"UN METODO DETERMINISTA PARA LA EVALUACION DE FUNCIONES BOOLEANAS ESTOCASTICAS: ANALISIS COMPARATIVO"

Blas Galván González[(1)], Diego García Vera[(1)], Luis González Sánchez[(1)]

(1) Departamento de Matemáticas. Univ. de Las Palmas de G.C.
Campus Universitario de Tafira. 35017-Las Palmas de G.C.
Fax: 34-28-458811. email: bgalvan@dma.ulpgc.es

ABSTRACT

Entre las aplicaciones del Algebra de Boole a la Ciencia y la Ingenieria son frecuentes los procesos tecnologicos en los que las variables primarias que intervienen son de naturaleza estocástica ó aleatoria. En la actualidad, los procesos de diseño y control de sistemas técnicos de gran complejidad (Centrales Nucleares, Plantas químicas, Redes Eléctricas, etc) emplean cada vez con mas frecuencia funciones booleanas estocásticas dependientes de un elevado número de variables cuyas probabilidades son muy pequeñas. En este trabajo se presenta un algoritmo que implementa el método algebraico que hemos denominado "Pesos con ordenación intrínseca" para analizar tales funciones, así como los resultados comparativos con otros métodos clasicos. El método desarrollado se fundamenta en una proposición en la que se establece una condición necesaria y suficiente para que la ordenación por "pesos" entre *N*-úplas de ceros y unos en el Álgebra de Boole dependa intrínsecamente de la disposición relativa de tales dígitos en dichas *N*-úplas, siendo independiente de las probabilidades de las variables booleanas.

INTRODUCCION

A lo largo de los últimos cincuenta años se ha acelerado considerablemente el ritmo del progreso técnico apareciendo con ello la necesidad de disponer de procedimientos matemáticos adecuados para su evaluación y estudio, y que sean rápidos y eficientes. Todas las herramientas desarrolladas se han agrupado por afinidades constituyendo las denominadas "Disciplinas Metodológicas". Una de las mas empleadas es la denominada Fiabilidad de Sistemas que contempla, como grandes objetivos los siguientes :

- Cálculo de la Fiabilidad ó Disponibilidad
- Determinación de puntos débiles en el diseño ó la operación
- Optimización de sistemas respecto a la Seguridad ó Disponibilidad
- Profundizar en el conocimiento del sistema en consideración

En general, los procedimientos para el estudio de la Fiabilidad de Sistemas pueden clasificarse en dos grandes grupos:

METODOS INDUCTIVOS.- Que estudian los sucesos ó fallos de interés que han ocurrido a componentes del sistema y estudian sus efectos sobre otros componentes y/o el sistema . Los métodos más importantes se denominan :

- Análisis de los Modos de Fallo y sus Efectos (FMEA)
- Análisis de Riesgo y Operabilidad (HAZOP)
- Análisis de Markov
- Arbol de Sucesos

METODOS DEDUCTIVOS.- Que estudian los Sucesos ó Fallos importantes que han ocurrido en el sistema y analizan las causas de los mismos mediante su descomposición en sucesos ó fallos más elementales hasta un cierto nivel de desagregación. El método deductivo más empleado se denomina Análisis de Arbol de Fallos y dentro de su estudio se enmarca este trabajo.

ANALISIS DE ARBOL DE FALLOS

Este método se puede descomponer en una serie de procedimientos cuya definición no varia al cambiar el sistema a estudiar, esto son :

Definición del Sistema.- En este procedimiento se realiza de forma ordenada la descripción del sistema y todos sus componentes de una forma tan detallada que permita realizar el análisis hasta el nivel de desagregación deseado. Esta descripción abarcará características físicas y operacionales tanto individuales como conjuntas si el elemento es un subsistema o parte de él. Se elaborarán tambien diagramas funcionales y de bloque de todos los procesos en los que intervenga el sistema y se detallarán las condiciones de contorno medioambientales y operacionales a que hubiere lugar.

Construcción del árbol.- Definido el suceso fallo no deseado que se desea estudiar, al que se denomina frecuentemente SUCESO TOP, se procede a investigar las causas inmediatas de éste y a la determinación de su simultaneidad. Con ello se encadena el suceso top a sus causas mediante una serie de puertas lógicas (AND, OR). Cada una de las causas será, de nuevo, sometida al proceso anterior hasta que nos encontremos con aquellos fallos elementales que describe el nivel de desagregación elegido. Todo ello constituye una ingente tarea, la cual puede ser realizada manualmente ó con ayuda de ordenador. La determinación de la función booleana estocástica que representa al arbol de fallos obtenido (función de estructura) es el último paso de este proceso.

