ESTUDIO ANALÍTICO Y NUMÉRICO DE UN OSCILADOR DE VAN DER POL–DUFFING

F. Fernández, E. Freire, L. Pizarro y A.J. Rodríguez–Luis.

Departamento de Matemática Aplicada II, Universidad de Sevilla,
E.S.Ingenieros, Reina Mercedes s/n, 41012 Sevilla.

Abstract

The analysis of the bifurcation set of a bidimensional, polynomial, triparametric system of ordinary differential equations is performed. The mathematical model of the considered electronic oscillator leads to the unfolding of the cubic, non-symmetric Takens-Bogdanov bifurcation. Analytical and numerical tools are combined in this study.

1 Introducción

El sistema dinámico que analizamos no sólo aparece al modelar un circuito electrónico tan conocido como el de Van der Pol–Duffing, sino también en situaciones tan dispares como el modelado de oscilaciones en reactores químicos (Boissonade–De Keper, 1980) o en el estudio de la conducción nerviosa (ecuaciones de Fitzhugh–Nagumo). Su formulación matemática nos conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias bidimensional triparamétrico y polinomial, que es a su vez despliegue de la bifurcación de Takens–Bogdanov cúbica y sin simetría.

Comenzamos el estudio desde un punto de vista analítico, observando que el sistema posee las características que seguidamente se enuncian.

Como bifurcaciones de equilibrios encontramos algunas de tipo silla–nodo y también de Hopf. Esta bifurcación de Hopf presenta degeneración de primer orden, lo que conlleva la aparición de bifurcaciones tipo silla–nodo de órbitas periódicas. En el caso de la bifurcación de Takens–Bogdanov, que se obtiene al intersecarse las curvas antes mencionadas de Hopf y silla-nodo de equilibrios, ésta presenta a su vez una degeneración al coincidir con la cúspide formada por las curvas de silla–nodo de equilibrios (es una degeneración de codimensión tres).

En lo referente a bifurcaciones globales encontramos homoclinas tanto cóncavas como convexas de codimensión uno, así como varias de codimensión dos, a saber, homoclinas dobles y homoclinas cóncavas y convexas en un equilibrio no hiperbólico (silla–nodo). Todos los puntos de codimensión dos mencionados describen curvas en el espacio triparamétrico que parten de la bifurcación de Takens–Bogdanov degenerada. A este conjunto de bifurcaciones se le suele denominar "cross–shaped diagram".

Tras obtener información semiglobal (método de Melnikov) de la homoclinas nos planteamos métodos numéricos para su continuación (tanto las de codimensión uno como las de codimensión dos). Dichos métodos se desarrollan desde un punto de vista geométrico usando un código de continuación de carácter general (PITCON).

La combinación analítica y numérica de nuestro estudio nos permite llegar a un conocimiento completo de la conducta de bifurcaciones del sistema de Van der Pol–Duffing.

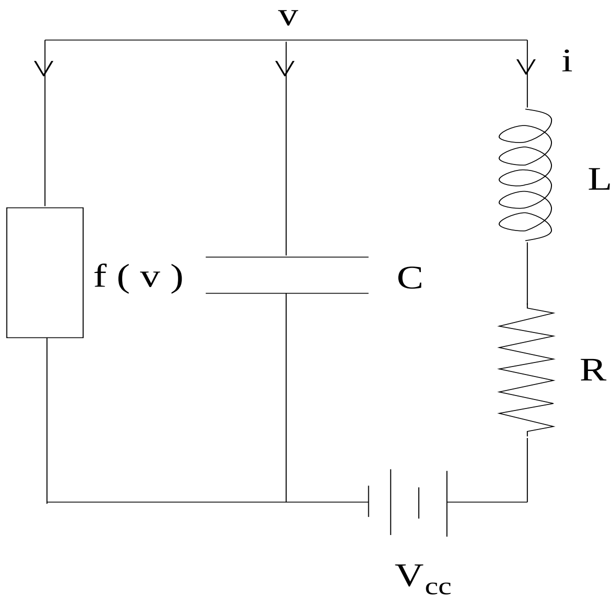

Figure 1: Circuito electrónico.

