DINÁMICA DE ASTEROIDES

CERCA DE

LA RESONANCIA 4:1

MIQUEL GRAU

Departament de Matemàtica Aplicada II, UPC

Pau Gargallo 5, 08028 Barcelona, e-mail: grau@ma2.upc.es

Abstract

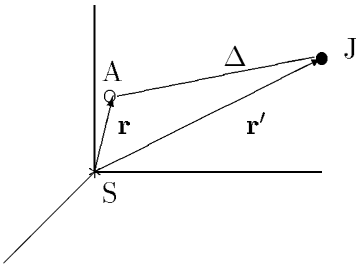
An enlarged averaged Hamiltonian is introduced to compute some families of periodic orbits of the planar elliptic 3-body problem, in the Sun-Jupiter-Asteroid system, near the 4:1 resonance. Four resonant families are found and their stability is studied. The families of symmetric periodic orbits of the elliptic problem appear near the corresponding fixed points which have been computed in this model and the coincidence is good for moderate values of the eccentricity of the asteroid.

We start with a four dimensional mapping corresponding to our problem. It is found that chaotic regions exist and as a consequence the eccentricity of the asteroid jumps to high values and close encounters with Mars may occur, thus generating a gap. Finally, we take into account the effect of the gravitational attraction of Saturn of Jupiter's orbit; this generates more chaos and the results are in good agreement with the observations.

1. Familias de puntos críticos

1.1 Hamiltoniano del modelo

Si se considera el problema restringido elíptico plano de 3 cuerpos (asteroide (A) – Sol (S) – Júpiter (J)), donde se ha tomado igual a 1 el semieje de la órbita de Júpiter (a'), su movimiento medio (n') y la constante de gravitación, en la resonancia $4:1$, tenemos el hamiltoniano siguiente



$$H = \frac{\mu_1^2}{2\,L^2} - \Lambda' + \mu \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r'^3} \right) \ ,$$

donde $L = \sqrt{\mu_1\,a}$, $\mu_1 = 1 - \mu = 0.999\,046\,125$ y Λ' es el momento conjugado de la longitud media de Júpiter (λ').

Si $a = a_\star = \sqrt[3]{\mu_1/\,16} = 0.396\,724\,041$, con $n^2\,a_\star^3 = \mu_1$, podemos desarrollar la función de perturbación

$$\sum C_{n_1 n_2 n_3}^{p_1 p_2}\; e^{p_1}\; e_j^{p_2}\; \cos(n_1\lambda + n_2\lambda' + n_3\omega) \ ,$$

donde ω es la longitud del perihelio del asteroide, y si elegimos los términos con frecuencias nulas ($4\,n_1 + n_2 = 0$), al definir una función peso $w = p_0 + 2\,p_1 + 4\,p_2$, con

$$C \approx \left(\frac{1}{2}\right)^{p_0+1} \ , \ e \approx \left(\frac{1}{4}\right)^{p_1} \ \text{ y } \ e_j \approx \left(\frac{1}{16}\right)^{p_2} \implies w < 9 \, .$$

Para $L = L_\star = \sqrt{\mu_1\,a_\star}$, en la función de perturbación, el hamiltoniano queda

$$H = H_0(L,\,\Lambda') + \mu\,R(L_\star, S, \phi, \rho) \ ,$$

donde $H_0 = \dfrac{\mu_1^2}{2\,L^2} + 4\,L - \Lambda$ y

$$\begin{array}{ll} \phi = 4\,\lambda - \lambda' \ , & L = \sqrt{\mu_1\,a} \ , \\ \rho = -\omega \ , & S = L(1 - \sqrt{1-e^2}) \ , \\ \lambda' \ , & \Lambda = \Lambda' + 4\,L \ , \end{array}$$

con

$$\begin{aligned} R \ = \ & [s_1 \cos\rho + r_1 e_j \cos(\phi - \rho)]\ e_j\,\sqrt{2\,S} + \\ & + [s_2 + r_2 e_j \cos(\phi - 2\rho)]\ (2\,S) + \\ & + r_3 \cos(\phi - 3\rho)\,(2\,S)^{3/2} \ , \end{aligned}$$

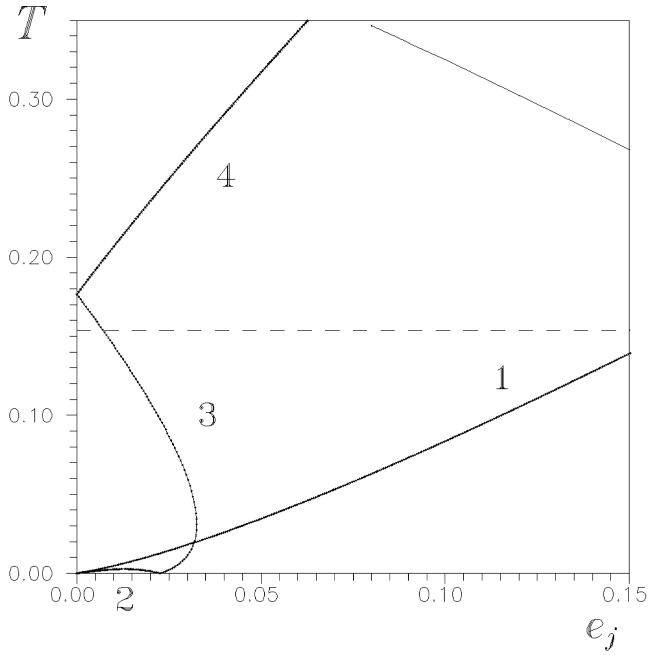
y coeficientes

$$\begin{array}{llllll} r_1 = & -4.4289043 \ , & r_2 = & 2.5644689 \ , & r_3 = & -0.4885767 \ , \\ s_1 = & -0.0997059 \ , & s_2 = & 0.1293819 \ . & & \end{array}$$

1.2 Puntos críticos

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial H}{\partial \phi}=0\\[2ex] \dfrac{\partial H}{\partial \rho}=0\end{array}\right\} \Longrightarrow \phi = 0, \pi ; \quad \rho = 0, \pi , \qquad \frac{\partial H}{\partial L} = 0 = -\frac{\mu_1^2}{L^3} + 4 \Longrightarrow L = L_\star ,$$

De $\dfrac{\partial H}{\partial S} = 0$, si $T = (2S)^{1/2}$, se tiene la ecuación $F_i(T, e_j) = 0$, $i = 1 \div 4$, al sustituir por $(\phi, \rho) = (0,0), (0,\pi), (\pi,0)$ y (π,π). Si se parametriza la curva por e_j, $0 \le e_j \le 0.15$, y $0 < T \le 0.40$, se obtiene cuatro familias que vienen descritas en la figura 1.



