ESTABILIDAD LINEAL DE ALGUNOS MODELOS DE CAMPO DE FASE. COMPORTAMIENTO ASINTOTICO.

Angela Jiménez-Casas
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Madrid
Departamento de Matemática Aplicada y Computación
Universidad Pontificia Comillas de Madrid
y
Aníbal Rodríguez-Bernal
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid

Estudiamos la estabilidad lineal de las **soluciones de equilibrio***, de algunos modelos de campo de fase.*

Veremos como el espectro de un único operador elíptico de segundo orden, va a determinar dicha estabilidad.

1 Introducción y preliminares

Las ecuaciones de **campo de fase** son un sistema parabólico de ecuaciones, que describen las transiciones de fase con una interfase de espesor finito, tal y como propone Caginalp en [CG1]. En su forma más simple pueden escribirse como:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \tau\varphi_t & = & \xi^2\Delta\varphi - g(\varphi) + 2u & \text{en } \Omega \times I\!R^+ \\ u_t + \frac{l}{2}\varphi_t & = & k\Delta u & \text{en } \Omega \times I\!R^+ \end{array} \right. \tag{1.1}$$

donde Ω es un subconjunto abierto y acotado de $I\!R^N$, $N \geq 1$, con frontera regular, $g(\varphi)$ es típicamente $\frac{1}{2}(\varphi^3 - \varphi)$, aunque nosotros consideraremos una función regular más general; l y k son constantes positivas, relacionadas con el calor latente y la difusividad térmica, y los parámetros τ y ξ, representan escalas de tiempo y longitud respectivamente. Las funciones incógnitas son $u(x,t)$, que representa la temperatura en un instante de tiempo t de un punto $x \in \Omega$, y $\varphi(x,t)$ parámetro de orden o campo de fase. [CG1]

Consideraremos alguna de las **condiciones de frontera**, **Dirichlet (D)** $u = \varphi = 0$ en $\partial\Omega \times I\!R^+$, **Neumann (N)** $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = 0$ en $\partial\Omega \times I\!R^+$, donde $\mathbf{n}$ representa el vector **normal exterior** en $\partial\Omega$; en este caso no hay flujo de u y φ a través de $\partial\Omega$; o **Periódicas (P)** en $\Omega = \prod_{i=1}^{N}(0, L_i), L_i > 0$, donde u, φ y sus derivadas coinciden sobre las caras opuestas de $\partial\Omega$. Finalmente, consideraremos también la **condición inicial en** $t = 0$ $\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega.$

Notaremos por $-\Delta_B$, donde B representa a alguna de las condiciones de frontera mencionadas anteriormente D, N o P, el operador laplaciano en $L^2_B(\Omega)$ con dominio H^2_B, donde dependiendo de las condiciones de frontera, se tiene:

1.- Si $B = D$, $\quad H^2_D = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, $\quad H^1_D = H^1_0(\Omega)$, $\quad L^2_D = L^2(\Omega)$, $\quad H^{-1}_D = H^{-1}(\Omega)$ y $H^{-2}_D = (H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))'$ espacio dual de H^2_D.

2.- Si $B = N$, $\quad H^2_N = \{H^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial n} = 0\}$, $\quad H^1_N = H^1(\Omega)$, $\quad L^2_N = L^2(\Omega)$, $\quad H^{-1}_N = (H^1(\Omega))'$ espacio dual de $H^1(\Omega)$ y $H^{-2}_N = (\{H^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega\})'$ espacio dual de H^2_N.

3.- Si $B = P$, $\quad H^2_P = H^2_{per}(\Omega)$, $\quad H^1_P = H^1_{per}(\Omega)$, $\quad L^2_P = L^2_{per}(\Omega)$, $\quad H^{-1}_P = (H^1_{per}(\Omega))'$ y $H^{-2}_P = (H^2_{per}(\Omega))'$ espacio dual de H^2_P.

Notaremos por $\|.\|$ la norma en L^2_B y por $\|.\|_i, i \in \{-2,-1,1,2\}$ la norma en H^i_B.