2 Génesis del Sistema

Tres modelos, uno físico, otro químico y el tercero biológico se encuentran, independientemente, en el origen del sistema que vamos a estudiar:

Un oscilador de Van der Pol–Duffing: En la figura 1 aparece un sistema electrónico consistente en un circuito paralelo RCL (resistencia R, capacidad C e inductancia L) con una conductancia no lineal f(v). Las ecuaciones de estado del circuito viene dadas por

$$\left\{ \begin{array}{rcl} C\dfrac{dv}{dt} & = & -i - f(v) \\ L\dfrac{di}{dt} & = & v - Ri - V_{cc} \end{array} \right. \tag{1}$$

donde supondremos $f(v) = -a_1 v + a_3 v^3$, con $a_1, a_3 > 0$.

En el caso particular en que $R = 0$ y $V_{cc} = 0$ se obtiene el oscilador clásico de Rayleigh–Van der Pol.

Escribiendo el sistema (1) en la forma de una ecuación de Liénard

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + (Lf'(v) + RC)\frac{dv}{dt} + (v + Rf(v)) = V_{cc}$$

y escalando adecuadamente obtenemos

$$\ddot{x} = \mu_1 + \mu_2 x + \mu_3 \dot{x} - x^3 - 3x^2 y$$

o, en forma de sistema,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & \mu_1 + \mu_2 x + \mu_3 y - x^3 - 3x^2 y \end{array} \right. \tag{2}$$

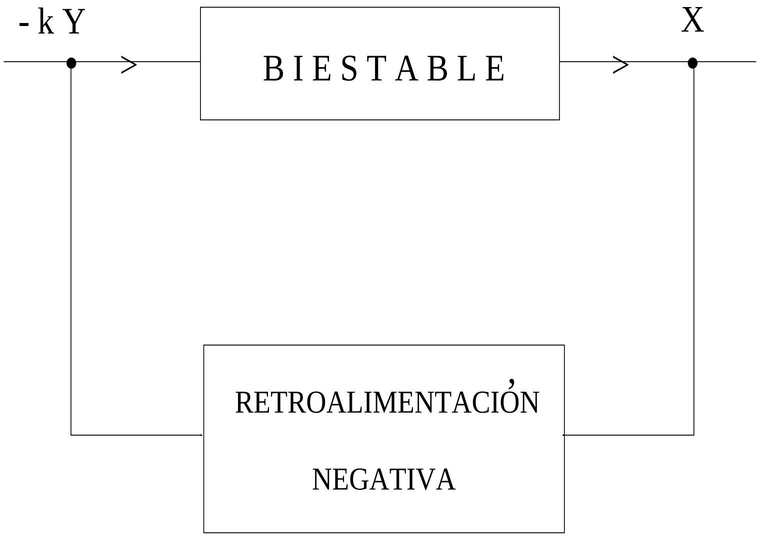

Figure 2: Reactor químico oscilante.

Un reactor químico oscilante: El reactor químico esquematizado en la figura 2 viene modelado por las ecuaciones de Boissonade–de Kepper (vid. [2])

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} &= -\left(X^3 - \mu_0 X + \lambda\right) - KY \\ \tau \dfrac{dY}{dt} &= X - Y \end{cases}$$

con $\mu_0 > 0$,que, mediante una traslación en la variable Y y un escalado, puede ser escrito en la forma dada en (2).

Ecuaciones de Fitzhugh–Nagumo: Este modelo de la conducción nerviosa fue introducido en torno a 1960 como una simplificación del modelo de Hodgkin–Huxley de la actividad eléctrica de una membrana excitable. Sus ecuaciones vienen dadas por el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} &= \alpha + Y + X - \dfrac{X^3}{3} \\ \dfrac{dY}{dt} &= \rho\left(a - X - bY\right) \end{cases}$$

que puede ser escrito, de nuevo mediante una traslación en la variable Y y un escalado, en la forma dada en (2).