Evaluación Cualitativa.- Se pretende evaluar las características cualitativas de la función obtenida, siendo fundamental la determinación de aquellos fallos elementales que al producirse conjuntamente ocasionan la aparición del TOP no deseado. Estos fallos elementales se denominan “Primeros Implicantes“ en el caso de que el arbol sea no s-coherente, ó “Grupos de Corte Mínimos” en el caso de que el árbol sea s-coherente. Son de especial interés aquellos que contengan un número bajo de fallos ya que se deberá proteger al sistema contra dichas combinaciones por ser, con mucha frecuencia las mas probables, y en otras ocasiones las únicas abordables a un coste razonable. Es importante tambien determinar aquellas causas comunes de fallos que de aparecer puedan ocasionar la aparición del TOP, en especial las derivadas de interacciones con el medioambiente del sistema ó las de origen humano.

Evaluación Cuantitativa.- La principal misión del análisis cuantitativo es la determinación de la probabilidad del suceso TOP no deseado. También suele calcularse la probablidad de los Primeros Implicantes ó Grupos de Corte Mínimos de mayor relevancia y las probabilidades de las puertas lógicas intermedias del árbol. Para ello se suelen emplear dos vias alternativas :

Simulación.- Mediante el empleo de procesos aleatorios tipo Monte Carlo para la determinación de secuencias de fallos (vectores de estado). Se emplean códigos que suelen proceder con o sin la determiandción previa de grupos de corte [2], [4].

Metodos Deterministas.- Que recurren a métodos algebráicos y/o algoritmos que recorren el árbol (Botton-up, Top-Down, [1]) según una dirección determinada. Una tendencia mas reciente consiste en la evaluación directa sin grupos de corte acudiendo a expansiones de Shannon de la función booleana [5],[6],[7] y [8], este trabajo implementa un algoritmo que procede de esta forma.

MODELO MATEMATICO

El método desarrollado, basado en el estudio algebraico de la función booleana $\Phi(X)$, asociada al árbol de fallos, proporciona cotas inferiores y superiores para la no disponibilidad puntual del sistema en el instante T:

$$Q(T) = P\{\Phi(X(T)) = 1\} = E\{\Phi(X(T))\}$$

La técnica propuesta parte de la expansión de Shannon de la función booleana en sus formas disyuntiva y conjuntiva normales:

$$\Phi(X) = \sum_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{N} x_i^{e_i^j} \qquad ; \qquad \Phi(X) = \prod_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} x_i^{e_i^j}$$

siendo m y n el número de implicantes e implicados, respectivamente, de las formas completas de Shannon. Al truncar dichas expansiones tomando s implicantes ($s \le m$) y t implicados ($t \le n$) se obtiene la acotación:

$$C_1(s) \le P\{\Phi(X) = 1\} = 1 - P\{\Phi(X) = 0\} \le 1 - C_0(t)$$

donde $C_1(s)$ y $C_0(t)$ designan respectivamente las sumas de las probabilidades de ocurrencia en el Sistema de los s implicantes o t implicados seleccionados. De esta manera se obtiene una secuencia de intervalos encajados conteniendo a la solución exacta $Q(T)$, frente a los intervalos de confianza probabilísticos basados en técnicas de simulación como el Muestreo Daga [2], [4].

El crecimiento exponencial del número de variaciones de valores de las variables booleanas se solventa con la selección de contribuidores (*N*-úplas) de mayor peso (probabilidad); lo que acelera la convergencia de la secuencia de intervalos encajados. El alto coste computacional de un algoritmo de ordenación de los pesos suficientes para acotar $Q(T)$ con tolerancia aceptable, sugiere la busqueda de algún criterio de ordenación que establezca relaciones de desigualdad entre los pesos de dos *N*-úplas dadas, con independencia de las probabilidades básicas. Es decir, un criterio de ordenación intrínseco a la disposición relativa de los ceros y unos en tales *N*-úplas. En este sentido se establece la siguiente:

<u>Proposición</u>: Supuestas ordenadas las variables booleanas en orden creciente de sus probabilidades no mayores que 1/2, entonces, "Condición necesaria y suficiente para que el peso de la *N*-úpla $(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \{0,1\}^N$ sea mayor o igual que el peso de la *N*-úpla $(y_1, y_2, \ldots, y_N) \in \{0,1\}^N$, con <u>independencia</u> de las probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_N$, es que en la matriz $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_N \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_N \end{pmatrix}$, para cada columna $\mathbf{C}_0^1$, el número de columnas precedentes del tipo $\mathbf{C}_1^0$ sea superior al número de columnas precedentes del tipo $\mathbf{C}_0^1$", [9].

La condición anterior es facilmente implementable si se reformula como sigue :

$$\rho(x_1, x_2, \ldots, x_N) \; \phi = \rho(y_1, y_2, \ldots, y_N) \Leftrightarrow \forall i = 1,2,\ldots,N : t.q.: x_i = 1, y_i = 0 : \sum_{j=1}^{i} x_j \leq \sum_{j=1}^{i} y_j$$

donde ρ denota el peso de la *N*-úpla, y $\phi =$ el orden parcial intrínseco.

