# ACERCA DE SISTEMAS HIPERBÓLICOS QUE SURGEN EN JUEGOS DIFERENCIALES

J. P. Rincón Zapatero

Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas), Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Valladolid.

**Introducción**

Desde la creación en 1928 de la Teoría de Juegos por J. von Neumann, se han realizado notables esfuerzos en el desarrollo de esta disciplina; concretamente la Teoría de Juegos Diferenciales proporciona un marco adecuado para el tratamiento de problemas que aparecen en campos tan variados como la Economía, la Ingeniería o la Biología, [4], [6]. En la literatura sobre juegos diferenciales de suma no nula se encuentran numerosas aplicaciones en las que se estudian equilibrios de Nash de ciclo abierto. Debido a su complejidad, es menos habitual el análisis de los equilibrios basados en estrategias *feedback*. Si en problemas de Control Óptimo es deseable obtener una solución en términos de leyes *feedback*, aún lo es más en problemas planteados como un juego diferencial, dadas las componentes estratégicas que intervienen. Sin embargo, salvo en el caso lineal cuadrático, no es fácil encontrar equilibrios de Nash en estrategias *feedback*. Nuestro enfoque, inspirado en el de Bourdache y Fliess [2] para problemas de control óptimo no lineal, está basado en la caracterización de las estrategias que constituyen un equilibrio de Nash, como la solución de un sistema cuasilineal de ecuaciones en derivadas parciales que se deduce a partir de las condiciones necesarias de optimalidad establecidas por el principio del máximo de Pontryagin. A dicho sistema conduce la eliminación de las variables de coestado que aparecen en la definición de los hamiltonianos asociados a los jugadores. Establecemos como principal resultado que si el sistema de ecuaciones admite solución de clase $\mathcal{C}^1$, entonces las ecuaciones de Hamilton–Jacobi–Bellman admiten solución de clase $\mathcal{C}^2$, es decir, el equilibrio de Nash tiene la propiedad de consistencia temporal fuerte [6]. En algunos casos será posible deducir una expresión (explícita o implícita) para la solución. Cuando la solución esté dada en forma implícita, todavía será posible estudiar sus propiedades y dar un desarrollo de Taylor si la solución es analítica.

Las ecuaciones del sistema que aparecen en problemas de control tienen la misma parte principal, lo que permite su resolución mediante la integración del sistema de ecuaciones características asociado. Desafortunadamente, no es éste el caso en la situación bajo estudio; no obstante, bajo ciertas hipótesis, el sistema de ecuaciones en derivadas parciales asociado a un juego diferencial es hiperbólico. Esta caracterización permite encontrar soluciones aproximadas resolviendo numéricamente el sistema característico.

En la literatura existen pocos estudios numéricos del equilibrio de Nash *feedback*, dada la imposibilidad de aplicar los métodos habituales, válidos sólo para estrategias de ciclo abierto; únicamente en algunos trabajos se realizan aproximaciones numéricas, pero sobre la clase de estrategias lineales. Tal limitación es, desde luego, poco deseable. El estudio de las ecuaciones en derivadas parciales que caracterizan el equilibrio de Nash entre todas las estrategias *feedback* admisibles, proporciona la solución, sin necesidad de restringir las estrategias a determinados tipos.

**Formulación del juego diferencial**
Consideramos el juego diferencial de $N$ jugadores definido por:

$$\max_{u^i\in\mathcal{U}^i}\left\{J^i(\mathbf{u})=\int_{t_0}^{T}L^i(t,x,\mathbf{u})\,dt+\Phi^i(T,x(T))\right\},\qquad i=1,\dots,N \tag{1}$$

$$\text{s. a:}\quad x'=f(t,x,\mathbf{u}),\quad x(t_0)=x_0, \tag{2}$$

donde $x(t)\in\mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}=(u^1,\dots,u^N)$, $u^i(t,x(t))\in U^i\subseteq\mathbb{R}^{m_i}\quad\forall t\in[0,T]$, con

$$\mathcal{U}^i=\{u^i:[0,T]\times\mathbb{R}^n\longrightarrow U^i\ :\ u^i\text{ de clase }\mathcal{C}^1\}\ .$$

Las funciones $L^i$, $f$ y $\Phi^i$ son de clase $\mathcal{C}^2$ y se considera $T$ fijo. Nos centraremos en el caso escalar[1], $n=1$ y $m_i=1$ para todo $i$. Nuestro objetivo es determinar un elemento $\hat{\mathbf{u}}\in\mathcal{U}_1\times\ldots\times\mathcal{U}_N=\mathcal{U}$ tal que:

$$J^i(\widehat{u}^1,\dots,\widehat{u}^{i-1},u^i,\widehat{u}^{i+1},\dots,\widehat{u}^N)\le J^i(\hat{\mathbf{u}}),\qquad\forall u^i\in\mathcal{U}^i,\qquad i=1,\dots,N.$$

Es decir, un equilibrio de Nash del juego.

