INESTABILIDADES SECUNDARIAS

EN EL PROBLEMA DE

RAYLEIGH-BENARD BIDIMENSIONAL

Prat, J.[(1)], *Massaguer, J.M.*[(2)], *Mercader, I.*[(2)]

(1) Dpto. Matemática Aplicada y Telemática. c/Eduard Maristany s/n, 08800 Vilanova i la Geltrú. Universitat Politècnica de Catalunya.

(2) Dpto. Física Aplicada. c/ Jordi Girona Salgado s/n. Campus Nord, Mòdul B4, 08034 Barcelona. Universitat Politècnica de Catalunya.

Problema de Rayleigh-Benard

Se denomina problema de Rayleigh-Benard al estudio de un fluído confinado en una capa plana horizontal de extensión infinita sometida a un gradiente de temperatura. Los parámetros o números adimensionales del problema son el número de **Rayleigh**, Ra, que depende del gradiente de temperatura, y el número de **Prandtl**, σ, que depende de las propiedades físicas del fluído.

Consideraremos flujos bidimensionales, confinados en un plano vertical. Supondremos además periodicidad en la dirección x y en las superficies conductoras la adherencia.

Aumentando el número de Rayleigh, existe un Ra crítico a partir del cual la solución conductiva pasa a ser convectiva y aparecen los denominados **rolls convectivos** con unas simetrías características. La estabilidad de estas soluciones frente a perturbaciones con la misma periodicidad fundamental a, $\mathbf{u}'(x) = \mathbf{u}'(x+a)$, así como su posterior comportamiento no lineal ya se ha estudiado en recientes trabajos [1,2].

El **objetivo** es extender el análisis tomando perturbaciones más generales del tipo $\mathbf{u}'(x) = \mathbf{u}'(x+Na)$, con $N \neq 1$, periódicas de periodicidad Na, de manera que el estado perturbado mantenga siempre estructura periódica en x.

Observemos que perturbar una solución de longitud de onda fundamental a con perturbaciones de éste tipo es equivalente a estudiar la estabilidad de una solución resultado del clonage de N parejas de rolls convectivos. Para ello utilizaremos Teoría de Floquet.

Ecuaciones

Para obtener las ecuaciones expresaremos la velocidad en términos de la función de corriente χ', separando su promedio (horizontal) que llamaremos velocidad media o viento y representaremos por $U(z,t)$.

$$\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{v}',$$

donde

$$\mathbf{U} = (U(z,t), 0)$$

$$\mathbf{v}' = (-\partial_z \chi', \partial_x \chi')$$

con $\overline{\mathbf{v}}' = \overline{\chi}' = 0$. Con esta formulación permitimos que exista un flujo de masa neto, $\int_{-1/2}^{1/2} U(z,t)dz \neq 0$.

Expresaremos la temperatura como

$$T = (\frac{1}{2} - z)\frac{\Delta T}{2} + T'$$

donde T' es la desviación respecto a la solución conductiva.

Las ecuaciones que rigen nuestro problema en términos de U, χ', T' se obtienen a partir de la ecuación de Navier-Stokes y de la ecuación del calor y son:

$$\partial_t U = \sigma \partial_{zz}^2 U - \partial_z \overline{v_x' v_z'} \tag{1.1}$$

$$\partial_t \omega' = \sigma \Delta^2 \omega' - Ra\sigma \partial_x T' - U\partial_x \omega' - \partial_{zz}^2 U \partial_x \chi' - \frac{\partial(\chi', \omega')}{\partial(x,z)} + \overline{\frac{\partial(\chi', \omega')}{\partial(x,z)}} \tag{1.2}$$

$$\partial_t T' = \Delta^2 T' + \partial_x \chi' - U\partial_x T' - \frac{\partial(\chi', T')}{\partial(x,z)} \tag{1.3}$$

donde $\omega' = -\Delta^2 \chi'$ es la componente y de la vorticidad.

Analisis de estabilidad: Teoría de Floquet

Podemos reescribir las ecuaciones (1) como:

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathcal{F}(\mathbf{v}, \mu, \partial_x, \partial_z) = 0 \tag{2}$$

con $\mu = (Ra, \sigma)$ y $\mathbf{v} = (U, \omega', T')$.

A partir de ahora omitiremos la variable z siempre que no se necesite.

Sea $\mathbf{v}^0 = (0, \omega^0, T^0)$ una solución periódica estacionaria de 2,

$$\mathbf{v}^0(x) = \mathbf{v}^0(x+a)$$

donde a es la longitud de onda fundamental, es decir $\mathbf{v}^0$ no es invariante frente ninguna traslación de longitud menor que a.