Familia	(ϕ, ρ)
1	(0, 0)
2	$(\pi, 0)$
3	$(0, \pi)$
4	(0, 0)

Figura 1. Gràfica de las 4 familias de puntos críticos en el dominio de convergencia (criterio de Sundman). La recta horizontal corresponde a $e = 0.193$ que es el valor en que el asteroide cruza la órbita de Marte.

Un análisis lineal de la derivada del campo hamiltoniano, para los puntos críticos, da los siguientes tipos de valores propios

SC:	silla centro	$(\pm a, \pm bi)$,	GC:	centro genérico	$(\pm bi, \pm \beta i)$,
RS:	silla real	$(\pm a, \pm \alpha)$,	CS:	silla compleja	$(\pm(a \pm bi))$,

donde a, b, α y $\beta \in \mathbb{R}$. Se tiene una ampliación de la figura 1 (por debajo del valor crítico de la excentricidad) en la figura 2 y la tabla siguiente:

Familia	Cambios de estabilidad
1	GC $\rightarrow$ SC
2	SC
3	CS $\rightarrow$ RS $\rightarrow$ SC $\rightarrow$ RS $\rightarrow$ SC
4	GC $\rightarrow$ SC

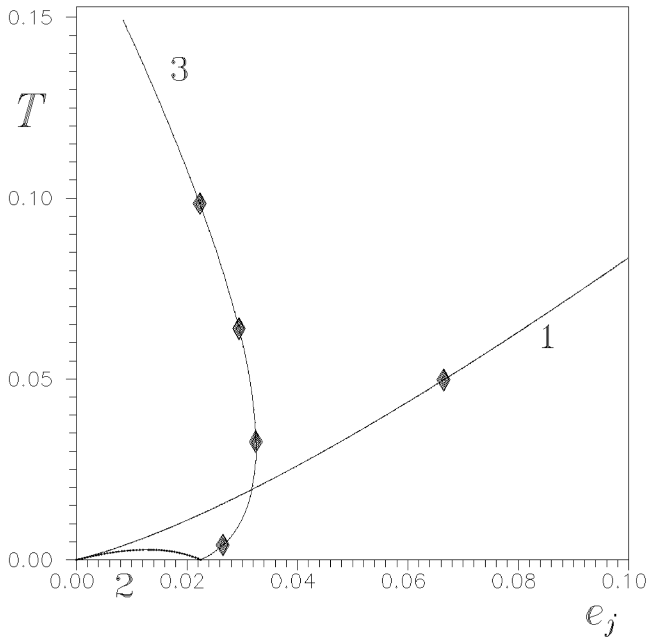


Figura 2. Cambios de estabilidad de las familias de puntos críticos.

Por otro lado, si consideramos el cambio $\begin{cases} \sigma = \rho - \dfrac{1}{3}\,\phi\,, & \qquad S = L\,\left(1 - \sqrt{1-e^2}\right)\,, \\ \nu = \dfrac{1}{3}\,\phi - \rho'\,, & \qquad N = L\,\left(4 - \sqrt{1-e^2}\right)\,, \end{cases}$ de $L = L_\star$, y $N - S = 3\,L_\star$, se tiene $N - 4\,L_\star = L_\star\,\left(1 - \sqrt{1-e^2}\right)$, y la proyección sobre el plano $(e,\,N)$ da lugar a un arco de la elipse de ecuación $e^2 + \dfrac{(N - 4\,L_\star)^2}{L_\star^2} = 1$. La figura 3 da una visión de conjunto, mientras que en la figura 4 se representa por separado.

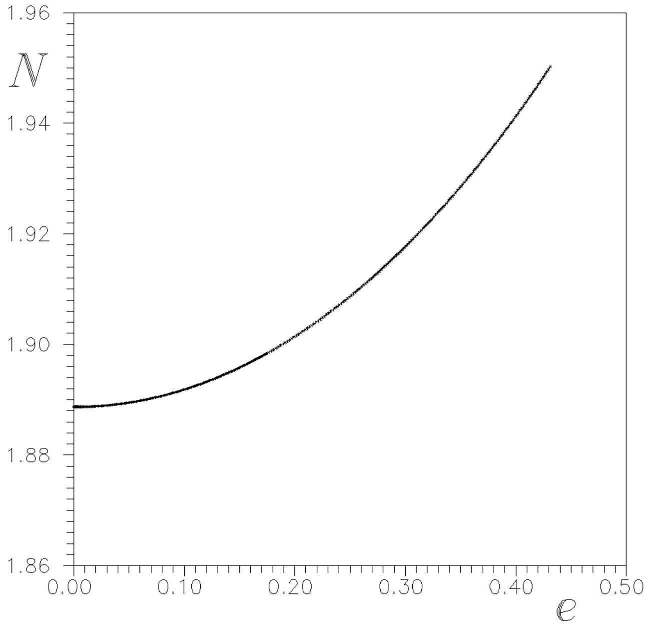


Figura 3. Proyección de las 4 familias en el plano $(e,\,N)$.