**Condiciones necesarias**
Introducimos el hamiltoniano del jugador i–ésimo:

$$H^i(t,x,\mathbf{u},\mu_i)=L^i(t,x,\mathbf{u})+\mu_i f(t,x,\mathbf{u}),$$

donde $\mu_i$ es la variable de coestado. Si $\hat{\mathbf{u}}\in\mathcal{U}$ es equilibrio de Nash, entonces existen funciones de clase $\mathcal{C}^1$, $\lambda_1,\dots,\lambda_N$ tales que se verifica el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\lambda_i' = -\widehat{H}^i_x-\sum_{j=1}^{N}\widehat{H}^i_{u_j}\hat{u}^j_x, \tag{3}$$

$$x' = \widehat{H}^i_{\mu_i}, \tag{4}$$

[1]Los resultados se pueden extender al caso más general de $n>1$ variables de estado y de control, siempre que se verifique $n=m_i$ para todo $i$. Puede consultarse [2] para una deducción de las ecuaciones utilizando corchetes de Lie pero en el caso $N=1$, es decir, en problemas de Control Óptimo.

con valores en la frontera:

$$\lambda_i(T) \;=\; \Phi^i_x(T, x(T)), \tag{5}$$

$$x(t_0) \;=\; x_0. \tag{6}$$

para $i = 1, \ldots, N$, donde $\widehat{H}^i$ denota $H^i$ evaluado en $(t, x, \hat{\mathbf{u}}, \lambda_i)$.

Además, dado que no existen restricciones sobre los valores que pueden tomar las estrategias, el principio del máximo establece:

$$\widehat{H}^i_{u^i} = 0, \qquad \forall t \in [t_0, T]. \tag{7}$$

Obsérvese que por tanto, del sumatorio de (3) desaparece el sumando i–ésimo. Una diferencia con respecto a las ecuaciones que aparecen en un problema de control se da precisamente en (3), dado que generalmente, en un juego diferencial, no se verifica $\widehat{H}^i_{u^j} = 0$ si $i \neq j$.

Dado que (7) se verifica para todo $t$, entonces:

$$\frac{d}{dt}\widehat{H}^i_{u^i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Sustituyendo en esta expresión el valor de $\lambda_i'$ determinado por (3) y teniendo en cuenta (7), se obtiene un sistema de ecuaciones en derivadas parciales donde no aparecen las variables de coestado:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} H^i_{u^i}(t, x, \hat{\mathbf{u}}(t, x), \lambda_i) \\
&= \widehat{H}^i_{u^i\,t} + \widehat{H}^i_{u^i\,x} f + \sum_{j=1}^{N} \widehat{H}^i_{u^i\,u^j}\,(\hat{u}^j_t + \hat{u}^j_x f) + \widehat{H}^i_{u^i\,\mu_i}\,\lambda_i' \\
&= \widehat{H}^i_{u^i\,t} + \widehat{H}^i_{u^i\,x}\, f + \sum_{j=1}^{N} \widehat{H}^i_{u^i\,u^j}\,(\hat{u}^j_t + \hat{u}^j_x\, f) + \widehat{H}^i_{u^i\,\mu_i} \Big( -\widehat{H}^i_x - \sum_{j=1}^{N} \widehat{H}^i_{u^j}\,\hat{u}^j_x \Big) \\
&= \widehat{H}^i_{u^i\,t} + \widehat{H}^i_{u^i\,x}\, f - \widehat{H}^i_x\, f_{u^i} + \sum_{j=1}^{N} \widehat{H}^i_{u^i\,u^j}\,\hat{u}^j_t + \sum_{j=1}^{N} \Big( f\,\widehat{H}^i_{u^i\,u^j} - f_{u^i}\,\widehat{H}^i_{u^j} \Big)\,\hat{u}^j_x,
\end{aligned}$$

para $i = 1, \ldots, N$.

Introduciendo las matrices $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ de orden $N \times N$ y $C = (c_i)$ de orden $N \times 1$, cuyos elementos se definen:

$$a_{ij} = \widehat{H}^i_{u^i\,u^j}, \quad b_{ij} = f\,\widehat{H}^i_{u^i\,u^j} - f_{u^i}\,\widehat{H}^i_{u^j}, \quad c_i = -(\widehat{H}^i_{u^i\,t} + \widehat{H}^i_{u^i\,x}\, f - \widehat{H}^i_x\, f_{u^i}),$$

se obtiene un sistema cuasilineal de ecuaciones en derivadas parciales, cuya expresión matricial es:

$$A\hat{\mathbf{u}}_t + B\hat{\mathbf{u}}_x = C. \tag{8}$$

Si la matriz $A$ fuera inversible, el sistema podría escribirse:

$$\hat{\mathbf{u}}_t + A^{-1}B\hat{\mathbf{u}}_x = A^{-1}C. \tag{9}$$

Puede deducirse una condición final que debe verificar $\hat{\mathbf{u}}$, si se tiene en cuenta (5) y (7), dado que cuando $t = T$,

$$\begin{aligned} 0 &= L^i_{u^i}(T, x, \hat{\mathbf{u}}(T, x)) + \lambda_i(T) f_{u^i}(T, x, \hat{\mathbf{u}}(T, x)) \\ &= L^i_{u^i}(T, x, \hat{\mathbf{u}}(T, x)) + \Phi^i_x(T, x) f_{u^i}(T, x, \hat{\mathbf{u}}(T, x)), \end{aligned} \tag{10}$$

se obtiene una expresión (implícita o explícita) para $\hat{\mathbf{u}}(T, x)$.