Si se perturba $\mathbf{v}^0$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \mathbf{v}'$, y se linealiza a su alrededor, la ecuación para las perturbaciones se puede escribir como

$$\partial_t \mathbf{v}' = \mathcal{L}(\mathbf{v}^0, \mu, \partial_x)\mathbf{v}'$$

$$\mathbf{v}'(x) = \mathbf{v}'(x + Na), \quad N \neq 1$$

para un operador lineal $\mathcal{L}$ que para simplificar lo notaremos como $\mathcal{L}_\mu(x)$.

Debido a la forma de $\mathcal{F}$ y a la periodicidad a de $\mathbf{v}^0$ el operador $\mathcal{L}_\mu$ cumple

$$\mathcal{L}_\mu(x + a) = \mathcal{L}_\mu(x)$$

Si expresamos $\mathbf{v}'(x,t) = e^{\lambda t}\mathbf{u}(x)$, podemos eliminar el tiempo y obtenemos el siguiente problema de valores propios:

$$\lambda \mathbf{u} = \mathcal{L}_\mu(x)\mathbf{u} \tag{3.1}$$

$$\mathcal{L}_\mu(x + a) = \mathcal{L}_\mu(x) \tag{3.2}$$

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}(x + Na) \tag{3.3}$$

con $N \neq 1$.

Proposición 1

Si $\mathbf{u}(x)$ es una solución de 3 entonces $\mathbf{u}(x + a)$ también es solución.

Fijado μ, si queremos que la solución de 3 sea única tiene que existir una constante Γ tal que:

$$\mathbf{u}(x + a) = \Gamma \mathbf{u}(x)$$

además se cumple que $\mathbf{u}(x + 2a) = \Gamma^2 \mathbf{u}(x), ..., \mathbf{u}(x + Na) = \Gamma^N \mathbf{u}(x)$.

Pero como se tiene que verificar 3.3 entonces $\Gamma^N = 1$, y por tanto las posibles Γ son las raíces N-ésimas de la unidad:

$$\Gamma_n = e^{\frac{2\pi i n}{N}} \quad n = 0, ..., N - 1$$

El problema de valores própios 3 se separa en N subproblemas:

$$\lambda_n \mathbf{u}_n = \mathcal{L}_\mu(x)\mathbf{u}_n \tag{4.1}$$

$$\mathcal{L}_\mu(x + a) = \mathcal{L}_\mu(x) \tag{4.2}$$

$$\mathbf{u}_n(x + a) = \Gamma_n \mathbf{u}_n(x), \quad \Gamma_n = e^{\frac{2\pi i n}{N}} \tag{4.3}$$

para cada $n = 0 \div N - 1$.

El caso $n = 0$ corresponde a $\Gamma_0 = 1$, entonces el problema de estabilidad coincide con el análisis para $N = 1$ que ya está resuelto de una pareja de rolls convectivos en [1,2]. Es importante remarcar que $N = 1$ es el único caso en el que podemos encontrar una perturbación que nos genere viento o velocidad media.

Podemos conseguir simplificar 4 si se define, para cada n, el cambio:

$$\xi_n(x) = \mathbf{u}_n(x)e^{-id_n \alpha x} \tag{5}$$

donde $d_n = \frac{n}{N}$ y $\alpha = \frac{2\pi}{a}$.

Observemos que ξ_n es periódica de periodicidad a:

$$\xi_n(x+a) = \mathbf{u}_n(x+a)e^{-2\pi i \frac{n}{N}\frac{x+a}{a}}$$

$$= \mathbf{u}_n(x+a)\Gamma_n^{-1}e^{-2\pi i \frac{n}{N}\frac{x}{a}} = \mathbf{u}_n(x)e^{-2\pi i \frac{n}{N}\frac{x}{a}} = \xi_n(x)$$

Entonces el problema de valores pròpios 4 en términos de la función ξ_n se puede escribir como

$$\lambda_n \xi_n e^{id_n \alpha x} = \mathcal{L}_\mu(x)\left[\xi_n e^{id_n \alpha x}\right] \tag{6.1}$$

$$\mathcal{L}_\mu(x+a) = \mathcal{L}_\mu(x) \tag{6.2}$$

$$\xi_n(x+a) = \xi_n(x) \tag{6.3}$$

obteniendo así un conjunto de N subproblemas de valores propios.

De hecho 6, cuando $n \neq 0$, es un caso particular de lo que se denomina el análisis de Eckhaus. Para el análisis de estabilidad de Eckhaus de una solución estacionaria de periodo a, o número de onda $\alpha = \frac{2\pi}{a}$, las perturbaciones son del tipo:

$$\xi(x)e^{id\alpha x}$$

con qualquier $d \in (0,1)$ y $\xi(x)$ función periodica de longitut de onda fundamental a. Si tomamos d racionales del tipo $d = \frac{n}{N}$ para $n = 1 \div N-1$ recuperamos 6 cuando $n \neq 0$.