3 Análisis de Bifurcaciones

Comenzamos analizando el comportamiento local de (2), que viene descrito en el siguiente teorema.

Teorema 3.1 *El sistema (2) experimenta una bifurcación de:*

1. *silla–nodo de equilibrios en la superficie* $27\mu_1^2 - 4\mu_2^3 = 0$*;*
2. *cúspide de equilibrios en la curva* $\mu_1 = 0$*,* $\mu_2 = 0$*;*

3. *Hopf de codimensión:*

   (a) *uno, en la superficie* $\mu_1 = \pm \left(\frac{\mu_3}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \mp \left(\frac{\mu_3}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \mu_2$ *para* $\mu_3 > \mu_2$,

   (b) *dos, en la curva* $\mu_2 = -\mu_3$ *para* $\mu_3 > \mu_2$.

4. *Takens–Bogdanov en la curva*

$$\begin{cases} \mu_1 &= -2x_0^3 \\ \mu_2 &= 3x_0^2 \\ \mu_3 &= 3x_0^2 \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: Los equilibrios del sistema vienen dados por $(x_0, 0)$, donde $\mu_1 + \mu_2 x_0 - x_0^3 = 0$.

La matriz de la linealización del sistema en $(x_0, 0)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu_2 - 3x_0^2 & \mu_3 - 3x_0^2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

junto con la condición de equilibrio nos permiten deducir fácilmente las expresiones para las diferentes bifurcaciones existentes. El algoritmo desarrollado en [3] para el cálculo de la forma normal de la bifurcación de Hopf nos permite conocer el coeficiente cúbico de aquélla, cuya anulación viene dada por $\mu_2 = -\mu_3$, siendo la bifurcación de Hopf subcrítica cuando $\mu_2 > -\mu_3$ y supercrítica cuando $\mu_2 < -\mu_3$.

De las condiciones de anulación de la traza y el determinante de la matriz (3), se deduce inmediatamente la expresión de la curva de bifurcación de Takens–Bogdanov. ■

Las superficies y curvas correspondientes a los diferentes tipos de homoclinas de codimensión uno y dos, respectivamente, que pueden aparecer van a ser calculadas haciendo uso de la función de Melnikov así como numéricamente. Sea el escalado

$$\begin{aligned} &x \mapsto \varepsilon\, x, \quad \mu_1 = \varepsilon^3\, \nu_1, \quad t \mapsto \varepsilon\, t, \\ &y \mapsto \varepsilon^2\, y, \quad \mu_2 = \varepsilon^2\, \nu_2, \quad \mu_3 = \varepsilon^2 \nu_3 \end{aligned}$$

que transforma (2) en el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \nu_1 + \nu_2 x - x^3 + \varepsilon\,(\nu_3 y - 3x^2 y) \end{cases} \tag{4}$$

que resulta de perturbar el sistema hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \nu_1 + \nu_2 x - x^3 \end{cases}$$

Se verifica el teorema siguiente.

