CONOS TANGENTES GENERALIZADOS

J. PERÁN, V. NOVO

Departamento de Matemática Aplicada. Universidad Nacional de Educación a Distancia

Introducción.

La investigación de técnicas de optimización de funciones o funcionales no diferenciables ha dado lugar en los últimos años al desarrollo de diferentes teorías de diferenciación generalizada para distintas clases de funciones (véase por ejemplo [1], [3], [4], [5], [6] y [7]). Estas teorías se pueden abordar bajo aspectos puramente geométricos mediante el estudio de los conos tangentes. En efecto, sea X un espacio vectorial y supongamos definida una cierta noción de cono tangente $\mathrm{T}(K, (a, \mu))$ a un subconjunto K de X× en un punto $(a, \mu) \in$ X×. Se puede entonces definir la derivada generalizada de una función *f* de X en en el punto $a \in$ X como la aplicación $f^{\mathrm{T}}(a,\cdot) :$ X $\rightarrow$ que verifica:

$$epi(f^{\mathrm{T}}(a,\cdot)) = \mathrm{T}(epi(f), (a, f(a)))$$

en donde *epi* denota al epígrafe. Cada noción de cono tangente da lugar a una derivada generalizada diferente.

Existe una gran variedad de conos tangentes (hipertangente, paratingente, contingente, de Ursescu, de Clarke, de Dubovitskij−Miljutin, B−tangente de Treiman, etc), si bien en la mayoría de los casos el cono tangente a un subconjunto K de un espacio vectorial X en un punto *a* se puede obtener como un *límite inferior o superior* (definidos de la forma adecuada) de la multifunción $(x, h) \rightarrow$, con *x* tendiendo a *a* en X y *h* tendiendo a 0 en $^{+}$.

R.T. Rockafellar presenta en [8] por primera vez el cono tangente de Clarke a un subconjunto K de un espacio localmente convexo, en un punto *a*, como el límite inferior de con *x* tendiendo a *a* en K y *h* tendiendo a 0^{+}. Recuérdese que un punto $y \in$ E pertenece al límite inferior en $s \in S$, $\Gamma(t)$, de una multifunción Γ:SE, en donde E y S son espacios topológicos, si la imagen inversa mediante Γ de cualquier entorno de y es un entorno de s [2]. Así mismo, un punto $y \in E$ pertenece al límite superior en $s \in S$, $\Gamma(t)$, de la multifunción Γ:SE si el punto s es adherente a la imagen inversa mediante Γ de cualquier entorno de y.

Rockafellar observa en [8] que la multifunción Δ:SE, $\Delta(s) =$ $\Gamma(t)$ no es, en general, semicontinua inferiormente y añade:

"One´s first reaction to this state of affairs might be to reject the definition of lim inf Γ and try to substitute for it another which does have the lacking property."

En este trabajo se presenta una definición general de los conceptos de límite inferior y superior de multifunciones, que contiene como caso particular a los límites empleados por Rockafellar, habitualmente conocidos como límites de Kuratowski Seguidamente, se enuncian las propiedades generales de los ultralímites definidos, se identifica la topología sobre X_* que da lugar a los límites inferior y superior de Kuratowski y se estudian las características de las topologías sobre X_* que producen límites inferiores semicontinuos inferiormente en el sentido anterior. Finalmente, se propone una definición generalizada de cono tangente.

Conceptos preliminares y notación

Sea X un conjunto arbitrario, 2^X el conjunto de las partes de X y X_* el conjunto de los ultrafiltros sobre X. Para cada $\vartheta \subseteq 2^X$, se definen los conjuntos $\vartheta^{\cdot\cdot} \subseteq 2^X$ y $\vartheta_* \subseteq X_*$ mediante

$$\vartheta^{\cdot\cdot} = \{A \subseteq X \mid A^c \notin \vartheta\} \quad , \quad \vartheta_* = \{\mu \in X_* \mid \vartheta \subseteq \mu\}$$

Se comprueban fácilmente las siguientes propiedades:

$(\vartheta^{\cdot\cdot})^{\cdot\cdot} = \vartheta$

$(\vartheta \cup \zeta)^{\cdot\cdot} = \vartheta^{\cdot\cdot} \cap \zeta^{\cdot\cdot}$

$(\vartheta\cap\zeta)^{\cdot\cdot} = \vartheta^{\cdot\cdot}\cup\zeta^{\cdot\cdot}$

Si ϑ es *extensivo* ($A\in\vartheta$ y $A\subseteq B \Rightarrow B\in\vartheta$) entonces $\vartheta^{\cdot\cdot}$ también lo es.

$(\vartheta\cup\zeta)_* = \vartheta_*\cap\zeta_*$

Si ϑ, $\zeta\subseteq 2^X$ son extensivos, entonces $(\vartheta\cap\zeta)_* = \vartheta_*\cup\zeta_*$

Para cada filtro ϑ y $A\subseteq X$, se considera el conjunto $\vartheta_A=\{B\subseteq X|\ A^c\cup B\in\vartheta\}$. Se comprueba que ϑ_A es un filtro si y sólo si $A^c\notin\vartheta$, pues en otro caso $\vartheta_A= 2^X$. Denotando por Σ al filtro trivial, $\Sigma = \{X\}$, se tiene $\Sigma_A=\{B\subseteq X|\ A\subseteq B\}$ y $(\Sigma_A)_* =\{\mu\in X_*|\ A\in\mu\}$. En particular, $\Sigma_x\in X_*$ para todo $x\in X$.

Si X es un espacio topológico y $x\in X$, entonces $\Omega(x) = \{U\subseteq L|\ x\in int(U)\}$ es el filtro de los entornos del punto x. Se comprueba fácilmente que $(\Omega(x))^{\cdot\cdot} = \{U\subseteq L|\ x\in cl(U)\}$.

Si $\mathbf{A}\subseteq X_*$ entonces $\cup\mathbf{A}$ y $\cap\mathbf{A}$ son los subconjuntos de 2^X dados por

$$\cup\mathbf{A} \equiv \mu = \{A\subseteq X|\ \text{existe un } \mu\in\mathbf{A} \text{ tal que } A\in\mu\}$$

$$\cap\mathbf{A} \equiv \mu = \{A\subseteq X|\ \text{para todo } \mu\in\mathbf{A} \text{ se tiene } A\in\mu\}$$

Obsérvese que para todo $\mathbf{A}\subseteq X_*$ el conjunto $\cap\mathbf{A}$ es un filtro sobre X y $\cup\mathbf{A} = (\cap\mathbf{A})^{\cdot\cdot}$. Además $\vartheta\subseteq 2^X$ es un filtro si y sólo si $\cap(\vartheta_*) = \vartheta$. Por lo tanto, para todo filtro ϑ se verifica que $\cup(\vartheta_*) = \vartheta^{\cdot\cdot}$.

Para cada multifunción F: LX, en donde L es un conjunto arbitrario, se define

F_*: L_*X_* mediante $F_*(\mu) = \{\nu\in X_*|$ para todo $A\in\nu$ se tiene $F^{-1}(A)\in\mu\}$. Se comprueba que

$\cup F_*(\mu) = \{A\subseteq X|\ F^{-1}(A)\in\mu\}$.

Se considera la multifunción π: X_* X, a la que denominaremos *proyección en* X, cuyo dominio es el conjunto de los ultrafiltros principales y tal que $\pi(\Sigma_x) = \{x\}$ para todo $x \in X$. Identificando cada $x \in X$ con el ultrafiltro Σ_x, se puede considerar a X como subconjunto de X_*.

En lo que sigue, las letras α, β, μ y ν representan siempre ultrafiltros, por lo que la expresión "$\vartheta \subseteq \mu$" equivale a "$\mu \in \vartheta_*$".

Topologías sobre X_*.

En lo que sigue, ρ es una familia de subconjuntos de X estable para al intersección finita. Es claro que ρ es una base de topología sobre X y la familia $\{(\Sigma_A)_*\}_{A\in\rho}$ lo es sobre X_*. La topología engendrada sobre X por ρ se denota por $\gamma(\rho)$ y por $\sigma(\rho)$ a la generada sobre X_* por $\{(\Sigma_A)_*\}_{A\in\rho}$.

Entre las topologías sobre X_* es especialmente importante la de Stone $\sigma(2^X)$, generada por la base de abiertos $\{(\Sigma_A)_*\}_{A\subseteq X}$. Los elementos de esta familia resultan ser los únicos subconjuntos abiertos−cerrados de $\sigma(2^X)$. El espacio $(X_*,\sigma(2^X))$ es Hausdorff, *compacto* y extremalmente inconexo (la clausura de cualquier abierto es también un abierto), lo que implica que es totalmente inconexo (los únicos subconjuntos conexos son el vacío y los unitarios) y cero−dimensional (posee una base formada por subconjuntos que son abiertos y cerrados al mismo tiempo). Los cerrados de $\sigma(2^X)$ son los conjuntos de la forma ϑ_* para un cierto filtro ϑ sobre X. La clausura $\mathbf{cl_S}(\mathbf{A})$ de un $\mathbf{A}\subseteq X_*$ respecto de la topología de Stone es el conjunto $(\cap\mathbf{A})_*$. Por lo tanto X (más exactamente $\pi^{-1}(X)$) es denso en X_* y la topología inducida en X por $\sigma(2^X)$ es, obviamente, la discreta.

La topología de Stone es la más fina de la familia de topologías $\{\sigma(\rho)\}$. Obsérvese que $\sigma(\rho)\subseteq\sigma(\gamma(\rho))$, pero en general, *no* tienen porqué coincidir estas topologías sobre X_*. No obstante, tanto $\sigma(\rho)$ como $\sigma(\gamma(\rho))$ inducen en X la misma topología $\gamma(\rho)$, esto es,

$$\pi(\sigma(\rho)) = \pi(\sigma(\gamma(\rho))) = \gamma(\rho)$$

1. Proposición. Si $\mathbf{A}\subseteq X_*$, su clausura en $(X_*, \sigma(\rho))$ es **cl**($\mathbf{A}$) = {μ∈ X*| μ€∩€ρ€$\mathbf{A}$}∪

Demostración. Por una parte

$$\mu\in \mathbf{cl}(\mathbf{A}) \Leftrightarrow \text{para todo } B\in\rho, \text{ tal que } \mu\in(\Sigma_B)_* \text{ se tiene } (\Sigma_B)_*\cap\mathbf{A}\neq\emptyset$$

Ahora bien, claramente

$$\mu\in(\Sigma_B)_* \Leftrightarrow B\in\mu$$

(Σ_B)*∩$\mathbf{A}$≠∅€⇔existe un μ∈ $\mathbf{A}$ tal que B∈μ ⇔ B∈(∪$\mathbf{A}$).

en consecuencia

μ∈ **cl**($\mathbf{A}$) ⇔ para todo B∈μ€∩€ρ€tiene B∈(€∪$\mathbf{A}$) ⇔ μ€∩€ρ€$\mathbf{A}$)

Límites superiores e inferiores generalizados

Paul Painlevé propuso por primera vez en 1909 la definición de los límites superior e inferior de una sucesión de conjuntos de un espacio topológico X. F. Haussdorf se refiere a ellos como límites inferior y superior cerrados, para distinguirlos de los límites inferior y superior de la teoría de conjuntos (respectivamente 1 1A_{n+k}, 1 1A_{n+k}). Posteriormente la definición se extiende de forma natural para redes de 2^X y para multifunciones entre espacios topológicos. Una presentación de estos límites, habitualmente conocidos como de Kuratowski, que engloba los tres casos antes citados aparece en [2]. Se expone seguidamente una versión de esta definición utilizando la notación de las multifunciones ([2] se refiere a familias arbitrarias de subconjuntos de X). Sea L un conjunto arbitrario, X un espacio topológico, F: L1X una multifunción (esto es, una familia de partes de X indicada en L) y ϑ un filtro sobre L. Entonces

El límite inferior del par (F, ϑ) es el conjunto de los puntos $x\in X$ tales que para cualquier entorno U de x se tiene $F^{-1}(U)\in\vartheta$.