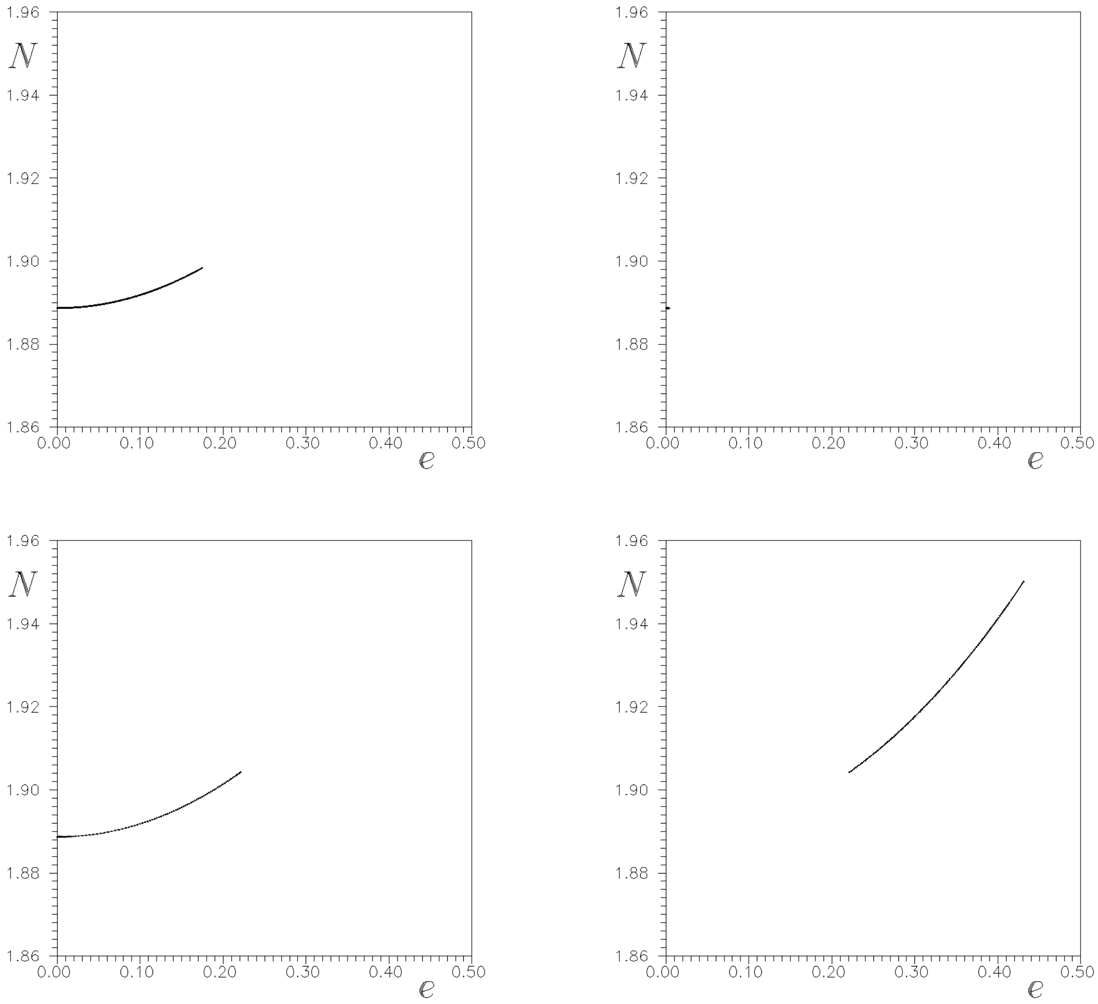


Figura 4. Proyección por separado de las 4 familias en el plano $(e,\, N)$.

Finalmente, en todos los cálculos efectuados para cualquier punto de las familias, se tiene

$$\frac{27\,\mu_1^2}{(N-S)^3} \;=\; \frac{4}{1} \pm 0.5 \cdot 10^{-8} \;\Longrightarrow\; \frac{n}{n'} \approx \frac{4}{1} \;\; .$$

con lo que se puede asegurar que se está en presencia de 4 familias de órbitas quasiperiódicas.

2. Dinámica de la aplicación

2.1 Construcción de la aplicación

Si se considera el cambio canónico

$$x = \sqrt{2\,S}\,\cos\rho \ , \qquad \Phi = L \ ,$$
$$y = \sqrt{2\,S}\,\sin\rho \ , \qquad \phi = \lambda - 4\,\lambda' \ ,$$

y se denota por H al hamiltoniano de nuevo,

$$H = H_0(\Phi) - H_0(\Phi_\star) + H_{sec}(x,\,y) + H_{res}(\phi,\,x,\,y) \ ,$$

donde $H_0 = -\dfrac{\mu_1^2}{2\,\Phi^2} - 4\,\Phi$,

$$\begin{aligned} H_{sec} &= S_1\,e_j\,x + S_2\,(x^2+y^2) \ , \\ H_{res} &= \left[R_1\,e_j^2\,x + R_2\,e_j\,(x^2-y^2) + R_3\,(x^3 - 3\,x\,y^2)\right]\,\cos\phi + \\ &+ \left[R_1\,e_j^2\,y + 2\,R_2\,e_j\,x\,y + R_3\,(3\,x^2\,y - y^3)\right]\,\sin\phi \ , \end{aligned}$$

con $S_k(R_k) = -\,\mu\,s_k(r_k)$. Si denotamos por

$$\begin{aligned} P_1 &= R_1\,e_j^2\,x + R_2\,e_j\,x^2 + R_3\,x^3 \ , &\qquad Q_1 &= R_1\,e_j^2\,y - R_3\,y^3 \ , \\ P_2 &= R_2\,e_j\,y^2 \ , & Q_2 &= 2\,R_2\,e_j\,x\,y \ , \\ P_3 &= -3\,R_3\,x\,y^2 \ , & Q_3 &= 3\,R_3\,x^2\,y \ , \end{aligned}$$

se tiene

$$H_{res} = (P_1+P_2+P_3)\,\cos\phi + (Q_1+Q_2+Q_3)\,\sin\phi \ ,$$

que se sustituye por

$$H_{res} = 2\,\pi\sum_{r=1}^{3}\left[\cos\phi\,P_r\,\delta_{2\,\pi}(t-\xi_r) + \sin\phi\,Q_r,\delta_{2\,\pi}(t-\zeta_r)\right] \ ,$$

[Chirikov – Wisdom, *Astron. J.* (1982)]

con lo que se ha añadido un conjunto de términos de período corto.

