Un acoplamiento de elementos de contorno con elementos finitos mixtos.

Salim Meddahi, Pablo Pérez

Departamento de Matemáticas, Universidad de Oviedo,
Avda. Calvo Sotelo s/n, 33007 – Oviedo.
e-mail: `salim@orion.ccu.uniovi.es`

Resumen

Presentamos un método numérico para resolver un problema exterior de Dirichlet en el plano. Consiste en acoplar el método de elementos de contorno (MEC) con el método de los elementos finitos (MEF) mixtos. Para ello, es preciso considerar una frontera artificial que separe una región acotada de otra no acotada. A partir de la representación integral de la solución en el dominio exterior, deducimos dos ecuaciones integrales que relacionan la solución y su derivada normal sobre la frontera artificial. Estas ecuaciones integrales se incorporan a la denominada formulación mixta del problema en la región interior, y luego se utiliza un método de elementos finitos para aproximar el problema variacional resultante.

Palabras claves: problema exterior de contorno; formulación variacional mixta; elementos finitos mixtos de Raviart-Thomas; método de elementos de contorno.

1 Introducción

El acoplamiento del método de elementos de contorno con el método de los elementos finitos suele realizarse del modo siguiente. En primer lugar, se divide el dominio en dos regiones, una de ellas acotada, divididas por una frontera auxiliar. A continuación, se transforma el problema en otro equivalente sobre la región acotada. Esto se puede llevar a cabo de varias formas ([9, 14, 8, 15, 13]). En los trabajos de Brezzi y Johnson [2] y de Johnson y Nedelec [15], que parecen ser los primeros en justificar teóricamente este tipo de acoplamientos, la aproximación está basada en una representación integral de la solución en la región no acotada deducida del Teorema de Green. El método que se usa en este trabajo sigue básicamente los artículos de Costabel [8] y Han [14]. Ambas aproximaciones consisten en aadir una ecuación integral para la derivada normal. Demostramos que este método también es apropiado para el acoplamiento de MEC y MEF.

En la primera sección, utilizamos la denominada formulación mixta (ver [18, 5]) en la región interior, y luego incorporamos dos ecuaciones integrales a esta formulación mediante las condiciones sobre la intercara que definen el acoplamiento de los problemas interior y exterior. En la sección 2, probamos que la formulación variacional resultante está bien puesta, para lo cual nos servimos de la teoría general de Brezzi [1]. En la sección 3, usamos los elementos de Raviart-Thomas para la variable flujo, [18]. Demostramos que el problema discreto correspondiente tiene una solución única y encontramos estimaciones para el error y resultados sobre la convergencia.

En este artículo, C denotará una constante positiva, y resaltaremos con letra negrita minúscula las funciones vectoriales. Para cada número real s, $H^s(\triangle)$ es el clásico espacio de Sobolev hilbertiano, cuya seminorma escribimos $|\cdot|_{s,\triangle}$. Aquí, $\triangle$ puede ser un dominio de Lipschitz de $\mathbb{R}^2$ o la frontera de un dominio de ese tipo. Si $s \geq 0$, $H^s(\triangle)/\mathbb{R}$ es el espacio cociente cuyos elementos son funciones de $H^s(\triangle)$ definidas salvo una constante aditiva. Con la norma $\|u\|_{H^s(\triangle)/\mathbb{R}} = \inf_{c\in\mathbb{R}} \|u+c\|_{s,\triangle}$ este espacio es de Hilbert.

2 El problema modelo y su formulacion variacional

Sea Ω un dominio acotado y simplemente conexo de $\mathbb{R}^2$ con frontera Lipschitz Γ, y denotemos Ω^c al complementario de $\Omega \cup \Gamma$ en $\mathbb{R}^2$. Consideremos el problema exterior de Dirichlet siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f & \text{en } \Omega^c \\ u & = & 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{array} \right. \tag{1}$$

con las condiciones asintóticas en el infinito

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u(x) & = & \alpha + O(\frac{1}{\|x\|}), & \|x\| \to +\infty \\ \mathbf{grad} u(x) & = & O(\frac{1}{\|x\|^2}), & \|x\| \to +\infty, \end{array} \right. \tag{2}$$

donde f es una funcion de $L^2(\Omega^c)$ con soporte acotado y α es una constante.

Ahora, consideremos una curva Γ_2 que divide Ω^c en una parte no acotada Ω_2 y una parte acotada Ω_1 que contiene al soporte de f. Entonces (1) se puede formular de forma equivalente así:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u_1 & = & f & \text{en } \Omega_1 \\ -\Delta u_2 & = & 0 & \text{en } \Omega_2 \\ u_1 & = & 0 & \text{sobre } \Gamma \\ u_1 & = & u_2 & \text{sobre } \Gamma_2 \\ \partial u_1/\partial \nu & = & \partial u_2/\partial \nu & \text{sobre } \Gamma_2, \end{array} \right. \tag{3}$$

donde $\Gamma_2 = \partial\Omega_2$, $u_1 = u|_{\Omega_1}$, $u_2 = u|_{\Omega_2}$, y $\partial v/\partial\nu$ denota la derivada de v respecto al vector normal ν dirigido desde Ω_1 hacia Ω_2.