Teorema 3.2 *El sistema (2) presenta homoclinas de codimensión:*

(a) *Uno: derechas, izquierdas, cóncavas superiores y cóncavas inferiores;*

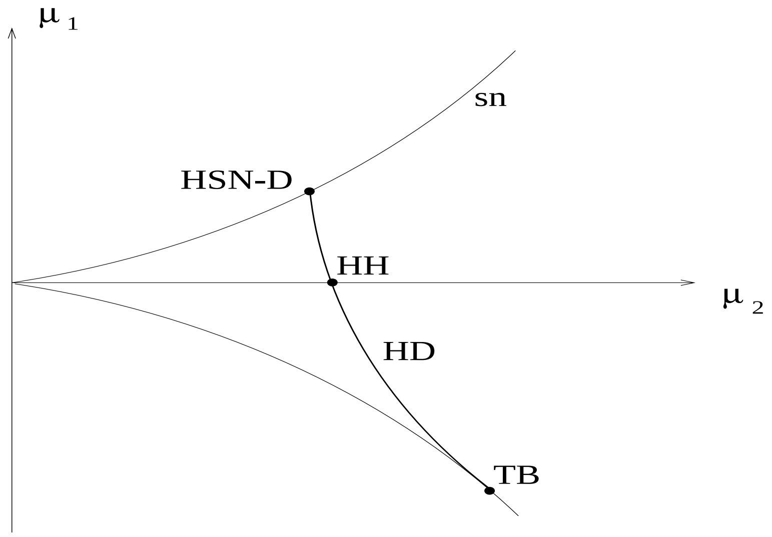

Figure 3: HD=curva de homoclinas derechas (en trazo grueso); sn=silla–nodo de equilibrios; TB=Takens–Bogdanov ($\mu_2 = \mu_3; \theta = \frac{\pi}{2}$); HH=homoclina doble ($\mu_2 = \frac{5}{12}\mu_3; \theta = 0$); $HSN-D$=homoclina silla–nodo derecha ($\mu_2 = \frac{1}{3}\mu_3; \theta = -\frac{\pi}{2}$).

(b) *Dos: dobles y de tipo silla–nodo derechas, izquierdas, cóncavas superiores y cóncavas inferiores.*

Demostración:

El criterio de la divergencia de Andronov (vid. [1]), dado por

$$\int\int_{\mathrm{int}\gamma} \left(\nu_3 - 3x^2\right)\, dx\, dy = 0$$

donde γ es una órbita homoclina derecha, izquierda o cóncava, nos permite obtener, en primera aproximación, curvas de estas órbitas homoclinas en el plano paramétrico (μ_1, μ_2) (para $\mu_3 > 0$). Tomando $\nu_3 = 1$ (es decir, $\mu_3 > 0$) obtenemos la siguiente parametrización de la curva de conexiones homoclinas derechas

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mu_1 & = & \mu_3^{\frac{3}{2}}\nu_1 \\ \mu_2 & = & \mu_3\nu_2 \end{array} \right. \tag{5}$$

donde

$$\nu_1 = -\nu_2 s + s^3 \qquad \nu_2 = \frac{1}{3 + \frac{4}{5}h(\theta)} \qquad s^2 = \frac{sen^2(\theta)}{2 + sen^2(\theta)}\nu_2$$

$$h(\theta) = \frac{cos^5(\theta)}{\left(2 + sen^2(\theta)\right)\left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) sen(\theta) - cos(\theta) + \frac{cos^3(\theta)}{3}\right]}$$

donde $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Para $\theta = -\frac{\pi}{2}$ se obtiene el punto terminal de (5) sobre la curva de sillas–nodo de equilibrios y corresponde, por tanto, a una homoclina de codimensión dos de tipo silla–nodo derecha; para $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ y $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ tenemos homoclinas derechas; para $\theta = 0$ tenemos una homoclina doble y para $\theta = \frac{\pi}{2}$ se obtiene el otro punto terminal de la curva, correspondiente al punto de Takens–Bogdanov (vid. figura 3).

Debido a la simetría que exhibe el sistema, dada por la invarianza al cambio $x \mapsto -x, y \mapsto -y, \mu_1 \mapsto -\mu_1$, la curva de homoclinas izquierdas se obtiene de (5) sin más que cambiar el signo de μ_1. De nuevo, el valor $\theta = -\frac{\pi}{2}$, correspondiente al punto terminal de la curva de homoclinas izquierdas sobre la curva de sillas–nodo de equilibrios, nos permite obtener el punto donde ocurre una homoclina de codimensión dos de tipo silla–nodo izquierda.