Como corolarios inmediatos de esta proposición se tiene:

Corolario 1: La ordenación intrínseca entre *N*-úplas respeta el orden lexicográfico reflejado en la tabla de Quine [9].

El recíproco no es cierto, como establece el siguiente:

Corolario 2: Toda cuaterna de *N*-úplas de numeración congruentes con 0,1,2 y 3 (mod.4) forman cadena para el orden parcial intrinseco. Cada *N* -úpla de numeración congruente con 3 (mod.4) y su siguiente en el orden lexicográfico no son comparables en el orden parcial intrínseco.

Corolario 3: $\rho(0,\ldots,0,y_{N-p+1},\ldots,y_N) \; \phi = \rho(0,\ldots,0,1,\ldots,1) \quad ; \quad \forall (y_{N-p+1},\ldots,y_N) \in \{0,1\}^p$

de lo que se sigue la siguiente acotación inferior de la suma de pesos de los contribuidores a seleccionar

$$C_0(t) + C_1(s) = \prod_{i=1}^{N-p}(1-p_i) \sum_{(y_{N-p+1},\ldots,y_N)\in\{0,1\}^p} \prod_{i=N-p+1}^{N} p_i^{\,y_i}(1-p_i)^{1-y_i} \geq 2^p \, \rho(0,\overset{N-p}{\ldots},0,1,\ldots,\overset{p}{1})$$

En particular : $\forall p \in \{1,2,\ldots,N-1\}$ t.q.: $2^p \rho(0,\overset{N-p}{\ldots},0,1,\ldots,\overset{p}{1}) \geq 1-\varepsilon$, se tendrá que las p variables básicas de mayor probabilidad determinan un error en la acotación no mayor que ε .

ALGORITMO

La aplicación del criterio de ordenación intrínseca (proposición) para las *N*-úplas lexicográficamente ordenadas (corolario 1) - una vez fijado el número máximo de variables booleanas de menor peso a las que, al asignar el valor constante x_i=0, se garantiza la precisión deseada (corolario 3) - conduce a la construcción de diversos algoritmos caracterizados por la selección de distintas cadenas en el grafo del orden parcial intrínseco. En esta linea se ha construido un algoritmo que se compone de las siguientes etapas :

1) LECTURA DE DATOS GENERALES
2) ORDENAR LAS PROBABILIDADES BASICAS EN ORDEN CRECIENTE
3) SELECCION DE CADENAS

3.1) Selección del contribuidor 0 (Máximo en la ordenación Intrínseca)

3.2) Selección de la cadena de *N*-úplas de índice 1

3.3) Selección de las cadenas de índice superior a 1 por el criterio de asignación del valor x_i=1 en orden decreciente de las probabilidades básicas

La anterior estrategia de selección de cadenas está fundamentada en las siguientes desigualdades intrínsecas

$$\forall N\ ,\ \forall \sigma\ t.q.: 1 \le \sigma \le N:\ \ [i_1, i_2, ..., i_\sigma]\,\phi = [j_1, j_2, ..., j_\sigma] \Leftrightarrow i_\alpha \le j_\alpha\ ; \forall \alpha = 1, 2, ..., \sigma$$

(para N -úplas del mismo índice)

$$\forall N\ ,\ \forall \sigma_1, \sigma_2\ t.q.: 1 \le \sigma_1 < \sigma_2 \le N:\ [i_1, i_2, ..., i_{\sigma_1}]\,\phi = [j_1, j_2, ..., j_{\sigma_2}] \Leftarrow i_{\alpha_1} \le j_1$$

(para N -úplas de distinto índice)

4) EVALUACION DE LA FUNCION BOOLEANA EN EL VECTOR DE ESTADO
5) DETERMINACION DE COTAS Y ESTIMACION DEL ERROR
6) SI LA PRECISION ALCANZADA NO ES ADMISIBLE, VOLVER AL PASO 3
7) FINAL

El algoritmo es susceptible de paralelización ya que se puede separar las tareas de selección de contribuidores por su índice.

ANALISIS COMPARATIVO

Al analizar las características del método propuesto en relación con los métodos deterministas mas frecuentemente empleados , se observan las siguientes características :

1) El método **de Inclusión-Exclusión** conduce a una expresión algebraica complicada, cuando se evalua la no disponibilidad por cálculo elemental de probabilidades. La independencia e incompatibilidad de los sucesos resultantes de la expansión de Shannon determina, por contra, una expresión algebraica manejable en el método propuesto.

2) El método de los extremos **MIN-MAX** requiere la obtención de primeros implicantes y primeros implicados de la función booleana. En el método de los pesos con ordenación intrínseca basta con el empleo de los implicantes e implicados de la descomposición de Shannon, sin necesidad de obtener los minimales.