La variable flujo

$$\mathbf{p} = \mathbf{grad} u_1 \quad \text{in } \Omega_1 \tag{4}$$

tiene interés en muchos problemas físicos. Aquí la aproximaremos directamente. Para ello, introducimos el espacio $H(\mathrm{div}, \Omega_1)$ de funciones $\mathbf{q}$ de $(L^2(\Omega_1))^2$ tales que $\mathrm{div}\,\mathbf{q}$ (en el sentido de las distribuciones) es una función de $L^2(\Omega_1)$. Este espacio dotado de la norma

$$\|\mathbf{q}\|^2_{H(\mathrm{div},\Omega_1)} = \|\mathbf{q}\|^2_{0,\Omega_1} + \|\operatorname{div}\mathbf{q}\|^2_{0,\Omega_1}$$

es un espacio de Hilbert. Además, disponemos del teorema de trazas siguiente, cf. [18].

Lema 2.1 *La aplicación* $\mathbf{q} \longrightarrow \mathbf{q}\cdot\nu|_{\Gamma_2}$ *definida en principio de* $(H^1(\Omega_1))^2$ *en* $L^2(\Gamma_2)$ *puede extenderse a una aplicación lineal continua de* $H(\mathrm{div},\Omega_1)$ *en* $H^{-1/2}(\Gamma_2)$.

Si denotamos el producto de dualidad de $H^{-1/2}(\Gamma_2)\times H^{1/2}(\Gamma_2)$ mediante $<\cdot,\cdot>$, resulta que

$$W = \{\mathbf{q}\in H(\mathrm{div},\Omega_1);\ <\mathbf{q}\cdot\nu, 1> = 0\}$$

es un subespacio cerrado de $H(\mathrm{div},\Omega_1)$.

Podemos multiplicar (4) por una función $\mathbf{q}\in W$ y aplicar el teorema de la divergencia en Ω_1, y obtenemos

$$\int_{\Omega_1}\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\,dx + \int_{\Omega_1} u_1\operatorname{div}\mathbf{q}\,dx - \int_{\Gamma_2} u_1\mathbf{q}\cdot\nu\,ds = 0 \quad \forall\mathbf{q}\in W. \tag{5}$$

Usando (4), la primera ecuación en (3) es

$$\operatorname{div}\mathbf{p} = -f,$$

o equivalentemente

$$\int_{\Omega_1}\operatorname{div}\mathbf{p}v\,dx = -\int_{\Omega_1} f v\,dx \quad \forall v\in L^2(\Omega_1). \tag{6}$$

Para el problema en Ω_2, aplicamos la identidad de Green a u_2 y a la solución fundamental del Laplaciano bidimensional, $E(x,y) = \frac{-1}{2\pi}\log\|x-y\|$. Teniendo en cuenta el comportamiento asintótico (2), podemos escribir

$$u_2(x) = \int_{\Gamma_2}\frac{\partial E(x,y)}{\partial\nu(y)}u_2(y)\,ds_y - \int_{\Gamma_2}E(x,y)\frac{\partial u_2}{\partial\nu}\,ds_y + \alpha \qquad \forall x\in\Omega_2, \tag{7}$$

Las propiedades de salto de los potenciales de capa permiten llegar a las ecuaciones integrales siguientes sobre Γ_2 (ver [7])

$$u_2 = (\frac{id}{2} + K)u_2 - V\frac{\partial u_2}{\partial\nu} + \alpha \tag{8}$$

y

$$\frac{\partial u_2}{\partial\nu} = -Du_2 + (\frac{id}{2} - K')\frac{\partial u_2}{\partial\nu}, \tag{9}$$

donde los operadores V, K, K' y D se definen formalmente mediante

$$\begin{aligned}
(V\xi)(x) &= \int_{\Gamma_2}E(x,y)\xi(y)\,ds_y, & (K\xi)(x) &= \int_{\Gamma_2}\frac{\partial E(x,y)}{\partial\nu(y)}\xi(y)\,ds_y\\
(K'\xi)(x) &= \int_{\Gamma_2}\frac{\partial E(x,y)}{\partial\nu(x)}\xi(y)\,ds_y, & (D\xi)(x) &= -\frac{\partial}{\partial\nu(x)}\int_{\Gamma_2}\frac{\partial E(x,y)}{\partial\nu(y)}\xi(y)\,ds_y.
\end{aligned}$$

Se denominan operador de simple capa, de doble capa, adjunto del de doble capa e hipersingular, respectivamente.

