EL MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN, APLICADO A LAS RAÍCES DE POLINOMIOS

1.-Planteamiento de la serie que aproxima la raíz para polinomios de la clase $x^m + bx + c$

1.- Introducción

El introducir previamente el estudio de esta clase de polinomios se debe a dos razones: en primer lugar permite una presentación más sencilla y, además, su estructura hace de ellos la "unidad" generalizable del método.

Sea la ecuación:

(1) $$x^m + bx + c \;;\; \text{con } b \neq 0$$

Sea r una raíz de la misma. Satisface:

(2) $$r = -\frac{c}{b} - \frac{1}{b} r^m .$$

Representamos r mediante la serie:

(3) $$r = \sum_{n=0}^{\infty} X_n ,$$

sustituyendo (3) en (2):

(4) $$r = -\frac{c}{b} - \frac{1}{b} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} X_n \right)^m .$$

Realizamos la reorganización de la serie (3):

(5) $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} X_n \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \;;$$

con

(6) $$A_n = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=n}^{\infty} X_{i_1} \cdot X_{i_2} \cdot \ldots \cdot X_{i_m} \quad .$$

(4) queda de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n = -\frac{c}{b} - \frac{1}{b} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

Igualamos los sumandos de ambas series, de la forma

(7)
$$X_0 = -\frac{c}{b}$$
$$X_1 = -\frac{1}{b} \cdot A_0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$X_n = -\frac{1}{b} A_{n-1}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

<u>2.- Proposición</u>

El término general de la serie (3), X_n , puede representarse de la forma:

(8)
$$X_n = a_n^m \cdot \frac{c^{(m-1)\cdot n+1}}{(-b)^{m\cdot n+1}}$$

siendo:

(9)
$$a_n^m = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=n-1} a_{i_1}^m \cdot a_{i_2}^m \cdot \ldots \cdot a_{i_m}^m, \quad \text{con } a_0^m = 1,$$

y m el grado de la ecuación (1), m ≥ 2. Por tanto la serie (3) queda

(10)
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^m \cdot \frac{c^{(m-1)\cdot n+1}}{(-b)^{m\cdot n+1}}$$

<u>3.-Lema</u>

Sea m ≥ 2, fijo, el grado de la ecuación polinómica (1). Sea a_n^m, según se definió en (9). Entonces ∀ n

(11)
$$a_n^m = \frac{1}{((m-1)n+1)} \binom{m\,n}{n}$$

2.- Estudio de la convergencia para la misma clase de polinomios

<u>4.- Proposición</u>

La serie (10), asociada a la ecuación (1) converge absolutamente, si y sólo si,

(12)
$$\frac{|c|^{m-1}}{|b|^m} \leq \frac{(m-1)^{m-1}}{m^n},$$

donde m es el grado de dicha ecuación.

5.- Teorema

Si se cumple (12), la serie (10) converge a la raíz de la ecuación (1), de menor valor absoluto.

3.- Valoración del error de aproximación

6.- Lema

Sea, como es habitual, m, el grado del polinomio (1). Sea a_n^m según se definió en (9) y (11). Entonces

$$a_n^m < \left(\frac{m^m}{(m-1)^{m-1}} \right)^{n-1} \quad \forall n \geq 1 \tag{13}$$

7.- Teorema

Sea la aproximación n-ésima a la raíz *r*, de la ecuación (1), según la serie (10):

$$r_n = \sum_{k=0}^{n} X_k . \tag{14}$$

Entonces si se cumple la condición de convergencia (12), el error n-ésimo de aproximación: E_n, viene acotado por:

$$E_n = |r - r_n| \leq \frac{m-1}{m} \cdot \frac{|c|}{|b|} \frac{R^{n+1}}{1-R}, \tag{15}$$

siendo

$$R = \frac{m^m \cdot |c|^{m-1}}{(m-1)^{m-1} \cdot |b|^m}$$

4.- Generalización del método a polinomios cualesquiera

8.- Definiciones previas

Sea el polinomio de grado *m*:

(16) $z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ ... \ + \ a_1 z + a_0$. Sea la sucesión recurrente:

$$(17)\qquad \begin{aligned} c(0, \ldots, 0) &= 1 \text{ y} \\ c(i_1,\ldots, i_{m-1}) &= A_1(i_1 - 1, i_2, \ldots, i_{m-1}) + \ldots \\ &\quad + A_k(i_1, \ldots, i_k - 1, \ldots, i_{m-1}) + \ldots \\ &\quad + A_{m-1}(i_1, \ldots, i_{m-1} - 1) \end{aligned}$$

con $i_1 + \ldots + i_{m-1} = n$, enteros no negativos, donde

$$A_1(i_1 - 1, i_2, \ldots, i_{m-1}) = \begin{cases} 0, \text{ si } i_1 = 0 \\ \displaystyle\sum_{\substack{i_1^1 + i_1^2 = i_1 - 1 \\ \cdots\cdots \\ i_{m-1}^1 + i_{m-1}^2 = i_{m-1}}} c(i_1^1, \ldots, i_{m-1}^1)c(i_1^2, \ldots, i_{m-1}^2) \text{ si } i_1 \neq 0 \end{cases},$$

$$A_2(i_1, i_2 - 1, \ldots, i_{m-1}) = \begin{cases} 0, \text{ si } i_2 = 0 \\ \displaystyle\sum_{\substack{i_1^1 + i_1^2 + i_1^3 = i_1 \\ i_2^1 + i_2^2 + i_2^3 = i_2 - 1 \\ \cdots\cdots \\ i_{m-1}^1 + i_{m-1}^2 + i_{m-1}^3 = i_{m-1}}} c(i_1^1, \ldots, i_{m-1}^1)c(i_1^2, \ldots, i_{m-1}^2)c(i_1^3, \ldots, i_{m-1}^3) \text{ si } i_2 \neq 0 \end{cases},$$

. . . .

$$A_k(i_1, \ldots, i_k - 1, \ldots, i_{m-1}) = \begin{cases} 0, \text{ si } i_k = 0 \\ \displaystyle\sum_{\substack{i_1^1 + \ldots + i_1^{k+1} = i_1 \\ \cdots\cdots \\ i_2^1 + \ldots + i_2^{k+1} = i_k - 1 \\ \cdots\cdots \\ i_{m-1}^1 + \ldots + i_{m-1}^{k+1} = i_{m-1}}} c(i_1^1, \ldots, i_{m-1}^1)\ldots c(i_1^{k+1}, \ldots, i_{m-1}^{k+1}) \text{ si } i_k \neq 0 \end{cases},$$

con k = 3, ..., m-1. Obsérvese que

$$(18)\qquad \begin{aligned} &c(i_1, i_2, \ldots, i_k, 0, \ldots, 0) = c(i_1, i_2, \ldots, i_k) \text{ y} \\ &c(0, \ldots, n, 0, \ldots, 0) = a_n^p \end{aligned}$$

con $i_1 + i_2 + \ldots + i_k = n$, a_n^p los coeficientes definidos en (9) y (11), y p el número de orden que ocupa n en la (m-1)-upla.

9.- Lema

$\forall i_1, \ldots, i_{m-1} \geq 0$, enteros, con $i_1 + \ldots + i_{m-1} = n$, se cumple

$$(19)\qquad c(i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}) = \frac{(2i_1 + 3i_2 + \ \ldots\ + mi_{m-1})!}{i_1!i_2! \ldots i_{m-1}!(i_1 + 2i_2 + \ \ldots\ + (m-1)i_{m-1} + 1)!}$$

$$(20)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{3{,}75}\frac{1}{n}3{,}75^n \leq a_n^2 \frac{n!}{i_1!i_2!\ldots i_{m-1}!} \leq c(i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}) \leq \\ &a_n^m \frac{n!}{i_1!i_2!\ldots i_{m-1}!} \leq \frac{m-1}{m}\frac{1}{n}\left(\frac{m^m}{(m-1)^{m-1}}\right)^n \frac{n!}{i_1!i_2!\ldots i_{m-1}!}, \end{aligned}$$

donde a_n^m son los coeficientes definidos en (9) y en (18) y m es el grado de la ecuación polinómica (16)