**Ecuación de Hamilton–Jacobi–Bellman**

Con el fin de precisar si la solución del sistema (8) es de hecho un equilibrio del juego, pasamos a analizar la relación existente entre dicho sistema y las ecuaciones de Hamilton–Jacobi–Bellman (H–J–B). En el siguiente resultado establecemos que encontrar equilibrios *feedback* del juego se reduce a resolver el sistema (8). En realidad, el teorema implica una condición más exigente, ya que entonces el equilibrio es subjuego–perfecto (o fuertemente consistente): $\mathbf{u}$ es también equilibrio de Nash para el *sub*–juego diferencial dado por (1), (2) con condición inicial $x(\tau) = x$, para todo $\tau \in [0, T]$ y para todo $x \in \mathbb{R}$.

**Teorema 1** *Sea* $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^N) \in \mathcal{U}$ *tal que* $\forall i = 1, \ldots, N$, $f_{u^i}(t, x, \mathbf{u}) \neq 0$ *y*

$$\begin{aligned} &H^i(t, x, \mathbf{u}, \mu^i) \geq H^i(t, x, u^1, \ldots, v^i, \ldots, u^N, \mu^i), \\ &\forall \mathbf{v} = (v^1, \ldots, v^N) \in \mathcal{U}, \quad \forall t, x, \mu^i. \end{aligned} \tag{11}$$

*El elemento* $\mathbf{u}$ *es solución de (8) si y sólo si existen funciones* $V^1, \ldots, V^N$ *de clase* $\mathcal{C}^2$ *que verifican las ecuaciones de H–J–B:*

$$-V^i_t(t, x) = \max_{u^i \in U^i} H^i(t, x, \mathbf{u}(t, x), V^i_x) \tag{12}$$

$$V^i(T, x) = \Phi^i(T, x), \qquad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{13}$$

**Sistemas hiperbólicos**

En problemas de Control Óptimo no lineal, el enfoque desarrollado en [2] da lugar a un sistema de ecuaciones en derivadas parciales cuasilineal donde las ecuaciones tienen la misma parte principal. Esta propiedad permite plantear el sistema característico asociado y abordar su estudio como si de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se tratara. Esto es especialmente útil sobre todo desde el punto de vista de la integración numérica, dado que se cuenta con numerosos métodos para la resolución numérica de sistemas de EDOs. Por el contrario, cuando el sistema proviene de un juego diferencial, en general no podemos esperar esta propiedad, por lo que la integración numérica ha de basarse en otros métodos.

En una primera aproximación, hemos elegido un método híbrido de orden uno propuesto por Courant–Isaacson–Rees, [1], con extrapolación. Los métodos híbridos permiten conocer la solución en los puntos equiespaciados de una malla y no sólo a lo largo de las características. Presentan la ventaja respecto al método de las características de que la interpolación necesaria para ambos métodos es menos costosa. Por otra parte, tienen el inconveniente de que pueden resultar inestables [1].

Por supuesto, la discusión anterior carece de sentido si el sistema de ecuaciones (8) no es hiperbólico. Por este motivo, nos centramos en este trabajo en sistemas de este tipo, estudiando a continuación un modelo económico .

## Estudio de un modelo económico

En esta sección consideramos un juego diferencial capitalista de horizonte finito, estudiado recientemente por Shimomura [7] pero en horizonte infinito.

Nuestro propósito es encontrar equilibrios *feedback*, mediante el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (9).

El juego queda descrito por:

$$\begin{aligned}
&\max_u \Big\{ \int_0^T h_1(u)\,\mathrm{e}^{-r_1 t}\,dt + \mathrm{e}^{-rT}\Phi^1(T,x(T))\Big\},\\
&\max_v \Big\{ \int_0^T h_2(v)\,\mathrm{e}^{-r_2 t}\,dt + \mathrm{e}^{-rT}\Phi^2(T,x(T))\Big\},\\
&\text{s. a:}\quad x' = F(x) - kx - u - v,\\
&\qquad\quad x(0) = x_0,\\
&\qquad\quad x \geq 0,\ u \geq 0,\ v \geq 0,
\end{aligned}$$

donde las funciones que intervienen verifican:

$$\begin{aligned}
&h' > 0, \quad h'' < 0,\\
&-h_1''(u)/h_1'(u) = \alpha_1, \qquad -h_2''(v)/h_2'(v) = \alpha_2,\\
&F(0) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} F(x) = \infty,\\
&F'(x) > 0, \qquad F''(x) \leq 0, \qquad \forall x > 0, \qquad \lim_{x\to\infty} F'(x) \geq 0,\\
&\Phi^i_x(T,x) > 0, \qquad \Phi^i_{xx}(T,x) \leq 0, \qquad \forall x \geq 0, \quad i = 1,2,
\end{aligned}$$

y $\alpha_1$, $\alpha_2$ y $r$ son constantes positivas.