A continuación, comentamos brevemente algunas propiedades de estos operadores, cuando están definidos sobre ciertos espacios de Sobolev. Comenzamos considerando el subespacio cerrado de $H^{-1/2}(\Gamma_2)$ dado por

$$H_0^{-1/2}(\Gamma_2) = \{\xi \in H^{-1/2}(\Gamma_2),\ <\xi, 1>= 0\}.$$

El lema siguiente está demostrado en [7, 10].

Lema 2.2 *Sea Γ_2 una frontera de Lipschitz. Los operadores*

$$\begin{aligned} V:\ H^{-1/2}(\Gamma_2) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma_2), \quad & K:\ H^{1/2}(\Gamma_2) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma_2) \\ K':\ H^{-1/2}(\Gamma_2) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma_2), \quad & D:\ H^{1/2}(\Gamma_2) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma_2), \end{aligned}$$

son continuos. Además, el operador V es $H_0^{-1/2}(\Gamma_2)$-elíptico, es decir, existe una constante $\alpha_1 > 0$ tal que

$$< V\xi, \xi > \geq \alpha_1 \|\xi\|^2_{-1/2,\Gamma_2} \quad \forall \xi \in H_0^{-1/2}(\Gamma_2),$$

y el operador D es $H^{1/2}(\Gamma_2)/\mathbb{R}$-elíptico, esto es, existe $\alpha_2 > 0$ tal que

$$< D\mu, \mu > \geq \alpha_2 \|\mu\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_2)/\mathbb{R}} \quad \forall \mu \in H^{1/2}(\Gamma_2)/\mathbb{R}.$$

Si queremos escribir la formulación variacional global de (3), sustituimos (8) en (5) y usamos la función g para denotar el valor común de u_1 y u_2 sobre Γ_2. Obtenemos

$$\int_{\Omega_1} \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\, dx + < V\mathbf{p}\cdot\nu, \mathbf{q}\cdot\nu > + \int_{\Omega_1} u_1 \operatorname{div}\mathbf{q}\, dx - < (\frac{id}{2} + K)g + c, \mathbf{q}\cdot\nu > = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in W. \tag{10}$$

Ahora, multiplicamos formalmente la ecuación (9) por una función test $\mu \in H^{1/2}(\Gamma_2)/\mathbb{R}$ e integramos sobre Γ_2, con lo que llegamos a

$$- < Dg, \mu > - < (\frac{id}{2} + K')\mathbf{p}\cdot\nu, \mu > = 0 \quad \forall \mu \in H^{1/2}(\Gamma_2)/\mathbb{R}. \tag{11}$$

El comportamiento asintótico (2), junto con la ecuación (7), obligan a que

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial u_1}{\partial \nu}\, ds = \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u_2}{\partial \nu}\, ds = 0,$$

puesto que de no ser así, $u_2(x)$ se comportaría como $c \log \|x\|$, con $c \neq 0$, cuando $\|x\| \to +\infty$. En consecuencia, deducimos que el vector incógnita $\mathbf{p}$ pertenece al espacio de Hilbert W.

Por otra parte,

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu(y)}\, ds_y = \theta_x,$$

donde θ_x es el ángulo definido por las rectas tangentes a la curva Γ_2 en el punto x. Por lo tanto, deducimos que las ecuaciones (10) y (11) son independientes de los elementos g and μ elegidos como representantes de las clases de equivalencia $\dot{g}$ y $\dot{\mu}$ de $H^{1/2}(\Gamma_2)/\mathbb{R}$.

Las equaciones (10), (11) y (6) conducen a la formulación débil

$$\begin{cases} \text{Encontrar } \mathbf{p} \in W,\ g \in H^{1/2}(\Gamma_2)/\mathbb{R},\ u_1 \in L^2(\Omega_1); \\ \int_{\Omega_1} \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\,dx + < V\mathbf{p}\cdot\nu, \mathbf{q}\cdot\nu > + \int_{\Omega_1} u_1 \operatorname{div}\mathbf{q}\,dx - < (\frac{id}{2}+K)g, \mathbf{q}\cdot\nu > = 0 \quad \forall \mathbf{q}\in W \\ - < (\frac{id}{2}+K')\mathbf{p}\cdot\nu, \mu > - < Dg, \mu > = 0 \quad \forall \mu \in H^{1/2}(\Gamma_2)/\mathbb{R} \\ \int_{\Omega_1} \operatorname{div}\mathbf{p} v\,dx = -\int_{\Omega_1} fv\,dx \quad \forall v \in L^2(\Omega_1). \end{cases} \tag{12}$$