El cálculo para las homoclinas cóncavas nos lleva a obtener una parametrización idéntica a la obtenida para las homoclinas derechas sin más que suprimir el término $\frac{\pi}{2}$ que aparece en el denominador de $h(\theta)$ (los puntos de esta curva corresponden para $\mu_1 > 0$ a homoclinas cóncavas superiores y para $\mu_1 < 0$ a homoclinas cóncavas inferiores; en $\mu_1 = 0$, donde la curva se corta con las dos curvas de homoclinas derechas e izquierdas, se obtiene una homoclina doble; los puntos terminales sobre la curva de silla–nodo de equilibrios corresponden a homoclinas de codimensión dos de tipo silla–nodo cóncavas: superior para $\mu_1 > 0$ e inferior para $\mu_1 < 0$). ∎

En la figura 4 mostramos el conjunto de bifurcaciones cualitativo que hemos obtenido para el sistema (2) en el plano paramétrico (μ_2, μ_1), para $\mu_3 > 0$ (con el siguiente significado de los símbolos: TB = Takens–Bogdanov; SN = silla–nodo de órbitas periódicas; sn = silla–nodo de equilibrios; C = cúspide de equilibrios; H=Hopf; H_1 = Hopf degenerada; HD = homoclinas derechas; HI = homoclinas izquierdas; HCS = homoclinas cóncavas superiores; HCI = homoclinas cóncavas inferiores; HH = homoclina doble; $HSN-D$ = homoclina silla–nodo derecha; $HSN-I$ = homoclina silla–nodo izquierda; $HSN-CSD$ = homoclina silla–nodo cóncava superior derecha y $HSN-CII$ = homoclina silla–nodo cóncava inferior izquierda).

En las figuras 5 y 6 aparecen diferentes detalles del conjunto de bifurcaciones de (2) obtenidos numéricamente. Para la continuación de las curvas de homoclinas recogidas en estas figuras hemos aproximado linealmente las variedades estable e inestable de los puntos de silla hiperbólicos, mientras que hemos aproximado cuadráticamente la variedad de centros en el caso de equilibrios no hiperbólicos de tipo silla–nodo, aproximación dada por

$$y = \alpha_1 (x - x_0) + \alpha_2 (x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right)$$

con $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = \frac{3x_0}{\mu_3 - 3x_0^2}$.

En lugar de uno de los parámetros de bifurcación μ_1 y μ_2, hemos tomado como parámetro de continuación la abscisa del equilibrio, x_0, para evitar problemas numéricos en las proximidades de la curva de sillas–nodo de órbitas periódicas.

Hacemos la observación de que las curvas de homoclinas derechas y cóncavas superiores (análoga observación puede hacerse para homoclinas izquierdas y cóncavas inferiores) obtenidas aplicando el criterio de Andronov, se unen sobre la curva de sillas–nodo de equilibrios en el mismo punto $\mu_2 = \frac{\mu_3}{3}$, y ambas con tangente vertical. La teoría de la perturbación falla en este caso a causa de que el equilibrio del sistema sin perturbar es no hiperbólico. El trabajo de Schecter (vid. [5]) predice un contacto de primer orden entre las curvas de silla–nodo de equilibrios y de homoclinas derechas y un contacto similar entre las curvas de sillas–nodo de equilibrios y de homoclinas cóncavas superiores.

Por último, en la figura 7 mostramos las proyecciones en el plano de parámetros (μ_2, μ_3) de las curvas de homoclinas silla–nodo derechas $(HSN-D)$ y cóncavas superiores derechas $(HSN-CSD)$ en el caso $\mu_1 > 0$ (en el caso $\mu_1 < 0$ obtendríamos las mismas proyecciones, pero ahora de homoclinas silla–nodo izquierdas $(HSN-I)$ y de homoclinas silla–nodo cóncavas inferiores izquierdas $(HSN-CII)$).

Agradecimientos
Los autores desean dar las gracias a la Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía por su financiación parcial de este trabajo.