En este modelo el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (9) se reduce a

$$u_t + (F(x) - kx - u - v)\,u_x + \frac{1}{\alpha_1} v_x = \frac{F'(x) - k - r}{\alpha_1}, \tag{14}$$

$$v_t + (F(x) - kx - u - v)\, v_x + \frac{1}{\alpha_2} u_x = \frac{F'(x) - k - r}{\alpha_2}, \tag{15}$$

con condición final

$$u(T,x) = G_1(x) = \left(h_1'\right)^{-1} (\Phi_x^1(T,x)), \tag{16}$$

$$v(T,x) = G_2(x) = \left(h_2'\right)^{-1} (\Phi_x^2(T,x)). \tag{17}$$

Si las funciones $G_1$, $G_2$ y $F$ son analíticas, en virtud del Teorema de Cauchy-Kowaleski, en un entorno de $t = T$ exite una única solución analítica de (14)-(15) [3], [5]. En particular, cuando $G_1 \equiv G_2 \equiv 0$ y la función $F$ viene dada por $F(x) = ax$ con $a \in \mathbb{R}$, podemos encontrar una solución $(u,v)$ de (14)-(15) independiente de $x$, de la forma

$$u(t,x) = -\frac{a - k - r_1}{\alpha_1} (T - t),$$

$$v(t,x) = -\frac{a - k - r_2}{\alpha_2} (T - t).$$

Para valores apropiados de los parámetros, del tiempo $T$ y de la condición inicial $x_0$, que garanticen la no negatividad de $u$, $v$ y $x$ tendremos que $(u,v)$ es un equilibrio *feedback*.

Distinguiremos a continuación dos casos:

- $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha,\ r_1 = r_2 = r.$

  En este caso podemos reducir (14)–(15), sin mas que sumar y restar las ecuaciones del sistema, a la relación

$$w_t + \left(F(x) - kx - w + \frac{1}{\alpha}\right) w_x = 2\, \frac{F'(x) - k - r}{\alpha}, \tag{18}$$

$$W_t + \left(F(x) - kx - w + \frac{1}{\alpha}\right) W_x = 0, \tag{19}$$

  donde $w = u + v$ y $W = u - v$. Y las condiciones finales (16)-(17) se convierten en

$$w(T,x) = G_1(x) + G_2(x),$$

$$W(T,x) = G_1(x) - G_2(x).$$

  A partir de la ecuación (19), independientemente de la función $w$, se puede ver que si en el instante final $t = T$ las soluciones $(u,v)$ de (18)-(19) coinciden, es decir, $G_1 \equiv G_2$, entonces $W(T,x) = 0$ y por tanto en todo tiempo $t$, $W(t,x) = 0$. Ésto nos permite afirmar que si los controles de ambos jugadores coinciden en $t = T$, entonces siempre son iguales.

A partir de este momento nos centramos en la ecuación (18) con condición final

$$w(T,x) = G(x), \tag{20}$$

y su sistema característico

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \tag{21}$$

$$\frac{dx}{d\tau} = F(x) - kx - z + \frac{1}{\alpha}, \tag{22}$$

$$\frac{dz}{d\tau} = 2\,\frac{F'(x) - k - r}{\alpha}, \tag{23}$$

con condición final

$$t(T,s) = T, \tag{24}$$

$$x(T,s) = s, \tag{25}$$

$$z(T,s) = G(s), \tag{26}$$

cuyas soluciones, para distintos valores del parámetro $s$, nos proporciona la superficie solución de (18), (20) generada por las curvas características.

Es bien conocido [5] que, localmente, existe una única solución de (21)–(23) y (24)–(26) de clase $\mathcal{C}^1$. Nuestro propósito es encontrar dicha solución, mediante su resolución analítica, si es posible, o bien con una integración numérica. En particular, cuando $F(x) = ax$ y $G(x) = bx$ la solución de la ecuación (18) es:

$$w(t,x) = \frac{m}{\alpha}(t-T) + b\,\frac{x\,\mathrm{e}^{-nt} - \frac{m}{\alpha n}\Big[(t-T)\,\mathrm{e}^{-nt} - (\frac{1}{m} - \frac{1}{n})g(t)\Big]}{\mathrm{e}^{-nT} - \frac{b}{n}g(t)}, \tag{27}$$

donde $m = 2(a-k-r)$, $n = a-k$ y $g(t) = \mathrm{e}^{-nT} - \mathrm{e}^{-nt}$. De nuevo para valores apropiados de los parámetros, de $T$ y de $x_0$, $(w/2, w/2)$ será un equilibrio *feedback*.