3 Existencia y unicidad

Denotemos $Q = W \times (H^{1/2}(\Gamma_2)/\mathbb{R})$. Introducimos la forma bilineal continua $a(\cdot,\cdot)$ sobre $Q \times Q$ definida por

$$\begin{aligned} a((\mathbf{p},g),(\mathbf{q},\mu)) &= \int_{\Omega_1} \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\,dx + < V\mathbf{p}\cdot\nu, \mathbf{q}\cdot\nu > + < Dg, \mu > \\ &\quad - < (\tfrac{id}{2}+K)g, \mathbf{q}\cdot\nu > + < (\tfrac{id}{2}+K')\mathbf{p}\cdot\nu, \mu > \end{aligned}$$

y la forma bilineal continua $b(\cdot,\cdot)$ sobre $Q \times L^2(\Omega_1)$

$$b((\mathbf{q},\mu),v) = \int_{\Omega_1} \operatorname{div}\mathbf{q} v\,dx.$$

Consideremos el subespacio cerrado de W dado por

$$V = \{\mathbf{q} \in W;\ \operatorname{div}\mathbf{q} = 0 \text{ en } \Omega_1\}.$$

Es fácil demostrar que $Q_0 = V \times (H^{1/2}(\Gamma_2)/\mathbb{R})$ es el núcleo de la aplicación lineal y continua

$$B:\ Q \longrightarrow L^2(\Omega_1)$$

con

$$\int_{\Omega_1} B(\mathbf{q},\mu)v\,dx = b((\mathbf{q},\mu),v) \quad \forall(\mathbf{q},\mu)\in Q,\ \forall v \in L^2(\Omega_1).$$

Utilizando esta notación, el problema (12) se reduce a

$$\begin{cases} \text{Encontrar } (\mathbf{p},g)\in Q,\ u_1 \in L^2(\Omega_1); \\ a((\mathbf{p},g),(\mathbf{q},\mu)) + b((\mathbf{q},\mu),u_1) = 0 \quad \forall(\mathbf{q},\mu)\in Q \\ b((\mathbf{p},g),v) = -\int_{\Omega_1} fv\,dx \quad \forall v \in L^2(\Omega_1). \end{cases} \tag{13}$$

Este problema variacional es del tipo del problema de punto de silla de Brezzi, ver [1]. En este tipo de problemas, las condiciones para que exista una única solución se pueden resumir en el teorema que mencionamos a continuación.

Teorema 3.1 *Supongamos que se verifican las hipótesis siguientes:*

(i) Existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$a((\mathbf{q},\mu),(\mathbf{q},\mu)) \geq \alpha \|(\mathbf{q},\mu)\|_Q^2 \quad \forall (\mathbf{q},\mu) \in Q_0.$$

(ii) Existe una constante $\beta > 0$ such that

$$\sup_{(\mathbf{q},\mu)\in Q} \frac{b((\mathbf{q},\mu),v)}{\|(\mathbf{q},\mu)\|_Q} \geq \beta \|v\|_{0,\Omega_1} \quad \forall v \in L^2(\Omega_1).$$

Entonces el problema (13) tiene una única solución.

En nuestro caso, la condición (i) se comprueba de forma muy sencilla. Tenemos

$$\begin{aligned} a((\mathbf{q},\mu),(\mathbf{q},\mu)) &= \|\mathbf{q}\|_{0,\Omega_1}^2 + < V\mathbf{q}\cdot\nu, \mathbf{q}\cdot\nu > + < D\mu, \mu > \\ &\quad - < (\tfrac{id}{2} + K)\mu, \mathbf{q}\cdot\nu > + < (\tfrac{id}{2} + K')\mathbf{q}\cdot\nu, \mu >, \end{aligned}$$

y puesto que K y K' son operadores adjuntos

$$a((\mathbf{q},\mu),(\mathbf{q},\mu)) = \|\mathbf{q}\|_{0,\Omega_1}^2 + < V\mathbf{q}\cdot\nu, \mathbf{q}\cdot\nu > + < D\mu, \mu > .$$

Ahora, por el lema 2.2 y el hecho de que $\|\mathbf{q}\|_{0,\Omega_1}^2$ es la norma inducida por W sobre V

$$a((\mathbf{q},\mu),(\mathbf{q},\mu)) \geq \alpha \|(\mathbf{q},\mu)\|_Q^2 \quad \forall (\mathbf{q},\mu) \in Q_0,$$

con $\alpha = \min(1, \alpha_2)$.

Falta demostrar que se satisface la condición inf-sup (ii).

Lema 3.1 *Para cualquier elemento $v \in L^2(\Omega_1)$ prefijado, existe un par $(\mathbf{q}_v, \mu_v) \in Q$ tal que*

$$b((\mathbf{q}_v,\mu_v),v) = \|v\|_{0,\Omega_1}^2 \tag{14}$$

y

$$\|(\mathbf{q}_v,\mu_v)\|_Q \leq C \, \|v\|_{0,\Omega_1}, \tag{15}$$

para alguna constante positiva C.

Una vez que se haya demostrado este lema, podemos deducir la condición (ii):

$$\sup_{(\mathbf{q},\mu)\in Q} \frac{b((\mathbf{q},\mu),v)}{\|(\mathbf{q},\mu)\|_Q} \geq \frac{b((\mathbf{q}_v,\mu_v),v)}{\|(\mathbf{q}_v,\mu_v)\|_Q} = \frac{\|v\|_{0,\Omega_1}^2}{\|(\mathbf{q}_v,\mu_v)\|_Q} \geq \frac{1}{C}\|v\|_{0,\Omega_1}.$$

Demostración del Lema 3.1. Denotemos $\mathcal{O}$ al dominio abierto $\Omega_1 \cup \Gamma \cup \Omega$. Elijamos un elemento v de $L^2(\Omega_1)$, y denotemos v^{ext} a la extensión de v a $\mathcal{O}$ por 0. Consideremos ahora la función

$$v^* = v^{ext} - \frac{\int_{\mathcal{O}} v^{ext}\, dx}{med(\Omega)}\, 1_\Omega(x),$$

donde $1_\Omega(x)$ es la función indicatriz del dominio Ω. Observemos que $v^* \in L^2(\mathcal{O})$, $\int_{\mathcal{O}} v^*\,dx = 0$ y $v^*|_{\Omega_1} = v$. Más aún, es fácil comprobar que

$$\|v^*\|_{0,\mathcal{O}}^2 \leq \frac{med(\mathcal{O})}{med(\Omega)}\|v\|_{0,\Omega_1}^2.$$

Introducimos el problema auxiliar definido sobre $\mathcal{O}$

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta\Omega & = & -v^* & \text{en } \mathcal{O} \\ \frac{\partial\Omega}{\partial\nu} & = & 0 & \text{sobre } \Gamma_2. \end{array}\right. \tag{16}$$

Este problema de Neumann tiene una única solución ω en $H^1(\mathcal{O})/\mathbb{R}$. Tomemos

$$\mathbf{q}_v = (\mathbf{grad}\omega)|_{\Omega_1},$$

y puesto que la forma bilineal $b(\cdot,\cdot)$ es independiente de μ, podemos elegir

$$\mu_v = 0.$$

Observemos que

$$\operatorname{div}\mathbf{q}_v = (\Delta\omega)|_{\Omega_1} = v^*|_{\Omega_1} = v$$

y

$$\mathbf{q}_v \cdot \nu|_{\Gamma_2} = \frac{\partial\omega}{\partial\nu}|_{\Gamma_2} = 0.$$

Entonces $\mathbf{q}_v$ pertenece a W y

$$b((\mathbf{q}_v,\mu_v),v) = \|v\|_{0,\Omega_1}^2.$$

Únicamente resta probar la desigualdad (15). La formulación débil de (16) permite escribir

$$\begin{array}{rcl} |\omega|_{1,\mathcal{O}}^2 & = & -\int_{\mathcal{O}} v^*\omega\,dx \leq \|v^*\|_{0,\mathcal{O}}\|\omega\|_{0,\mathcal{O}} \\ & \leq & \|v^*\|_{0,\mathcal{O}}\|\omega\|_{1,\mathcal{O}} \leq C\|v^*\|_{0,\mathcal{O}}|\omega|_{1,\mathcal{O}}, \end{array}$$

puesto que las normas

$$\omega \longmapsto \|\omega\|_{1,\mathcal{O}}$$

y

$$\omega \longmapsto |\omega|_{1,\mathcal{O}}$$

son equivalentes sobre $H^1(\mathcal{O})/\mathbb{R}$. Por lo tanto

$$\|\mathbf{q}_v\|_{0,\Omega_1} \leq |\omega|_{1,\mathcal{O}} \leq C\,\|v^*\|_{0,\mathcal{O}} \leq C\,\|v\|_{0,\Omega_1}.\square$$

4 El problema discreto

Sólamente consideraremos el caso en que la frontera de Ω_1 es poligonal. Sin pérdida de generalidad, supondremos que la frontera artificial Γ_2 se elige de modo que $\mathcal{O}$ sea un dominio convexo. Denotaremos por τ_h una triangulación "cuasi-uniforme" de $\overline{\Omega}_1$ mediante triángulos T de diámetro no superior a $h > 0$. Para cada entero $k \geq 0$, llamaremos $P^k(T)$ al espacio de los polinomios de grado $\leq k$ sobre T. A cada elemento $T \in \tau_h$ le asociamos el espacio de Raviart-Thomas [18] de índice k definido por:

$$RT^k(T) = (P^k(T))^2 + \mathbf{x}P^k(T),$$

donde $\mathbf{x} = (x, y)$ es la variable espacial y

$$\mathbf{x}P^k(T) = \{(xp, yp),\ p \in P^k(T)\}.$$

Asimismo, consideramos el espacio

$$RT^k_{-1}(\tau_h) = \{\mathbf{q} \in (L^2(\Omega_1))^2\,; \quad \mathbf{q}|_{\overline{T}} \in RT^k(T) \quad \forall T \in \tau_h\},$$

y el subespacio de $H(\mathrm{div}, \Omega_1)$ de dimensión finita

$$RT^k_0(\tau_h) = RT^k_{-1}(\tau_h) \cap H(\mathrm{div}, \Omega).$$

El flujo $\mathbf{p}$ lo aproximaremos mediante $\mathbf{p}_h$ en el espacio

$$W^h = RT^k_0(\tau_h) \cap W.$$

Para la variable escalar u, utilizaremos el espacio

$$M^k_{-1}(\tau_h) = \{v \in L^2(\Omega_1); \quad v|_{\overline{T}} \in P^k(T) \quad \forall T \in \tau_h\}.$$