Si δ actúa en valores distintos

$$0 < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \zeta_1 < \zeta_2 < \zeta_3 < 2\,\pi = T_J \ ,$$

y se hace tender: $\xi_3 \to 0$ y $\zeta_1 \to 2\,\pi$, la integración de los términos de la forma $A_r\,x^k\,y^s$ con $A_r = c_r \left\{ \begin{array}{c} \cos\phi \\ \sin\phi \end{array} \right\}$, dan lugar a

- si $k = s$, $x(y) = x_0(y_0)\,\exp\left[-(+)\,s\,A_r\,x_0^{s-1}\,y_0^{s-1}\,T_J\right]$,
- si $k \neq s$, $x(y) = x_0(y_0)\cdot\left[1-(s-k)\,A_r\,x_0^{k-1}\,y_0^{s-1}\,T_J\right]^{\frac{s}{s-k}\left(\frac{k}{k-s}\right)}$.

En definitiva,

$$1.\ \begin{cases} y' &= y + T_J \frac{\partial P_1}{\partial x} \cos\phi \\ \Phi' &= \Phi + T_J P_1 \sin\phi \end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases} x' &= x - T_J \frac{\partial P_2}{\partial y} \cos\phi \\ \Phi' &= \Phi + T_J P_2 \sin\phi \end{cases}$$

$$3.\ \begin{cases} x' &= x\,(1 + 3\,R_3\,y\,\cos\phi\,T_J)^2 \\ y' &= y\,(1 + 3\,R_3\,y\,\cos\phi\,T_J)^{-1} \\ \Phi' &= \Phi + T_J P_3 \sin\phi \end{cases}$$

$$4.\ \begin{cases} x' &= (x-\kappa)\cos(\gamma T_J) + y\sin(\gamma T_J) + \kappa \\ y' &= y\,\cos(\gamma T_J) - (x-\kappa)\,\sin(\gamma T_J) \\ \phi' &= \phi + \left(\frac{\mu_1^2}{\Phi^3} - 4\right) T_J \end{cases} \qquad \left(\gamma = -2\,S_2\,,\ \kappa = \frac{S_1\,e_j}{\gamma}\right).$$

$$5.\ \begin{cases} x' &= x - T_J \frac{\partial Q_1}{\partial y} \sin\phi \\ \Phi' &= \Phi - T_J Q_1 \cos\phi \end{cases}$$

$$6.\ \begin{cases} x' &= x\,\exp(-2\,R_2\,e_j\,\sin\phi\,T_J) \\ y' &= y\,\exp(\ \ 2\,R_2\,e_j\,\sin\phi\,T_J) \\ \Phi' &= \Phi - T_J Q_2 \cos\phi \end{cases}$$

$$7.\ \begin{cases} x' &= x\,(1 + 3\,R_3\,x\,\sin\phi\,T_J)^{-1} \\ y' &= y\,(1 + 3\,R_3\,x\,\sin\phi\,T_J)^2 \\ \Phi' &= \Phi - T_J Q_3 \cos\phi \end{cases}$$

2.2 Condiciones iniciales

La parte resonante del hamiltoniano

$$H_{res} = P(x,\,y)\,\cos\phi + Q(x,\,y)\,\sin\phi\ ,$$

se puede expresar como

$$H_{res} = A(x,\,y)\,\cos(\phi - \phi_0)\ .$$

Para $\Phi = \Phi_\star$, $y = 0$, $\phi - \phi_0 = \pi \implies H = H_s(x,\,0) - A(x,\,0)$, se tiene la siguiente tabla

e	$x = \sqrt{2\,\Phi_\star\,(1 - \sqrt{1-e^2})}$	h
0.05	0.039 684 815	$-0.243\,68 \cdot 10^{-6}$
0.10	0.079 444 426	$-0.682\,13 \cdot 10^{-6}$
0.15	0.119 355 288	$-0.193\,47 \cdot 10^{-5}$

Para $H = h_i$, $i = 1 \div 3$, con $y = 0$, $\phi - \phi_0 = 0$, se tiene

$$h_i = H_0(\Phi) - H_0(\Phi_\star) + H_s(x,\,0) + A(x,\,0)\ ,$$

y, como $x = x(\Phi,\,e)$, si $e = \tilde{e}_i$ se obtiene

$$8\,\Phi^3 + 2\,[h_i + H_0(\Phi_\star) - H_s(\Phi) - A(\Phi)]\,\Phi^2 + \mu_1^2 = 0$$

cuyas soluciones son las condiciones iniciales que se toman en los cálculos y se explicitan en la tabla siguiente

$H = h_1,\ y = 0,\ \phi = \pi$

e	Φ	x
0	0.629 719 881	0
0.05	79 893	0.039 691 749
0.10	658 878	0.079 450 673
0.15	559 782	0.089 404 908

$H = h_2,\ y = 0,\ \phi = \pi$

e	Φ	x
0.05	0.629 867 123	0.039 694 498
0.10	796 025	0.079 459 325
0.15	559 745	0.111 357 235

$H = h_3,\ y = 0,\ \phi = \pi$

e	Φ	x
0.10	0.629 935 559	0.079 468 127
0.15	802 902	0.119 378 324
0.1775	604 539	0.141 404 498

2.3 Evolución

Para cada una de las condiciones iniciales se ha estudiado su evolución para t desde 0 hasta 300000 T_J, donde $T_J = 12.858$ años; los resultados se pueden ver en las figuras 7–11.