3) El método de los **Límites Superior e Inferior** no es válido para estructuras no s-coherentes, y en caso de estructuras s-coherentes requiere de la obtención de Grupos de Corte Mínimos y Caminos Mínimos. Complementando las variables booleanas de probabilidad mayor que ½ en el árbol no s-coherente, se verifican las hipótesis del teorema de ordenación intrínseca.

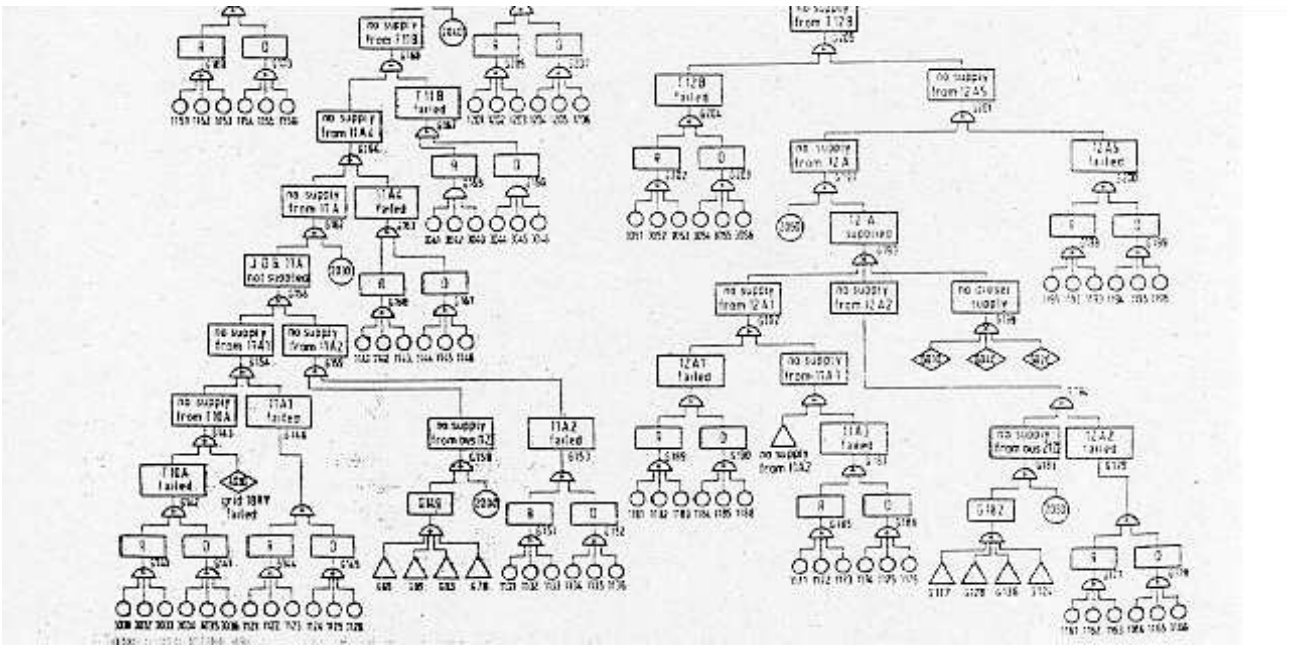
Las consideraciones anteriores, unidas a la de que no se utiliza una descomposición modular del árbol, se pueden resumir en la siguiente afirmación : **el método de los pesos con ordenación intrínseca pertenece a la clase de los caracterizados por su independencia respecto de la lógica del árbol** (salvo en la evaluación final del mismo).

Establecido que el método propuesto evita el coste computacional de la evaluación cualitativa previa, procede compararlo, en cuanto al análisis cuantitativo, con los métodos más usuales también independientes de la lógica del árbol. Para ello ,se han escogido dos problemas

modelo habitualmente referenciados como son: Sistema de suministro eléctrico de una central nuclear [10] y el modelo propuesto por Kumamoto et al [4].

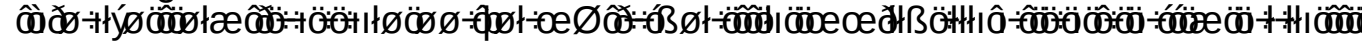
Para ambos ejemplos, los resultados se han comparado con los obtenidos mediante los métodos de simulación [2] Monte Carlo Crudo y Monte Carlo Muestreo Daga Generalizado.

El primer ejemplo se utilizó para estudiar la disponibilidad en el caso en el que la probabilidad de fallo de algún suceso primario fuese muy pequeña y contribuidores de índice mayor que cinco fuesen comparativamente importantes.



Offending Command = image
Error = nametype : rangecheck

Stack =

--nostringval--

638
207