Denotaremos por Σ_h a la triangulación inducida por τ_h sobre Γ_2 y

$$M^{k+1}_0(\Sigma_h) = \{\mu \in C^0(\Gamma_2);\ \mu|_e \in P^{k+1}(e) \quad \forall e \in \Sigma_h\}.$$

Ahora ya estamos en disposición de escribir el problema discreto asociado a (13)

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Encontrar } (\mathbf{p}_h, g_h) \in Q^h,\ u_h \in M^k_{-1}(\tau_h); \\ a((\mathbf{p}_h, g_h), (\mathbf{q}, \mu)) + b((\mathbf{q}, \mu), u_h) = 0 \quad \forall (\mathbf{q}, \mu) \in Q^h \\ b((\mathbf{p}_h, g_h), v) = -\int_{\Omega_1} f v \, dx \quad \forall v \in M^k_{-1}(\tau_h), \end{array}\right. \tag{17}$$

donde $Q^h = W^h \times (M^{k+1}_0(\Sigma_h)/\mathbb{R})$.

Nota 4.1 Aunque aquí hemos elegido el espacio de Raviart-Thomas para aproximar la variable flujo, también podríamos haber escogido los espacios de Brezzi-Douglas-Fortin-Marini (BDFM) (cf. [3]) o los de Brezzi-Douglas-Marini (BDM) (cf. [4]).

El análisis del problema discreto (17) se puede realizar aplicando los resultados teóricos desarrollados por Brezzi en [1]. En primer lugar, recordaremos los resultados principales que establecen qué condiciones son suficientes para asegurar la existencia y unicidad de la solución, así como cotas del error.

Sea

$$V^h = \{\mathbf{q} \in W^h; \quad \operatorname{div} \mathbf{q} = 0 \text{ en } \Omega_1\}$$

y

$$Q_0^h = V^h \times (M_0^{k+1}(\Sigma_h)/\mathbb{R}).$$

Teorema 4.1 *Supongamos que se verifican las hipótesis siguientes:*

(i_h) Existe una constante $\alpha^* > 0$ independiente de h tal que

$$a((\mathbf{q},\mu),(\mathbf{q},\mu)) \geq \alpha^* \|(\mathbf{q},\mu)\|_Q^2 \quad \forall (\mathbf{q},\mu) \in Q_0^h.$$

(ii_h) Existe una constante $\beta^* > 0$ independiente de h tal que

$$\sup_{(\mathbf{q},\mu)\in Q^h} \frac{b((\mathbf{q},\mu),v)}{\|(\mathbf{q},\mu)\|_Q} \geq \beta^* \|v\|_{0,\Omega_1} \quad \forall v \in M_{-1}^k(\tau_h).$$

Entonces el problema (17) tiene una única solución $((\mathbf{p}_h, g_h), u_h)$ y existe una constante C independiente de h tal que

$$\|(\mathbf{p},g)-(\mathbf{p}_h,g_h)\|_Q + \|u_1-u_h\|_{0,\Omega_1} \leq C\{\inf_{(\mathbf{q},\mu)\in Q^h} \|(\mathbf{p},g)-(\mathbf{q},\mu)\|_Q + \inf_{v\in M_{-1}^k(\tau_h)} \|u_1 - v\|_{0,\Omega_1}\}. \tag{18}$$

Como Q_0^h es un subespacio de Q_0, la condición (i_h) es una consecuencia directa de (i). Ahora demostraremos que la condición inf-sup discreta (ii_h) es una consecuencia de los dos lemas siguientes.

Lema 4.1 *Existe una aplicación lineal y continua*

$$I_h^k : ((H^1(\Omega_1))^2 \cap W) \times H^{1/2}(\Gamma_2)/\mathbb{R} \longrightarrow Q^h$$

tal que para cualquier $v \in M_{-1}^k(\tau_h)$

$$b(I_h^k(\mathbf{q},\mu),v) = b((\mathbf{q},\mu),v) \quad \forall (\mathbf{q},\mu) \in ((H^1(\Omega_1))^2 \cap W) \times H^{1/2}(\Gamma_2)/\mathbb{R}. \tag{19}$$