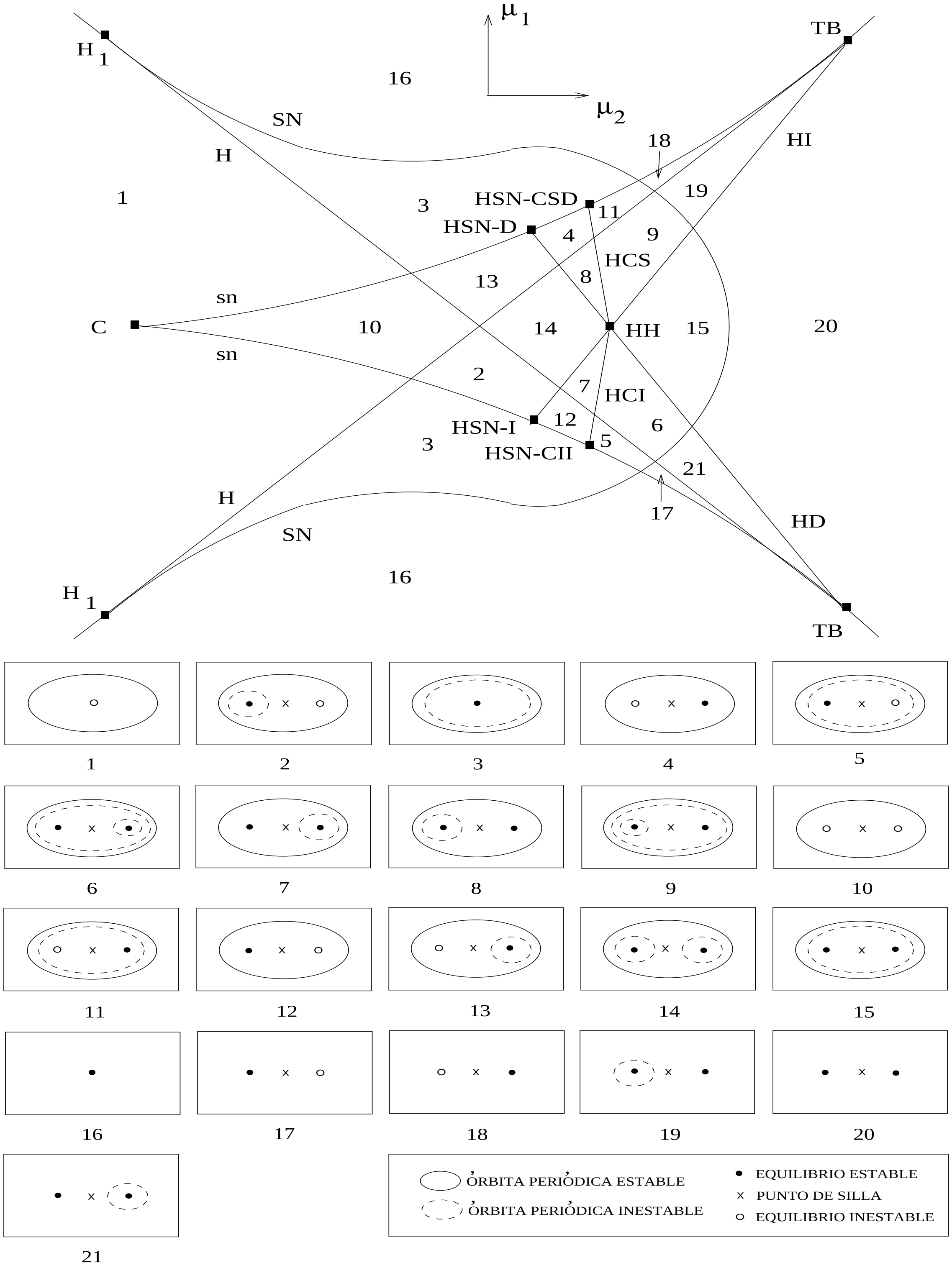

Figure 4: Diagrama *en forma de cruce* para $\mu_3 > 0$ (en el texto aparece el significado de los símbolos).