Cuando la forma de las funciones $F$ o $G$ dificulten la resolución analítica del sistema (21)–(23) junto con (24)–(26), se puede tratar de determinar numéricamente, como en el caso en que $F(x) = x^{1/3}$ y $G(x) = 0$ o $G(x) = x$, cuya integración numérica la hemos realizado mediante un método Runge-Kutta, implementado en el paquete de software MATLAB. Representamos las soluciones así obtenidas en las figuras 1 y 3, para las dos condiciones finales $G$ consideradas, y las curvas solución $w(t,x)$ en distintos instantes de tiempo, en las figuras 2 y 4.

- $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Abordaremos a continuación la integración numérica del sistema cuando $\alpha_1 \neq \alpha_2$, teniendo en cuenta que el sistema (14)–(15) es hiperbólico.

Realizamos la implementación en MATLAB del método de Courant–Isaacson–Rees con extrapolación y pasamos a comparar la solución obtenida con la exacta dada en (27) para distintos valores de los parámetros, con condición final $u(1,x) = bx$, $v(1,x) = bx$, $b > 0$. El error cometido para el diámetro de malla elegido fue del orden de $10^{-8}$, observándose una convergencia de orden dos como cabía esperar.

A continuación procedimos a emplear el método para los valores de los parámetros siguientes: $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0.25$, $r_1 = 0.1$, $r_2 = 0.15$, $k = 0.01$, para la función $F(x) = 1.5\,x^{1/4}$ con condiciones finales $u(1,x) = 0$, $v(1,x) = 0$ y $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 16$, $r_1 = 0.1$, $r_2 = 0.15$, $k = 0.01$ para la misma función $F$ con condiciones finales $u(1,x) = 0.075\,x$, $v(1,x) = 0.1\,x$ respectivamente. En las figuras 5 y 7 mostramos las soluciones obtenidas para las dos condiciones finales consideradas, mientras que en las figuras 6 y 8 aparecen las estrategias óptimas en función de la variable $x$ en distintos instantes de tiempo.

## Referencias


[1] Ames, W. F.: Numerical Methods for Partial Differential Equations, Second Ed. Academic Press, Londres (1977).

[2] Bourdache-Siguerdidjane, H. & Fliess, M.: Optimal feedback control of nonlinear systems. Automatica, 23, 3, pp. 365–372 (1987).

[3] Courant, R. & Hilbert, D.: Methods of Mathematical Physics, Volume II. Wiley Interscience, New York (1962).

[4] Friedman, A.: Differential Games. Wiley Interscience (1971).

[5] John, F.: Partial Differential Equations. Springer-Verlag, New York (1971).

[6] Melhmann, A.: Applied Differential Games. Plenum Press, New York (1988).

[7] Shimomura, K.: The feedback equilibria of a differential game of capitalism. Journal of Economic Dynamics and Control, 15, pp. 317-338 (1991).

[8] Whitham, G. B.: Linear and Nonlinear Waves. Wiley Interscience, New York (1974).

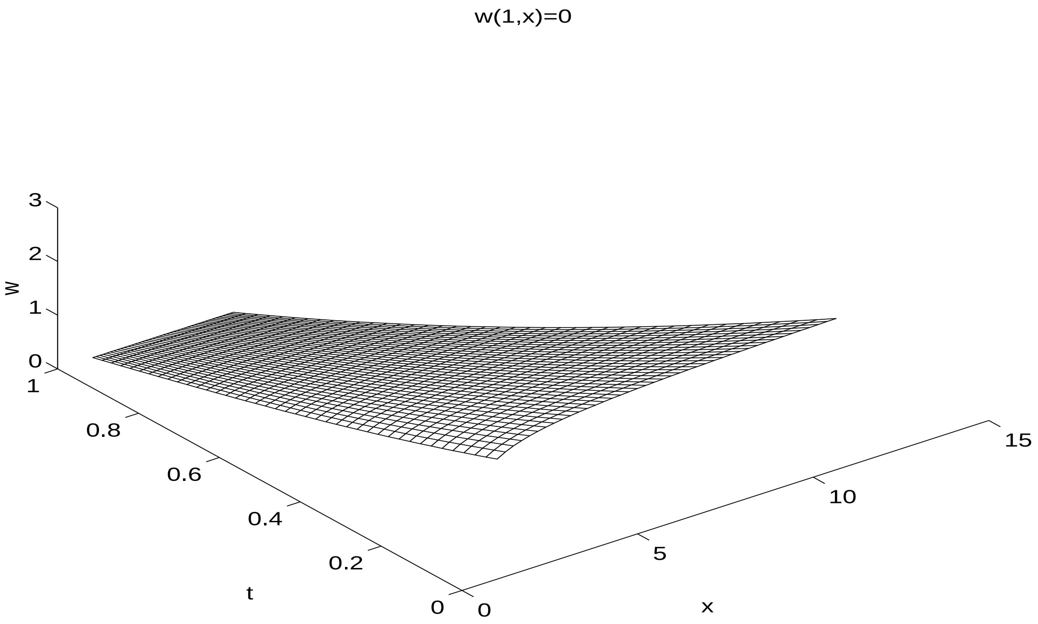


Figure 1:

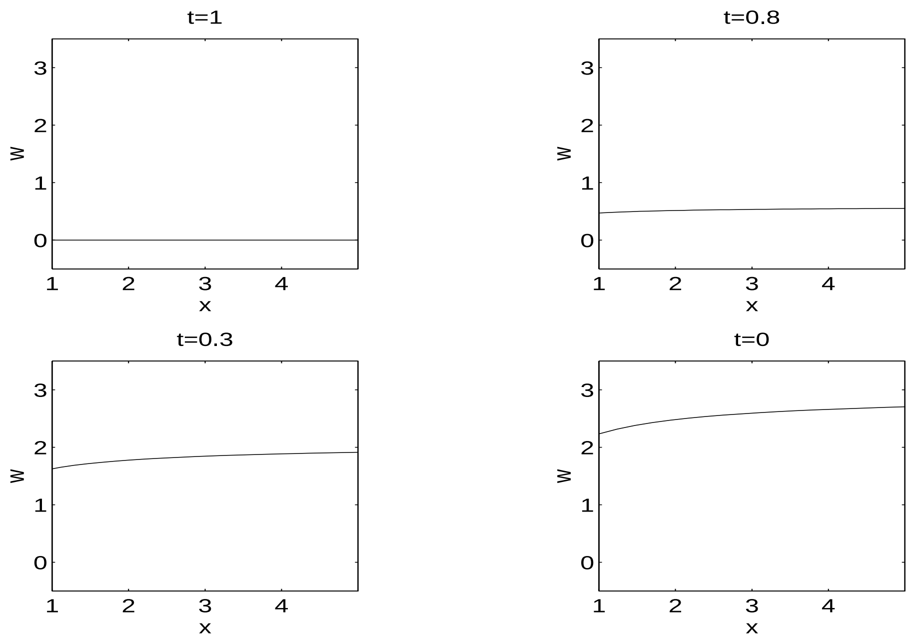


Figure 2:

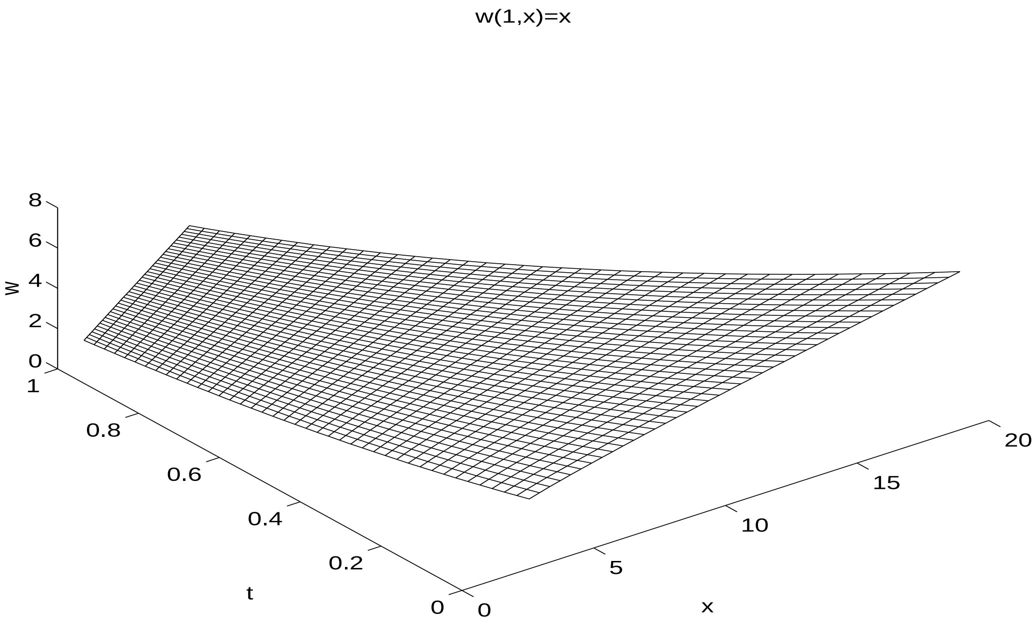


Figure 3:

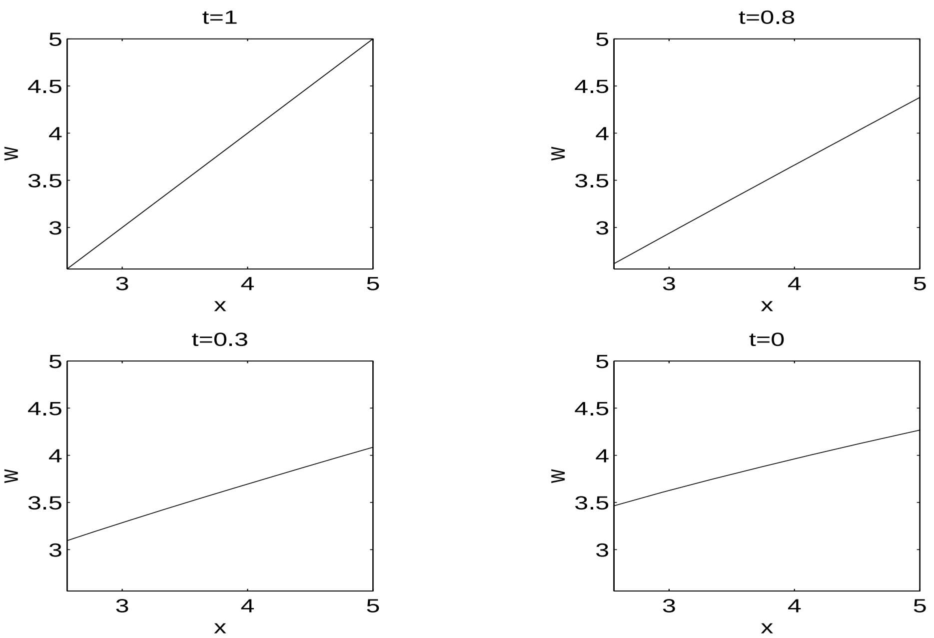


Figure 4:

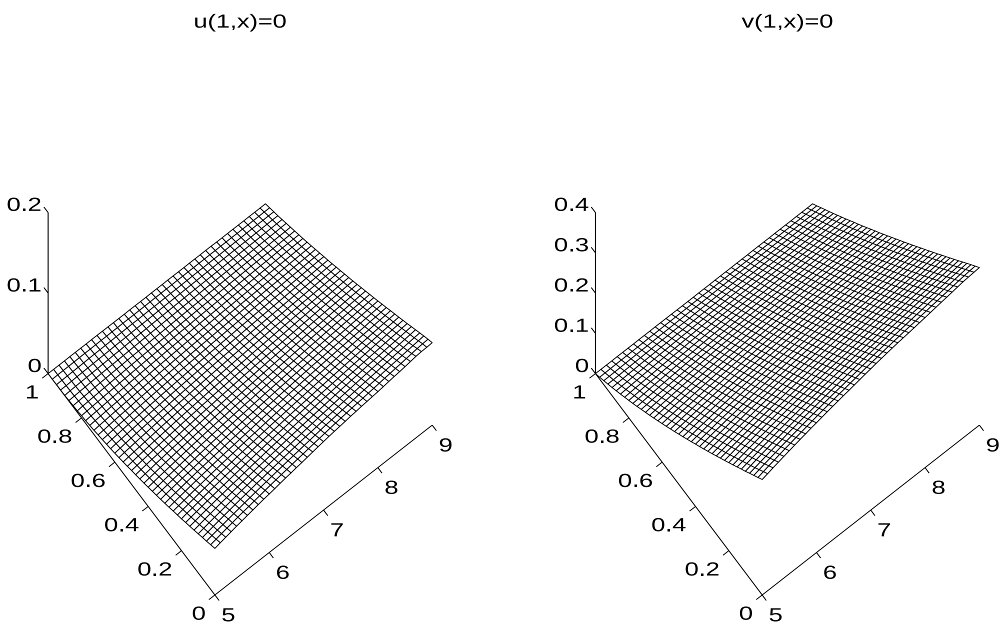


Figure 5:

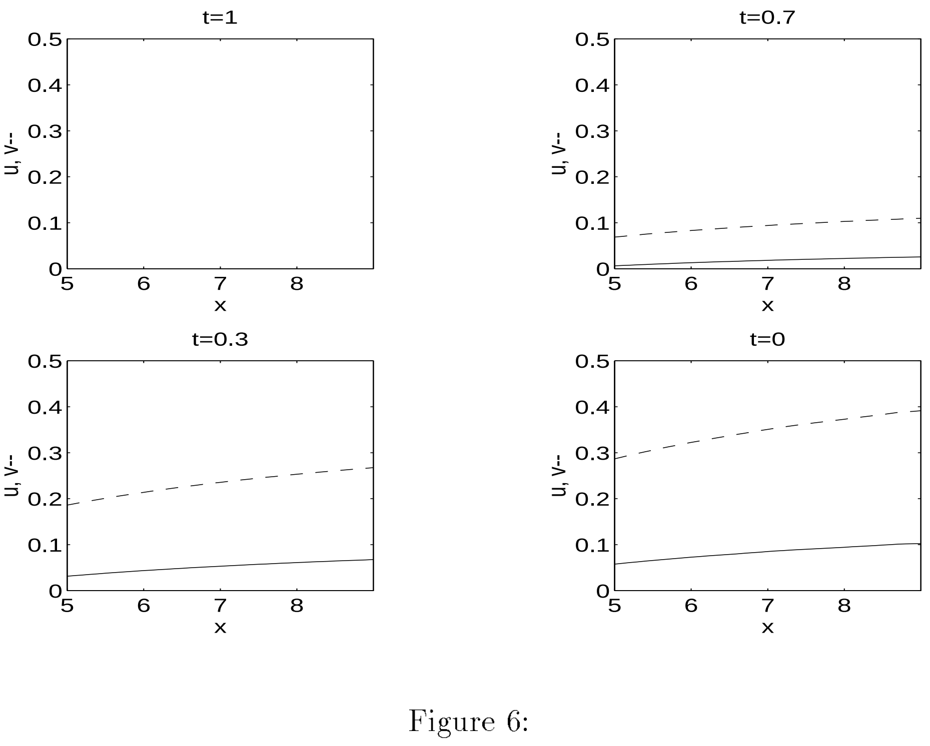


Figure 6:

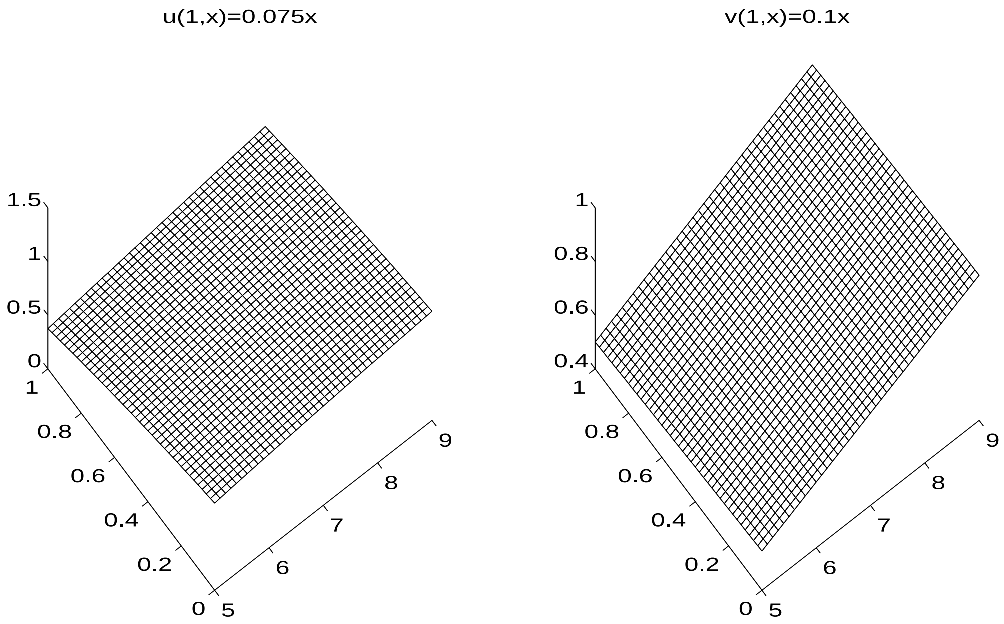


Figure 7:

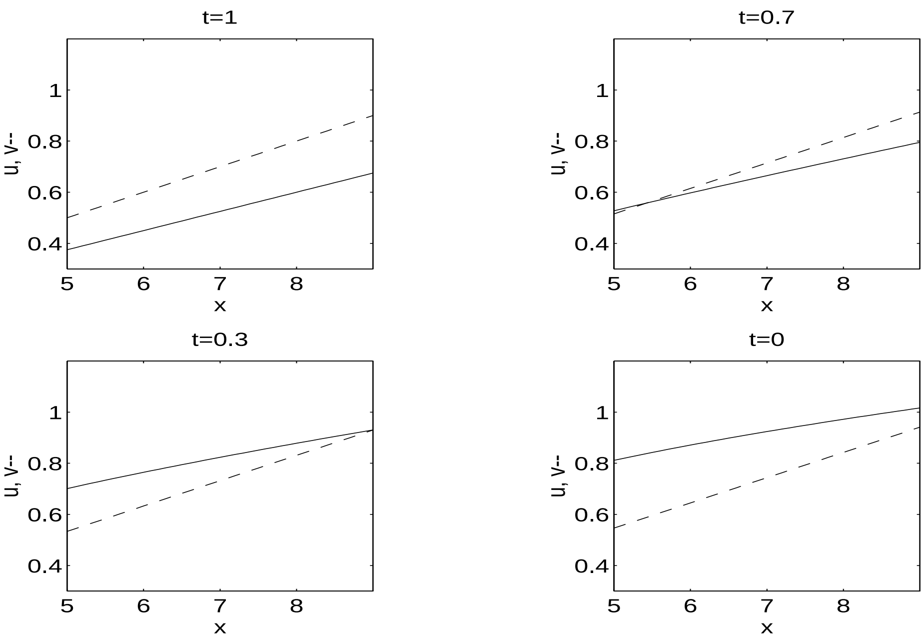


Figure 8: