω en las cuales $|\mathcal{H}(\omega)| \approx 0$. La solución en estas frecuencias se determina de tal forma que la secuencia estimada sea consistente con el resto de las restricciones impuestas en el problema.

Por tanto, definimos el conjunto de frecuencias $\mathcal{S}$, sobre el cual se impone como solución la solución de Wiener en las respectivas frecuencias, de la forma

$$\mathcal{S} \doteq \{\omega \;/\; |\mathcal{H}(\omega)| \geq U(\omega) > 0\,\} \tag{13}$$

donde $U(\omega)$ es una función umbral predeterminada. Ésta será función de la frecuencia pues las amplitudes de los máximos y mínimos de $\mathcal{H}(\omega)$ dependen, generalmente, de la frecuencia.
Por último, hacemos notar que la utilización del conjunto de Wiener parcial proporciona dos fuentes de regularización: 1) regularización debida a la incorporación de información estadística *a priori* acerca de la secuencia original y del ruido en la solución de Wiener, en el proceso de deconvolución; y 2) regularización debida a la posibilidad de imponer otras restricciones a la solución en los entornos de los ceros de $\mathcal{H}$.

3.2 El conjunto de reducción de base y el operador adaptativo

El operador de proyección adaptativo que aquí utilizamos está basado en la técnica de reducción de subespacios que exponemos en [4]. Esto es, partiendo de la información cualitativa *a priori* del carácter disperso de la secuencia a deconvolucionar, se elige como base del subespacio de representación de las estimaciones la base de deltas de Kronecker

$$B \doteq \{\; \delta[n-l]\;\}_{\forall n=1,\cdots N,\, l=1,\cdots N} \tag{14}$$

De esta forma llamaremos C_B al conjunto de vectores de la base B (14) para los cuales la representación de la secuencia f es la óptima (en el sentido de utilizar el menor número de vectores de la base B para su representación). El conjunto C_B, cerrado y convexo, es desconocido *a priori*. Proponemos determinar C_B en cada iteración, mediante un proceso de umbraleado. Así, definimos en la iteración k-ésima el conjunto

$$C_B^k \doteq \{\; b^{(i)} \in B \;/\; |\alpha_k^{(i)}| = |(b^{(i)},\; f_k)| > T_{k,i}\;\} \tag{15}$$

donde f_k es la secuencia estimada en la k-ésima iteración de un proceso POCS (2), y $T_{k,i}$ es la i-ésima componente, en la k-ésima iteración, de un umbral establecido empíricamente considerando las características cuantitativas de la secuencia estimada y los estadísticos del ruido. Una versión simple y robusta, utilizada en [4], es

$$T_{k,i} = \text{máx}\,\{T_{k-1,i},\;\; \tau\,\text{mín}\{i\} \text{ en la región } [|f_{k-1}[i]|\;/\;|f_{k-1,i}| > T_{k-1,i}]\;\} \tag{16}$$

con $0 < \tau < 1$. Por tanto, basándonos en la formulación iterativa del conjunto C_B^k, descrito en (15), el operador que proyecta un vector en el subespacio generado por los vectores de la base C_B^k podemos sintetizarlo, en la k-ésima iteración, de la forma

$$P_B^k = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \quad and \quad |\alpha_k^{(i)}| = |(b^{(i)},\ f_k)| > T_{k,i} \\ 0 & i = j \quad and \quad |\alpha_k^{(i)}| = |(b^{(i)},\ f_k)| \leq T_{k,i} \end{cases} \tag{17}$$

Es fácil ver que la *aproximación* que estamos realizando es equivalente a definir iterativamente el operador de proyección en el conjunto C_B, supuesto éste conocido, ya que vamos definiendo el subespacio al cual pertenece la secuencia estimada en la k-ésima iteración, determinando su base en cada paso, a partir de la base completa elegida B (14). Se trata por tanto de una técnica de reducción de subespacios enmarcada en un contexto POCS, la cual proporciona una estimación óptima (en el sentido anteriormente citado) cuando se introduce en un proceso POCS (2) de deconvolución.

3.3 El método POCS propuesto

Si consideramos conocidos *a priori*: 1) la información estadística, de la secuencia original y del ruido, necesaria para determinar el conjunto C_W (7), 2) el carácter disperso de la secuencia a deconvolucionar, y 3) el soporte temporal finito de la secuencia original, podemos utilizar los operadores P_W, P_B^k (que dará caracter adaptativo al proceso) y el operador de proyección de soporte finito, P_{SF}, dado en [7]. Así formulamos el proceso POCS adaptativo

$$f_{k+1} = P_B^k\ P_{SF}\ P_W\ f_k, \quad k = 0, 1, ... \tag{18}$$

tomando como estimación inicial f_0 la solución de Wiener del sistema (1). Puesto que P_B^k es un operador no-expansivo y conservativo [4], la convergencia en norma del algoritmo POCS adaptativo (18) a un elemento óptimo (en el sentido descrito anteriormente) del conjunto intersección $C_o = C_B^k \cap C_{SF} \cap C_W$ (donde C_{SF} es el conjunto de secuencias con soporte temporal prescrito), está asegurada [4].

4 Resultados experimentales

Se han realizado numerosas simulaciones para evaluar la mejora que introduce el método propuesto (18) frente al ya existente formulado en [6]. Aquí mostramos un ejemplo representativo. En esta simulación, la matriz D es una matriz Toeplitz construida a partir de una respuesta al impulso correspondiente a un filtro paso-bajo, n es ruido blanco con una varianza tal que la razón señal-ruido (SNR) es de 15 dB. La Figura 1 muestra la señal dispersa original f y la Figura 2 la secuencia de datos g. En la Figura 3 mostramos la estimación obtenida utilizando el método (18) aquí propuesto, tomando como primer umbral T_0 dos veces la potencia de la secuencia de datos g, y $\tau = 0,95$ en (16). En la Figura 4 se muestra la estimación obtenida utilizando el Operador adaptativo de varianza local acotada dado por Sezan *et al.*

en [6], en lugar del Operador adaptativo P_B^k, tomando en (13) $U(\omega)$=0.15. Ambas estimaciones son las obtenidas en la iteración (final) 25.
En este ejemplo puede observarse la mejora introducida por este nuevo proceso adaptativo: la estimación de la posición de los picos de la secuencia original es exacta (así como en el 100 % de las simulaciones realizadas), excepto en el pico número 4 en el que la posición media se estima en la posición real pero con varianza de 1.05, si bien la estimación de la amplitud de los mismos es susceptible de mejora; sin embargo, la estimaciones obtenidas con el algoritmo adaptativo dado en [6] adolecen de exactitud en la estimación de la posición de los picos "difíciles" (como puede ser el pico número 4 en esta secuencia f) ya que se detecta solamente en un 12 % de los casos analizados, originándose, por otra parte, picos espúreos en los entornos de los picos reales de la secuencia.
Otra ventaja que ofrece este nuevo método se refiere al tipo de conocimientos *a priori* que precisa. En efecto, para la formulación del operador de proyección adaptativo dado en [6] se precisa conocer la varianza local de la secuencia original, mientras que para la formulación del operador P_B^k de (18) se precisa conocer únicamente el carácter disperso de la secuencia.

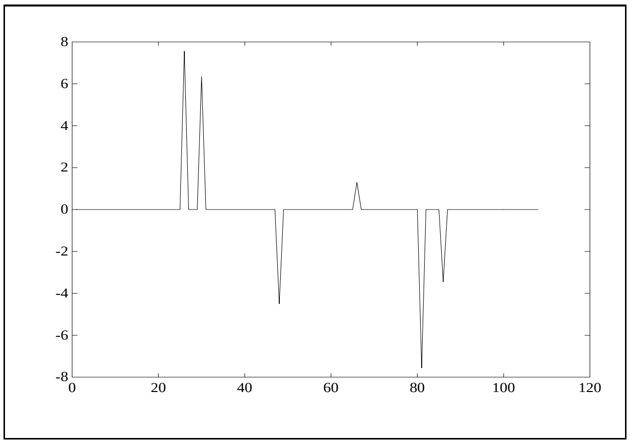

Figura 1: Secuencia dispersa original, f

5 Conclusiones y futuras líneas de trabajo

En este trabajo hemos formulado un nuevo método POCS adaptativo utilizando la solución de Wiener para el problema de la deconvolución de secuencias dispersas. Este método aporta mejores prestaciones para este problema (tanto con respecto a la calidad de las estimaciones, como al tipo de conocimientos *a priori* que se requieren para su formulación) que el método POCS (también adaptativo) formulado por Sezan *et al.* en [6].