Demostración. Introducimos el operador de interpolación "de equilibrio" (cf. [18])

$$\mathcal{E}_h^k : (H^1(\Omega_1))^2 \longrightarrow RT_0^k(\tau_h).$$

Este operador satisface la propiedad (cf. [18])

$$\operatorname{div}(\mathcal{E}_h^k \mathbf{q}) = \operatorname{Pr}_k(\operatorname{div} \mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{q} \in (H^1(\Omega_1))^2, \tag{20}$$

donde Pr_k es la proyección ortogonal de $L^2(\Omega_1)$ sobre el subespacio $M_{-1}^k(\tau_h)$. Definimos I_h^k mediante

$$I_h^k(\mathbf{q},\mu) = (\mathcal{E}_h^k\mathbf{q}, 0) \quad \forall(\mathbf{q},\mu) \in ((H^1(\Omega_1))^2 \cap W) \times H^{1/2}(\Gamma_2)/\mathbb{R}.$$

Si utilizamos (20), entonces

$$\int_{\Omega_1} \operatorname{div}(\mathcal{E}_h^k\mathbf{q}) v\, dx = \int_{\Omega_1} \mathrm{Pr}_k(\operatorname{div}\mathbf{q}) v\, dx = \int_{\Omega_1} \operatorname{div}\mathbf{q} v\, dx \quad \forall v \in M_{-1}^k(\tau_h),$$

lo cual demuestra la igualdad (19).

Para probar la continuidad de I_h^k, razonamos del modo siguiente. Para cualquier $k \geq 1$, el operador $\mathcal{E}_h^k$ verifica la estimación de error (cf. [18, 5])

$$\|\mathbf{q} - \mathcal{E}_h^k\mathbf{q}\|_{0,\Omega_1} \leq C\, h\, |\mathbf{q}|_{1,\Omega_1} \quad \forall \mathbf{q} \in (H^1(\Omega_1))^2. \tag{21}$$

De (21) y de la desigualdad triangular deducimos que

$$\|\mathcal{E}_h^k\mathbf{q}\|_{0,\Omega_1} \leq C\, \|\mathbf{q}\|_{1,\Omega_1} \quad \forall \mathbf{q} \in (H^1(\Omega_1))^2.$$

Por otra parte, por (20)

$$\|\operatorname{div}(\mathcal{E}_h^k\mathbf{q})\|_{0,\Omega_1} = \|\mathrm{Pr}_k(\operatorname{div}\mathbf{q})\|_{0,\Omega_1} \leq \|\operatorname{div}\mathbf{q}\|_{0,\Omega_1}$$

y

$$\|\operatorname{div}\mathbf{q}\|_{0,\Omega_1} \leq C\, |\mathbf{q}|_{1,\Omega_1} \quad \forall \mathbf{q} \in (H^1(\Omega_1))^2.$$

Por lo tanto,concluimos que existe una constante $C > 0$ independiente de h tal que

$$\|I_h^k(\mathbf{q},\mu)\|_Q \leq C\,(\|\mathbf{q}\|_{1,\Omega_1}^2 + \|\mu\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)/\mathbb{R}}^2)^{1/2} \quad \forall(\mathbf{q},\mu) \in ((H^1(\Omega_1))^2 \cap W) \times H^{1/2}(\Gamma_2)/\mathbb{R}. \square$$

Lema 4.2 *Se verifica la condición inf-sup siguiente*

$$\sup_{(\mathbf{q},\mu)\in(H^1(\Omega_1))^2\times H^{1/2}(\Gamma_2)/\mathbb{R}} \frac{b((\mathbf{q},\mu),v)}{(\|\mathbf{q}\|_{1,\Omega_1}^2 + \|\mu\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)/\mathbb{R}}^2)^{1/2}} \geq \beta_2\, \|v\|_{0,\Omega_1} \quad \forall v \in L^2(\Omega_1). \tag{22}$$

Demostración. Puesto que $\mathcal{O}$ es convexo y $v^* \in L^2(\mathcal{O})$, los resultados clásicos de regularidad (cf. [12]) aseguran que la solución del problema auxiliar (16) pertenece a $H^2(\mathcal{O})/\mathbb{R}$. Además, disponemos de la estimación

$$\|\omega\|_{H^2(\mathcal{O})/\mathbb{R}} \leq C\, \|v^*\|_{0,\mathcal{O}}. \tag{23}$$

Resulta entonces que $\mathbf{q}_v \in (H^1(\Omega_1))^2$, y la estimación a priori (23) conduce directamente a

$$\|\mathbf{q}_v\|_{1,\Omega_1} \leq C\, \|v\|_{0,\Omega_1}.$$

Si ahora se toma $\mu_v = 0$ y se aplica el lema 3.1, se deduce (22). $\square$

Utilizando las propiedades de I_h^k y (22), es fácil probar (ii_h)

$$\sup_{(\mathbf{q},\mu)\in Q^h} \frac{b((\mathbf{q},\mu),v)}{\|(\mathbf{q},\mu)\|_Q} \geq \sup_{(\mathbf{q},\mu)\in(H^1(\Omega_1))^2\times H^{1/2}(\Gamma_2)/\mathbb{R}} \frac{b(I_h^k(\mathbf{q},\mu),v)}{\|I_h^k(\mathbf{q},\mu)\|_Q} \geq$$

$$1/C \sup_{(\mathbf{q},\mu)\in(H^1(\Omega_1))^2\times H^{1/2}(\Gamma_2)/\mathbb{R}} \frac{b((\mathbf{q},\mu),v)}{(\|\mathbf{q}\|_{1,\Omega_1}^2 + \|\mu\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)/\mathbb{R}}^2)^{1/2}} \geq \beta^*\|v\|_{0,\Omega_1},$$

with $\beta^* = \beta_2/C$.