Los planos de representación son $(T_J,\, e)$ donde queda patente para que condiciones iniciales tenemos asteroides que cruzan la órbits de Marte y el plano $(x,\, y)$ para el que $\phi(x,\, y) = \pi$, con $\dot{\phi} > 0$.

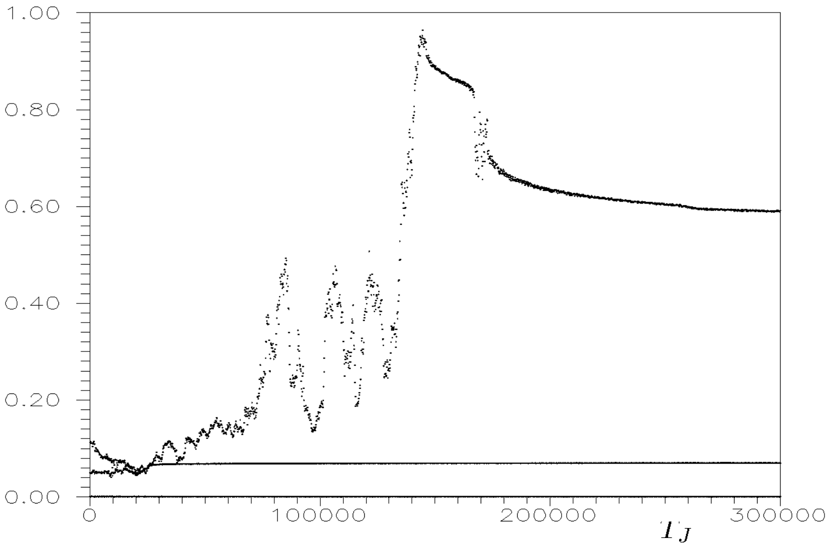


Figura 7. Evolución para $H = h_1$, $e_0 = 0,\, 0.05,\, 0.15$.

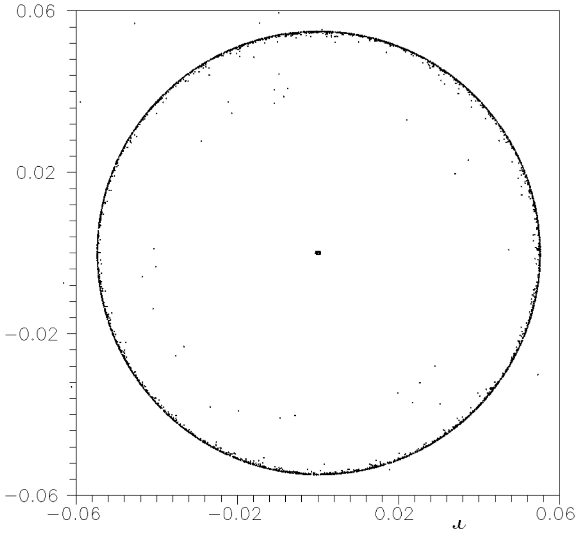


Figura 6. Superficie de sección $\phi(x, y) = \pi, \dot{\phi} > 0$. $H = h_1$, $e_0 = 0, 0.05$.

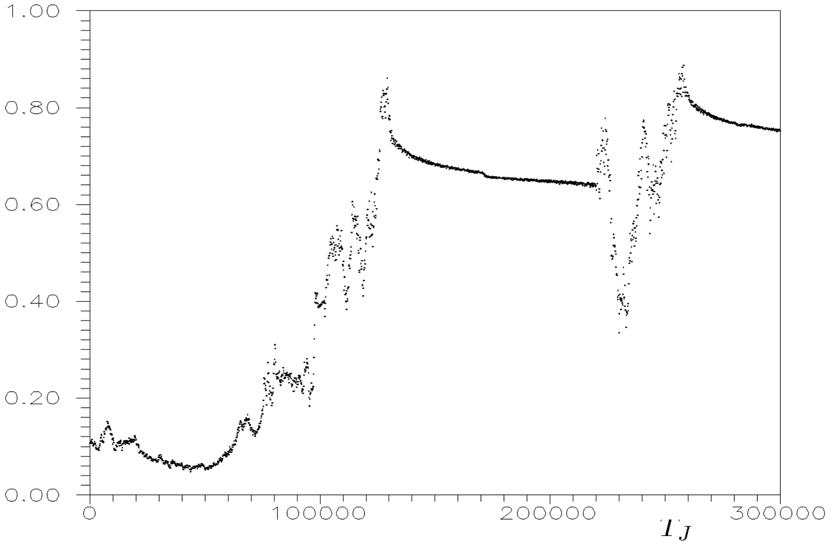


Figura 7. Evolución para $H = h_1$, $e_0 = 0.10$.

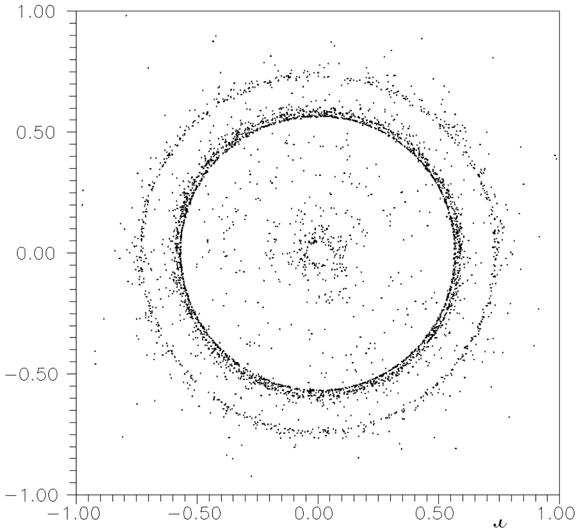


Figura 8. Superficie de sección $\phi(x, y) = \pi, \dot{\phi} > 0$. $H = h_1$, $e = 0.10$.