En primer lugar, vamos a introducir un cambio de variable que nos permite reescribir el sistema (1.1), como una ecuación de evolución. En efecto, si consideramos la función de entalpía $v = u + \frac{l}{2}\varphi$, podemos expresar el sistema (1.1) como:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \varphi_t & = & k_1 \Delta\varphi - h(\varphi) - b\varphi + av \\ v_t & = & k_2 \Delta v - c\Delta\varphi \end{array} \right. \tag{1.2}$$

donde:

$$k_1 = \frac{\xi^2}{\tau} > 0, \; a = \frac{2}{\tau} > 0, \; b = \frac{l}{\tau} > 0, \; k_2 = k > 0, \tag{1.3}$$

$$c = \frac{kl}{2} > 0, \; h(\varphi) = \frac{1}{\tau} g(\varphi) \tag{1.4}$$

con $v_0 = u_0 + \frac{l}{2}\varphi_0$ y φ, v satisfaciendo alguna de las condiciones de frontera mencionadas anteriormente. De esta forma tenemos una ecuación de evolución

$$U_t + AU = G(U)$$

donde $U = (\varphi, v)^t$ verifica la condición inicial $U(x,0) = (\varphi_0(x), v_0(x))^t$, con A y G representando los términos lineales y no lineales, respectivamente.

El sistema no lineal (1.2) posee un funcional de Lyapunov, $F : H^1_B \times L^2_B \longmapsto I\!R$ que viene dado por:

$$F(\varphi, v) = \frac{k_1}{2}\|\nabla\varphi\|^2 + \frac{k_2 a}{2c}\|v\|^2 + \frac{b}{2}\|\varphi\|^2 + \int_\Omega (H(\varphi) - av\varphi) =$$

$$= \frac{k_1}{2}\|\nabla\varphi\|^2 + \int_\Omega H(\varphi) + \frac{b}{2}\int_\Omega (\frac{a}{b}v - \varphi)^2 \tag{1.5}$$

con $H(s) = \int_0^s h(u)du$.

Con ayuda de este funcional de Lyapunov se prueba la existencia de soluciones globales para el sistema no lineal (1.2), asi como la existencia de un atractor global compacto y conexo. Ver [BCH], [BH], [BZ] y [SZ].

2 Estabilidad lineal

Nuestro objetivo principal es el estudio de la estabilidad lineal de los puntos de equilibrio, por esta razón consideramos $(\varphi_0, v_0) \in H^1_B \times L^2_B$ un **punto de equilibrio (P E)** de (1.2) i.e. una solución de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -k_1\Delta_B\varphi_0 + h(\varphi_0) + b\varphi_0 - av_0 & = & 0 \\ -k_2\Delta_B v_0 + c\Delta_B\varphi_0 & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.6}$$

y calculamos las **ecuaciones linealizadas** del sistema (1.2) en un entorno del punto (φ_0, v_0), que vienen dadas por

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi_t - k_1\Delta_B\psi + [h'(\varphi_0) + b]\varphi - av & = & 0 \\ v_t - k_2\Delta_B v + c\Delta_B\varphi & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.7}$$

o en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{c} \varphi \\ v \end{array} \right)_t + A_L \left(\begin{array}{c} \varphi \\ v \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) \tag{2.8}$$

con

$$A_L = \left(\begin{array}{cc} -k_1\Delta_B + [h'(\varphi_0) + b]I & -aI \\ c\Delta_B & -k_2\Delta_B \end{array} \right) \square \tag{2.9}$$

Proposición 1 *Bajo las hipótesis anteriores se tiene que A_L es un operador sectorial en $L^2_B \times H^{-1}_B$ con dominio $H^2_B \times H^1_B$ y resolvente compacta. Además $\sigma(A_L) = \sigma_p(A_L) = \{\mu_n\}_n$ con $\sigma(A_L) \subset I\!R$ y $|\mu_n| \uparrow \infty$, donde $\sigma(A_L)$ representa el espectro del operador A_L.*

Proposición 2 *El funcional $F_L : H^1_B \times L^2_B \longmapsto I\!R$ definido por:*

$$F_L(\varphi, v) = \frac{k_1}{2}\|\nabla\varphi\|^2 + \frac{k_2 a}{2c}\|v\|^2 + \int_\Omega [\frac{1}{2}(h'(\varphi_0) + b)\varphi^2 - av\varphi] =$$

$$= \frac{k_1}{2}\|\nabla\varphi\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega h'(\varphi_0)\varphi^2 + \frac{b}{2}\int_\Omega (\frac{a}{b}v - \varphi)^2 \tag{2.10}$$

es un funcional de Lyapunov para el flujo de (2.7) en $H^1_B \times L^2_B$. Además para toda $(\varphi(t), v(t))$ solución de (2.7), se tiene que

$$\frac{d}{dt}(\|\varphi\|^2 + \frac{a}{c}\|v\|^2_{-1}) + 4F_L(\varphi, v) = 0. \tag{2.11}$$

Por otra parte si $\lambda \in \sigma(A_L) \subset I\!R$, y (φ, v) es un autovector asociado a λ, se tiene que:

$$2F_L(\varphi, v) = \lambda(\|\varphi\|^2 + \frac{a}{c}\|v\|_{-1}^2). \tag{2.12}$$

El siguiente teorema nos muestra como el signo de este funcional F_L controla la estabilidad.