10.-Teorema

Sea la ecuación polinómica (16)

$$z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0\ ,\ \ a_1 \neq 0,\ \text{ tal que:}$$

$$(21)\quad \frac{|a_2||a_0|}{|a_1|^2} + \frac{|a_3||a_0|^2}{|a_1|^3} + \bullet\bullet\bullet + \frac{|a_{m-1}||a_0|^{m-2}}{|a_1|^{m-1}} + \frac{|a_0|^{m-1}}{|a_1|^m} \leq \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m},$$

entonces la serie

$$(22) - \frac{a_0}{a_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1+i_2+\ldots i_{m-1}=n} c(i_1, \ldots, i_{m-1}) \left(\frac{a_0 a_2}{a_1^2}\right)^{i_1} \left(\frac{a_0^2 a_3}{(-a_1)^3}\right)^{i_2} \cdots \left(\frac{a_0^{m-2} a_{m-1}}{(-a_1)^{m-1}}\right)^{i_{m-2}} \left(\frac{a_0^{m-1}}{(-a_1)^m}\right)^{i_{m-1}}$$

converge a la raíz de menor valor absoluto de la ecuación polinómica (16).

11.- Teorema

La ecuación polinómica (16), con coeficientes reales, y raíces simples. Entonces tiene raíces reales, si, y sólo si, ∃ una translación: z = z' - u, tal que la serie (22), asociada al nuevo polinomio trasladado, cumple la acotación de convergencia (21)

Comentario: este teorema permite calcular el resto de las raíces reales, si existen, mediante la elección de translaciones adecuadas para el polinomio dado. Ver ejemplo.

12.-Teorema

Sea la ecuación polinómica (16), cuya serie asociada (22) satisface la condición de convergencia (21), con la desigualdad estricta. Sea

$$\mathrm{R} = \frac{m^m}{(m-1)^{m-1}} \left(\frac{|a_2||a_0|}{|a_1|^2} + \frac{|a_3||a_0|^2}{|a_1|^3} + \ldots + \frac{|a_{m-1}||a_0|^{m-2}}{|a_1|^{m-1}} + \frac{|a_0|^{m-1}}{|a_1|^m} \right),$$

Entonces una cota para el error de la aproximación n-ésima R_n, de la raíz r de la ecuación (16), viene dada por

(23) $$E_n = \frac{(m-1)}{m} \frac{|a_0|}{|a_1|} \frac{R^{n+1}}{1-R}$$

Comentario: Obsérvese que el error depende de lo "próxima" al origen que esté la raíz y de lo "pequeña" que sea la constante R, por consiguiente la rapidez de convergencia se puede mejorar notablemente, "acercando" la raíz al origen mediante estudiadas translaciones. Ver ejemplo.

5.-Ejemplo numérico

Calcular las 3 raíces reales de la ecuación

$$x^3 + x^2 - 10\,x + 1 = 0$$

con un error $E = 0{,}0000000000001$.

Este ejemplo ha sido resulto computacionalmente , siguiendo el algoritmo propuesto en mi tesis doctoral, en él se mejora la convergencia siguiendo los *comentarios* anteriores. Los resultados son los siguientes:

TABLA 1

Sumas parciales	Aproximaciones	Raíz con 12 decimales exactos
R_1	-3,743017864183	-3,743017747195
R_2	-3,743017748040	
R_3	-3,743017747202	
R_4	-3,743017747195	conseguido

vector traslación utilizado u = -3,75

TABLA 2

Sumas parciales	Aproximaciones	Raíz con 12 decimales exactos
R_1	0,101126064417	0,101126064468
R_2	0,101126064468	conseguido

TABLA 3

Sumas parciales	Aproximaciones	Raíz con 12 decimales exactos
R_1	2,641891684535	2,641891682727
R_2	2,641891682730	2,641891682727

R_3	2,641891682727	conseguido