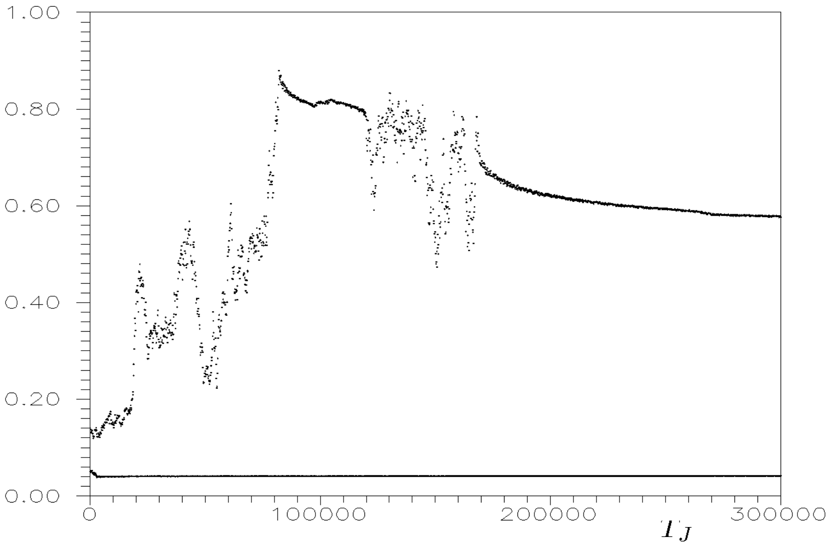


Figura 9. Evolución para $H = h_2$, $e_0 = 0.05, 0.15$.

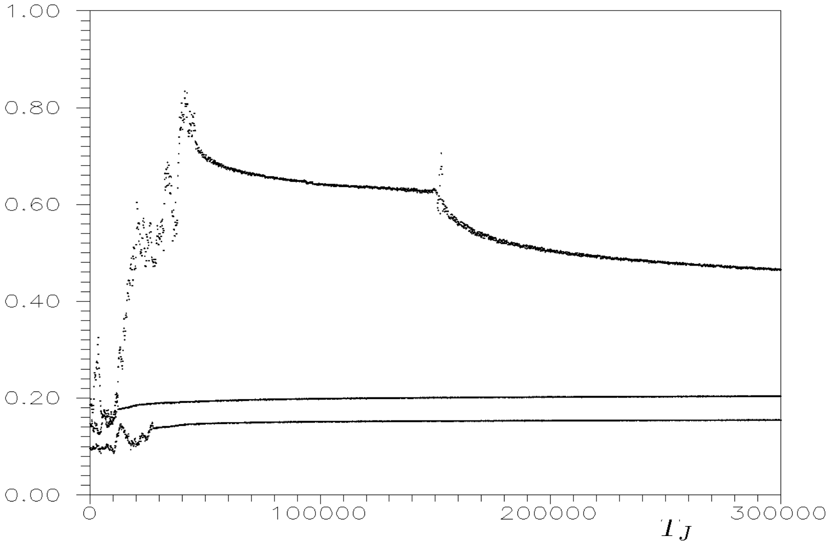


Figura 10. Evolución para $H = h_3$, $e_0 = 0.10, 0.15, 0.1775$.

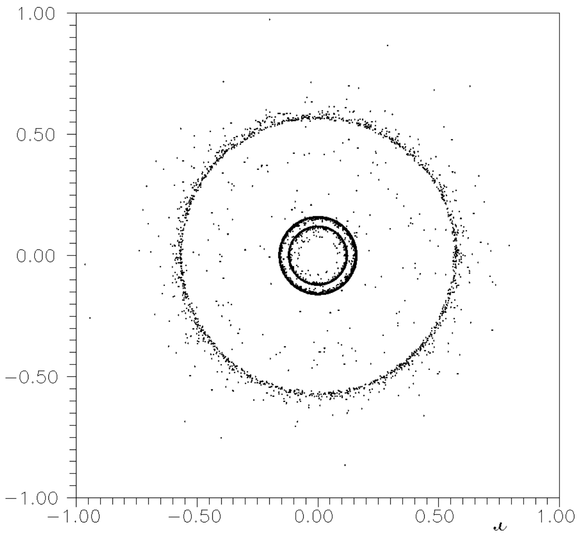


Figura 11. Superficie de sección $\phi(x, y) = \pi$, $\dot{\phi} > 0$. $H = h_3$, $e = 0.10, 0.15, 0.1775$.

2.4 Efecto de Saturno sobre Júpiter

Se introduce a continuación el efecto que produce la fuerza de atracción de Saturno sobre Júpiter incorporando los resultados principales que dan lugar a una lenta variación de e_j y ω_j :

$$\begin{cases} e_j \cos\omega_j = A_5 \cos(g_5 t + \beta_5) + A_6 \cos(g_6 t + \beta_6) , & (1) \\ e_j \sin\omega_j = A_5 \sin(g_5 t + \beta_5) + A_6 \sin(g_6 t + \beta_6) . & (2) \end{cases}$$

donde

$A_5 = 0.044\,119$	$A_6 = 0.015\,750$
$g_5 = 2.059\,884 \cdot 10^{-5}\, rad/y$	$g_6 = 1.368\,178 \cdot 10^{-4}\, rad/y$
$\beta_5 = 0.535\,397\, rad$	$\beta_6 = 5.377\,569\, rad$

[Laskar *Icarus* (1990)]

de manera que

$$e_j = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \cos(g\,t + \beta)}$$