Teorema 1 *Con las notaciones anteriores se tiene que:*

Si $F_L \geq 0$ en $H_B^1 \times L_B^2$, entonces $(0,0)$ es estable para (2.7), y si $F_L > 0$, excepto en $(0,0)$, entonces $(0,0)$ es asintóticamente estable para (2.7). Además el origen $(0,0)$, es un punto de equilibrio inestable para (2.7), si y sólo si, el conjunto

$$M = \{(\varphi, v) \text{ tales que } F_L(\varphi, v) < 0\}$$

es distinto del vacío.

En el siguiente teorema probamos que la estabilidad depende sólo del primer autovalor de un operador elíptico de segundo orden, L_0, tal y como habíamos anunciado.

Teorema 2 *Sea μ_1 el primer autovalor de L_0, donde L_0 es el operador en $L_B^2(\Omega)$ definido por*

$$L_0 = -k_1\Delta_B + h'(\varphi_0)I \tag{2.13}$$

con dominio H_B^2. Entonces, se tiene que $\mu_1 < 0$ si y sólo si $(0,0)$ es inestable para (2.7). Si $\mu_1 > 0$, entonces $(0,0)$ es asintóticamente estable para (2.7); y si $\mu_1 = 0$, $(0,0)$ es estable en $L_B^2 \times H_B^{-1}$ pero no es asintóticamente estable para (2.7).

Corolario 1 *Si $h'(\varphi_0) \leq 0$ entonces (φ_0, v_0) es inestable, si $h'(\varphi_0) > 0$ en Ω entonces, (φ_0, v_0) es asintóticamente estable; y si (φ_0, v_0) es inestable, entonces $dim W^u \geq n_0$ donde W^u es la variedad inestable asociada a (φ_0, v_0), y $\sigma(L_0) \cap I\!R^- = \{\mu_1, ..., \mu_{n_0}\}$.*

Usando resultados de [HM], se tiene que:

Teorema 3 *Bajo las notaciones e hipótesis anteriores, si suponemos que Ω es un dominio convexo, $B = N$ y (φ_0, v_0) es un punto de equilibrio para (1.2) donde φ_0 es una función no constante; entonces (φ_0, v_0) es inestable.*

Nota 1 *Si $N \geq 1$ el resultado anterior es válido para dominios más generales, ver [HM].*

References

[BZ] P.W.Bates, Songmu Zheng "Inertial Manifolds and Inertial Sets for The Phase-Field Equations", J. of Dynamics and Diff. Eqns. vol 4,2, 375, (1992).

[BCH] D.Brochet, X.Chen, D.Hilhorst "Finite Dimensional Exponential Atractor for the Phase Field Model", Appl. Analys. vol 49, 3-4, 197, (1993).

[BH] D.Brochet, D.Hilhorst "Universal Attractor and Inertial Sets for the Phase Field Model", Appl. Math. Lett. vol 4, n 6, 59-62, (1991).

[CG1] G.Caginalp "An Analysis of a Phase Field Model of a Free Boundary", Arch.Rat.Mech.Anal. 92, 205-245, (1986).

[CGF] G.Caginalp, P.C.Fife "Dynamics of Layered Interfaces Arising from Phase Boundaries", SIAM.J. Appl. Math. vol 48, n 3, 506-518, (1988).

[CG2] G.Caginalp "The Dynamics of a Conserved Phase Field System:Stefan-like, Hele-Shaw, and Cahn-Hilliard Models as Asymptotic Limits", IMA Journal of Applied Mathematics 44, 77-94, (1990).

[HM] H.Matano " Asymptotic Behavior and Stability of Solutions of Semilineat Diffusion Equations", Publi. RIMS, Kyoto Univ, 15, 401-454, (1979).

[JR] A.Jiménez-Casas,A.Rodríguez-Bernal " Linear Stability of Phase Field Models". Prepint.

[SZ] Songmu Zheng "Global Existence for a Thermodynamically Consistent Model of Phase Field Type", Differential and Integral Equations vol 5, n 2, 241-253, (1992).