Así el problema de valores própios inicial, cuando $n \neq 0$, se separa en $N-1$ subproblemas de valores própios, cada uno de los cuales es un caso particular del análisis de Eckhaus.

De hecho podemos ver que no se necesita resolver 6 para todas las n. Como veremos a continuación el caso $d_{N-n} = 1 - \frac{n}{N}$ se puede recuperar a partir del caso $d_n = \frac{n}{N}$.

Proposición 2

Para cada n, las soluciones $(\lambda_n, \mathbf{u}_n)$ de 4 verifican

$$(\lambda_n, \mathbf{u}_n) = (\lambda^*_{N-n}, \mathbf{u}^*_{N-n})$$

donde * significa conjugar.

Veamos por ejemplo el caso $\mathbf{N=4}$, es decir perturbemos la solución estacionaria $\mathbf{v}_0$ de periodo a con perturbaciones $\mathbf{u}$ que cumplen $\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}(x+4a)$.

En este caso:

$$\Gamma_n = \{1, i, -1, -i\}$$

y por tanto las perturbaciones se separan en 4 subconjuntos, $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, que cumplen:

$$\mathbf{u}_0(x+a) = \mathbf{u}_0(x)$$

$$\mathbf{u}_1(x+a) = i\mathbf{u}_1(x)$$

$$\mathbf{u}_2(x+a) = -\mathbf{u}_2(x)$$

$$\mathbf{u}_3(x+a) = -i\mathbf{u}_3(x)$$

Como hemos visto en la proposición 2 u_1 y u_3 son perturbaciones una conjugada de la otra. Además u_0 corresponde a perturbaciones con $N = 1$, y $\mathbf{u}_2$ corresponde a perturbaciones del subconjunto $n = 1$ para $N = 2$, que tiene periodicidad $2a$:

$$\mathbf{u}_2(x + 2a) = \Gamma_2^2 \mathbf{u}_2(x) = \mathbf{u}_2(x)$$

De esta forma podriamos estudiar sucesivamente diferentes N los subconjuntos de perturbaciones que aparecen.

Discretización

Para ello calculamos una solución estacionaria de periodicidad a, o número de onda fundamental $\alpha = \frac{2\pi}{a}$ del tipo:

$$\omega^0 = \sum_{m=1}^{L} \omega_m^0(z) \sin m\alpha x$$

$$T^0 = \sum_{m=0}^{L} T_m^0(z) \cos m\alpha x$$

Escribimos las soluciones perturbadas como:

$$\omega = \omega^0 + \omega' e^{\lambda t} = \omega^0 + \omega^* e^{id_n \alpha x} e^{\lambda t}$$

$$T = T^0 + T' e^{\lambda t} = T^0 + T^* e^{id_n \alpha x} e^{\lambda t}$$

con $d_n = \frac{n}{N}$ para $n = 0 \div [\frac{N}{2}]$. El caso $n = 0$ se ha estudiado a parte.

Como ω^* y T^* tienen periodicidad a,

$$\omega' = \sum_{l=-L}^{L} \omega_l(z) e^{i(l + d_n)\alpha x}$$

$$T' = \sum_{l=-L}^{L} iT_l(z) e^{i(l + d_n)\alpha x}$$

La ecuación para las perturbaciones es:

$$\lambda \omega' = \sigma \Delta^2 \omega' - Ra\sigma \partial_x T' - (J(\chi^0, \omega') + J(\chi', \omega^0)) \tag{7.1}$$

$$\lambda T' = \Delta^2 T' + \partial_x \chi' - (J(\chi^0, T') + J(\chi', T^0)) \tag{7.2}$$

$$\omega' = -\Delta^2 \chi' \tag{7.3}$$

El sistema 7 se resuelve usando técnicas espectrales.

Para x usamos un método de Galerkin Fourier.

Para z usamos un método de colocación Chebyshev en los puntos de Gauss-Lobatto.

Resultados

Los resultados que presentamos son para $\sigma = 10$.

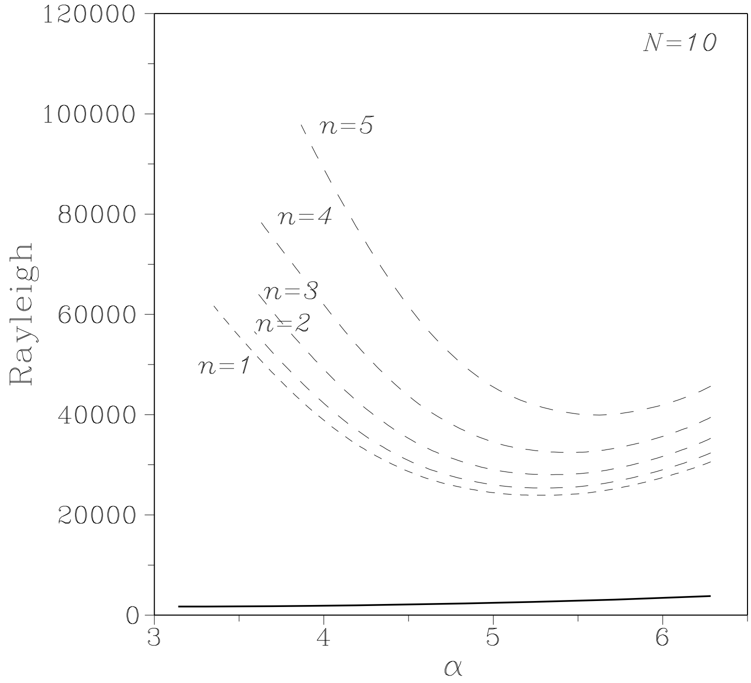

Figura 1:

Analicemos la figura 1: presentamos una gráfica número de Rayleigh Ra n'umero de onda fundamental α de las curvas de estabilidad para $N = 10$. Observemos que solo representamos las curvas para $n = 1, 2, 3, 4, 5$, como ya hemos visto en la proposición 2 la curva para $n = 6$ coincidiria con la de $n = 4$, para $n = 7$ con la de $n = 3$ y así sucesivamente hasta $n = 9$.

Podemos observar además que las curvas para $n = 2$ y 4 son exactamente las que encontrariamos para $N = 5$ si no consideramos $n = 0$ y la curva para $n = 5$ es la que encontrariamos para $N = 2$ tambien sin considerar la curva $n = 0$.

De todas las curvas tomamos la envolvente, en este caso coincide con la curva para $n = 1$, y esta es la curva de estabilidad marginal para perturbaciones con $N = 10$.

Para cada N procederiamos de manera análoga. Las gráficas para $N =$

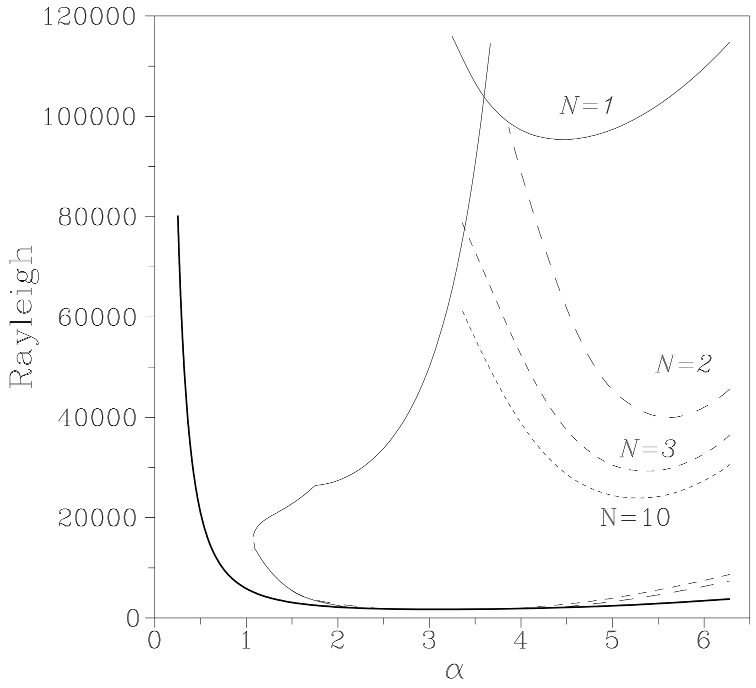

Figura 2:

$1, 2, 3, 10$ estan representadas en la figura 2. La gráfica con trazado grueso representa la primera inestabilidad del flujo conductivo. La curva $N = 1$, o $n = 0$ para cualquier N, en trazado continuo representa las segundas inestabilidades ya estudidas. Las curvas con trazado discontinuo, calculadas a partir del análisis de Eckhaus, junto con la de $N = 1$, si N tendiese a infinito, nos delimitarian la zona donde las parejas de rolls con número de onda fundamental α, o periodicidad a, son estables respecto a cualquier perturbación periodica con periodo múltiple de a.

Fijado el número de onda α, la figura 2 tambien se puede interpretar como:

$N = 1$ nos da la inestabilidad de una pareja de rolls con número de onda fundamental α,

$N = 2$ nos da la inestabilidad de un clonage formado por dos parejas de rolls con número de onda fundamental α,

y así sucesivamente.

Bibliografía

[1] Prat, J., Mercader, I., Massaguer, J.M.: Symmetric large-scale velocity fields in two-dimensional thermal convection. Int. Journal of Bifurcation and

Chaos, **4**, (5), 1369-1374 (1994).

[2] Prat, J., Mercader, I., Massaguer, J.M.: Large-scale flows and resonances in 2-D thermal convection. Phys. Fluids, **7**, (1), 121-134 (1994).