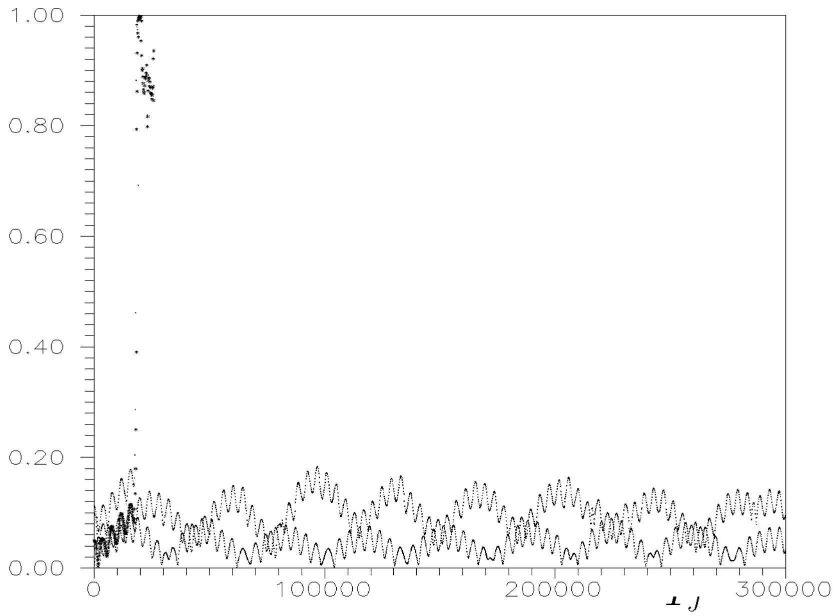
y $\tan\omega_j$, se calcula a partir de (1) y (2) .

En cada iteración ($T_J = 11.858$ años), varía e_j, ω_j , y se introduce la corrección

$$\phi := \phi - 4\,\omega_j \quad .$$

Si se toma las mismas condiciones iniciales que en el apartado anterior, los resultados de la evolución con este segundo modelo se representan en las figuras 12–17.

Figura 12. Evolución para $H = h_1$.