A partir de (18) y de las estimaciones clásicas de los elementos finitos para el error de interpolación (cf. [6, 11, 5]) es sencillo obtener el resultado siguiente.

Teorema 4.2 *Existe una constante C independiente de h de modo que si la solución $((\mathbf{p},g),u_1)$ de (13) verifica que $(\mathbf{p},g) \in (H^{k+1}(\Omega_1))^2 \times H^{3/2+k}(\Gamma_2)/\mathbb{R}$, $u_1 \in H^{k+1}(\Omega_1)$ y $\operatorname{div}\mathbf{p} \in H^{k+1}(\Omega_1)$ y si $((\mathbf{p}_h,g_h),u_h)$ es la solución de (17), entonces disponemos del estimador para el error*

$$(\|\mathbf{p}-\mathbf{p}_h\|_{H(\mathrm{div},\Omega_1)}^2 + \|g-g_h\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)/\mathbb{R}}^2)^{1/2} + \|u_1-u_h\|_{0,\Omega_1} \leq C\, h^{k+1}(|\mathbf{p}|_{k+1,\Omega_1} +$$

$$+|\operatorname{div}\mathbf{p}|_{k+1,\Omega_1} + |g|_{3/2+k,\Gamma_2} + |u_1|_{k+1,\Omega_1}).$$

References

[1] F. Brezzi, On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers, *RAIRO, série Analyse Numérique R2* **8** (1974) 129-151.

[2] F. Brezzi and C. Johnson, On the coupling of boundary integral and finite element methods, *Calcolo* **16** (1979) 189-201.

[3] F. Brezzi, J. Douglas, Jr., M. Fortin and L.D. Marini, Efficient rectangular mixed finite elements in two and tree space variables, *R.A.I.R.O., Modél. Math. Anal. Numér.* **21** (1987) 581-604.

[4] F. Brezzi, J. Douglas and L.D. Marini. Two families of mixed finite element methods for second order elliptic problems, *Numer. Math.* **47** (1985) 217-235.

[5] F. Brezzi and M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods* (Springer-Verlag, New York, 1991).

[6] P. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems* (North-Holland, 1977).

[7] M. Costabel, Boundary integral operators on Lipschitz domains: Elementary results, *SIAM J. Math. Anal.* **19** (1988) 613-626.

[8] M. Costabel, Symmetric methods for the coupling of finite element and boundary elements, In: C.A. Brebbia et al., ED., *Boundary Elements IX Vol. 1.* (Springer, Berlin Heidelberg New York, 1987) 411-420.

[9] M. Costabel, V.J. Ervin and E.P. Stephan, Experimental convergence rates for various couplings of boundary and finite elements, *Mathl Comput. Modelling* **15** (1991) 93-102.

[10] R. Dautray and J.L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology.* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990).

[11] V. Girault and P.-A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations* (Springer, Berlin, 1986).

[12] P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains.* (Pitman, Boston, 1985).

[13] G.C. Hsiao, The coupling of BEM and FEM-a brief review, In: C.A. Brebbia et al. ED., *Boundary Elements X, vol. 1.* (Springer, Berlin Heidelberg New York 1988) 431-445.

[14] H. Han, A new class of variational formulations for the coupling of finite and boundary element methods, Preprint, Univ. Maryland, CollegePark.

[15] J. Johnson and J.C. Nedelec, On the coupling of boundary integral integral and finite element methods, *Math. Comp.* **35** (1980) 1063-1079.

[16] J.-L. Lions and E. Magenes, *Problémes aux Limites non Homogénes et Applications* (Dunod 1968).

[17] S. Meddahi, J. Valdés, O. Menéndez and P. Pérez, On the coupling of boundary integral and mixed finite element methods, to appear in *J. Comp. Appl. Math.*.

[18] J. E. Roberts and J. M. Thomas, Mixed and hybrid methods, in: P. G. Ciarlet, J. L. Lions ED., *Handbook of Numerical Analysis Volume II* North-Holland, Amsterdam, 1991 523-639.

[19] A. Sequeira, The coupling of boundary integral and finite element methods for the bidimensional exterior steady Stokes problem, *Math. Meth. in the Appl. Sci.* **5** (1983) 356-375.