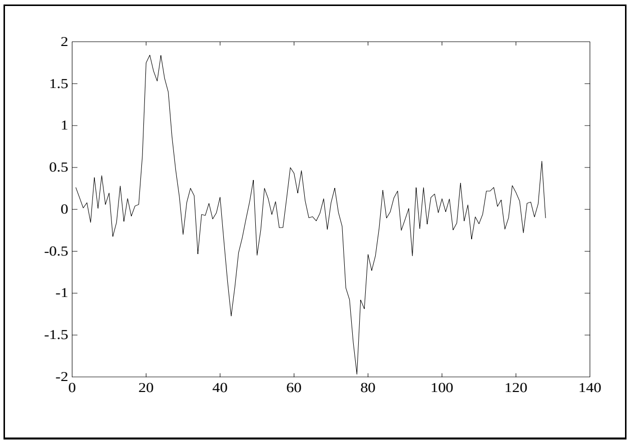

Figura 2: Secuencia degradada g (SNR = 15 dB)

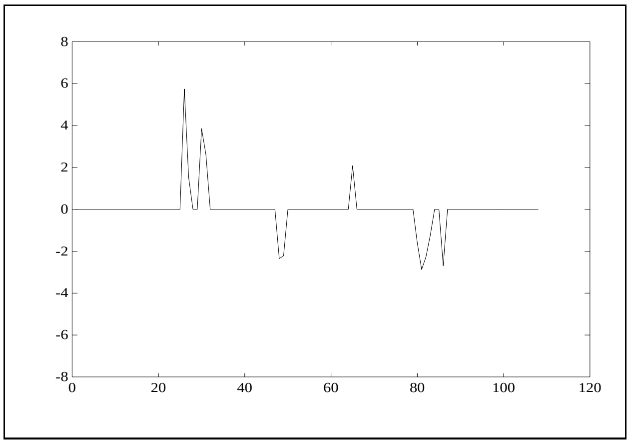

Figura 3: Secuencia estimada con el algoritmo POCS (18)

Por otra parte, hemos comparado los resultados con los obtenidos con la técnica de Tikhonov-Miller, utilizando en ambos casos el mismo operador adaptativo P_B^k, y si bien el método que utiliza la solución de Wiener proporciona mejores resultados en cuanto a la calidad de las estimaciones obtenidas, el número y clase de conocimientos *a priori* que éste utiliza es mucho mayor que en el caso determinista (recordemos que aquel precisa conocer completamente el espectro de la secuencia original y del ruido que afecta al sistema). Esto sugiere inmediatamente una de las posibles líneas de trabajo: la incorporación de otro tipo de solución (utilizando mínimos cuadráticos restringidos, etc) que precise un número menor de conocimientos *a priori*, en lugar de la solución de Wiener. La búsqueda de otras técnicas alternativas de reducción de subespacios es indudablemente otra de las vías de investigación abiertas en este trabajo.

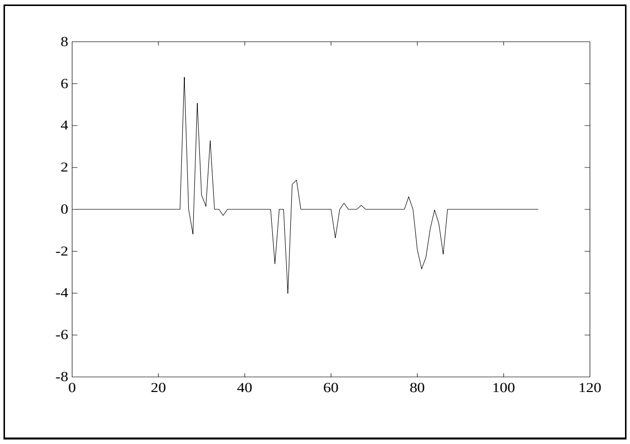

Figura 4: Secuencia estimada con el algoritmo POCS dado en [6]

Referencias

[1] Glasko, V.B. *Inverse Problems of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, Translation Series, New York (1988).

[2] Lagendijk, R.L., Biemond, J. and Boekee, D.E. Regularized Iterative Image Restoration with Ringing Reduction, *IEEE Trans. on ASSP*, vol. 36, no. 12 (1988).

[3] Morozov, V.A. *Regularization of ill-posed problems*, CRC Press, Boca Raton (1993).

[4] Sánchez Ávila, C. *Regularización estándar y adaptativa via POCS en problemas modelados por una ecuación de Fredholm de primera especie y aplicaciones a deconvolución*, Tesis Doctoral, UPM (1993).

[5] Sánchez Ávila, C. and Arriaga Gómez, F. Convergence of an adaptive regularized method for a class of inverse problems, Comunicación presentada en el Congreso *ICIAM'95*, Hamburgo (1995) (en imprenta).

[6] Sezan, M.I. and Tekalp, A.M. Adaptive Image Restoration with Artifact Suppression using the Theory of Convex Projections, *IEEE Trans. on ASSP*, vol. 38, no. 1 (1990).

[7] Stark, H. (ed.) *Image Recovery, Theory and Application*, Academic Press Inc. (1987).