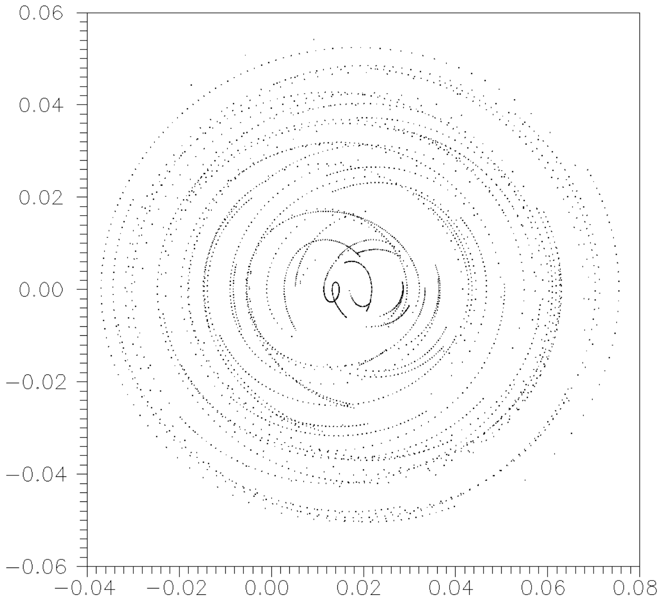


Figura 13. Superficie de sección

$\phi(x,\, y) = \pi,\, \dot{\phi} > 0\,.$

$H = h_1\,,\; e_0 = 0\,.$

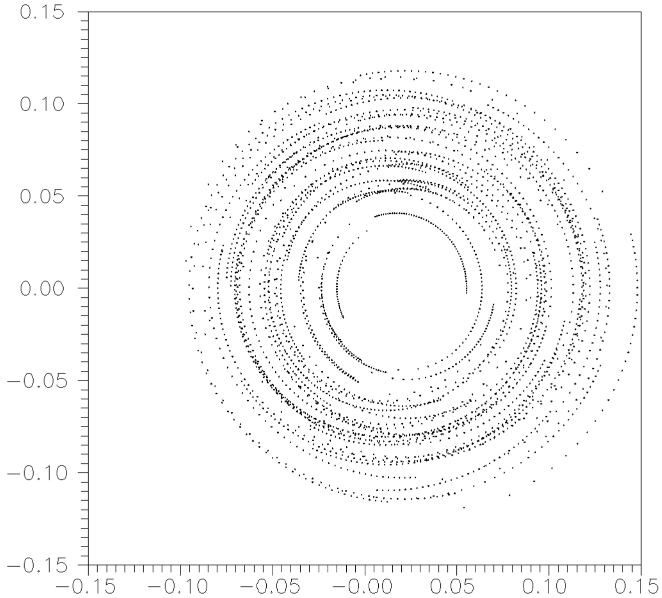


Figura 14. Superficie de sección

$\phi(x,\, y) = \pi,\, \dot{\phi} > 0\,.$

$H = h_1\,,\; e_0 = 0.10\,.$

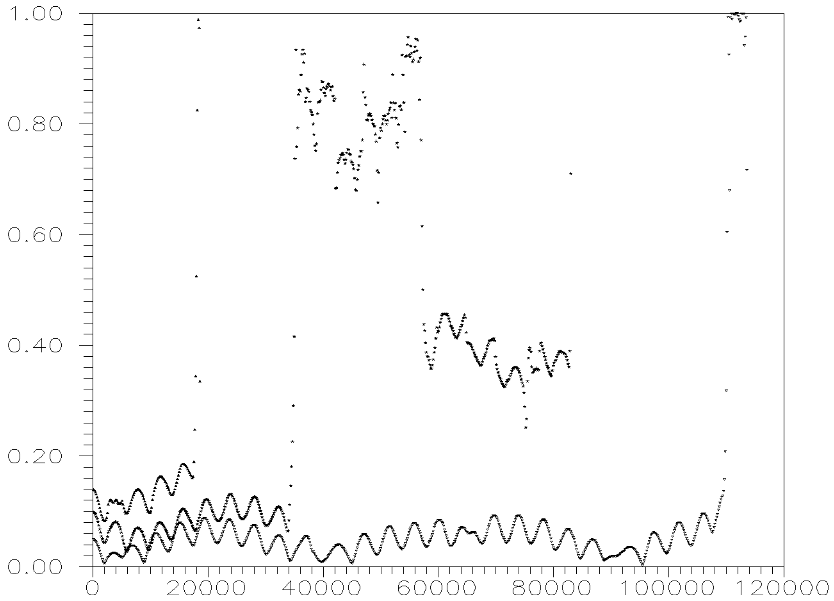


Figura 15. Evolución para $H = h_2\,.$

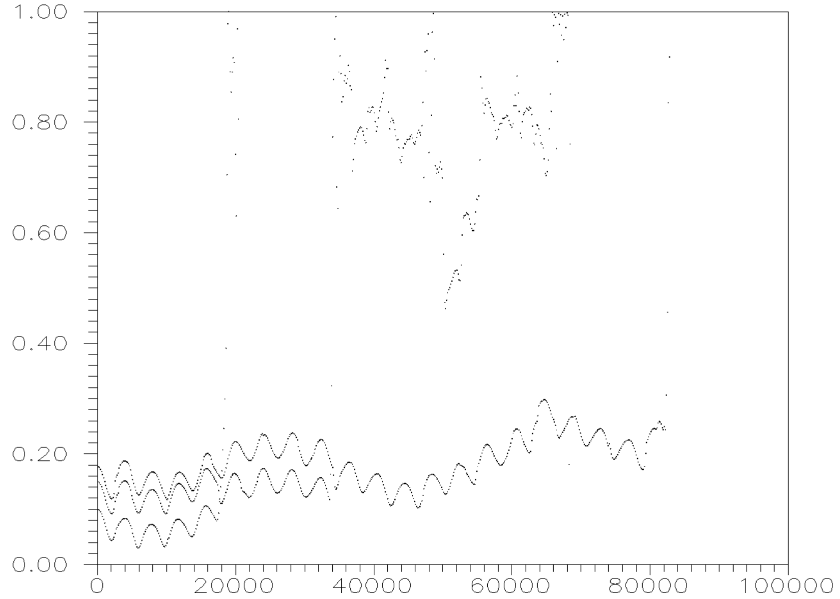


Figura 16. Evolución para $H = h_3$.

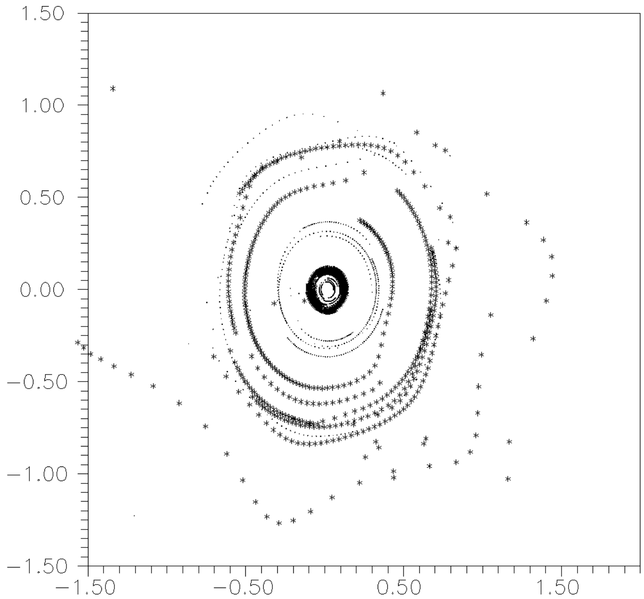


Figura 17. Superficie de sección

$\phi(x, y) = \pi$, $\dot{\phi} > 0$.

$H = h_2$, $e_0 = 0.10$.

$H = h_3$, $e_0 = 0.15$.

2.5 Estimación del caos

Se ha calculado el exponente caracterísitico de Lyapunov (máximo) para las órbitas presentadas,

$$k \;=\; \lim_{t\to\infty} k(t) \;=\; \lim_{t\to\infty} \, \frac{1}{n\,\tau} \, \sum_{1}^{n} \ln \frac{d_i}{d_0} \;\; ,$$

con $t = n\,\tau$ y $d_i/\, d_0$ es la razón de divergencia de dos soluciones próximas en el paso i-ésimo de integración en un intervalo de longitud τ .
Se ha considerado el tiempo de Lyapunov, $T_{Lyap} \,=\, 1/\, k(t)$, para $t = 7 \cdot 10^6$ años, obteniéndose una razón de caos superior para el modelo en que Saturno afecta a la órbita de Júpiter:

Modelo	$\log_{10} T_{Lyap}$
J	2.9
J+S	2.7 ± 0.1

Referencias

Abraham, R. and Marsden, J. E.: 1978, *Foundations of Mechanics.* Reading, Massachusetts.

Abu-el-Ata, N. and Chapront, J.: 1975, 'Développements analytiques de l'inverse de la distance en mécanique céleste', *Astron. Astrophys.* **38**, 57-66.

Ferraz-Mello, S.: 1994, 'The Convergence Domain of the Laplacian Expansion of the Disturbing Function', *Celest. Mech.* **58**, 37-52.

Grau, M.: 1995, 'Critical Point Families in the 3:1 Resonance'. *Celest. Mech.* **61**, 389-401.

Laskar, J.: 1990, 'The Chaotic Motion of the Solar System', *Icarus* **88**, 266-291.

Šidlichovský, A.: 1993, 'Chaotic Behaviour of Trajectories for the Asteroidal Resonances', *Celest. Mech.* **56**, 143-152.

Simó, C.: 1990, 'On the Analytical and Numerical Approximation of Invariant Manifolds', en *Modern Methods in Celestial Mechanics*, D. Benest y C. Froeschlé (eds.), Editions Frontières, pp. 285-329.

Wisdom, J.: 1983, 'Chaotic Behaviour and the Origin of the 3/1 Kirkwood Gap', *Icarus* **56**, 51-74.