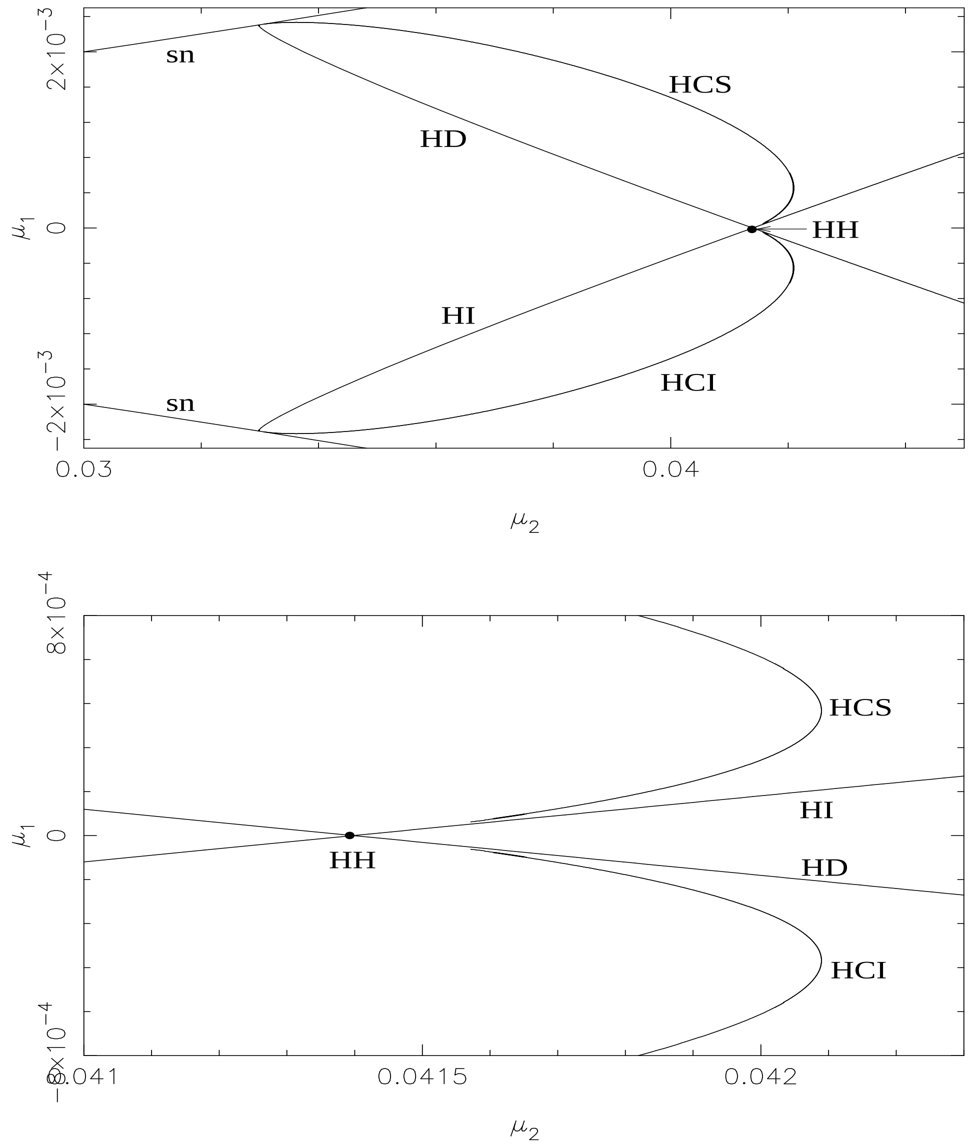

Figure 5: Detalles del diagrama *en forma de cruce*.

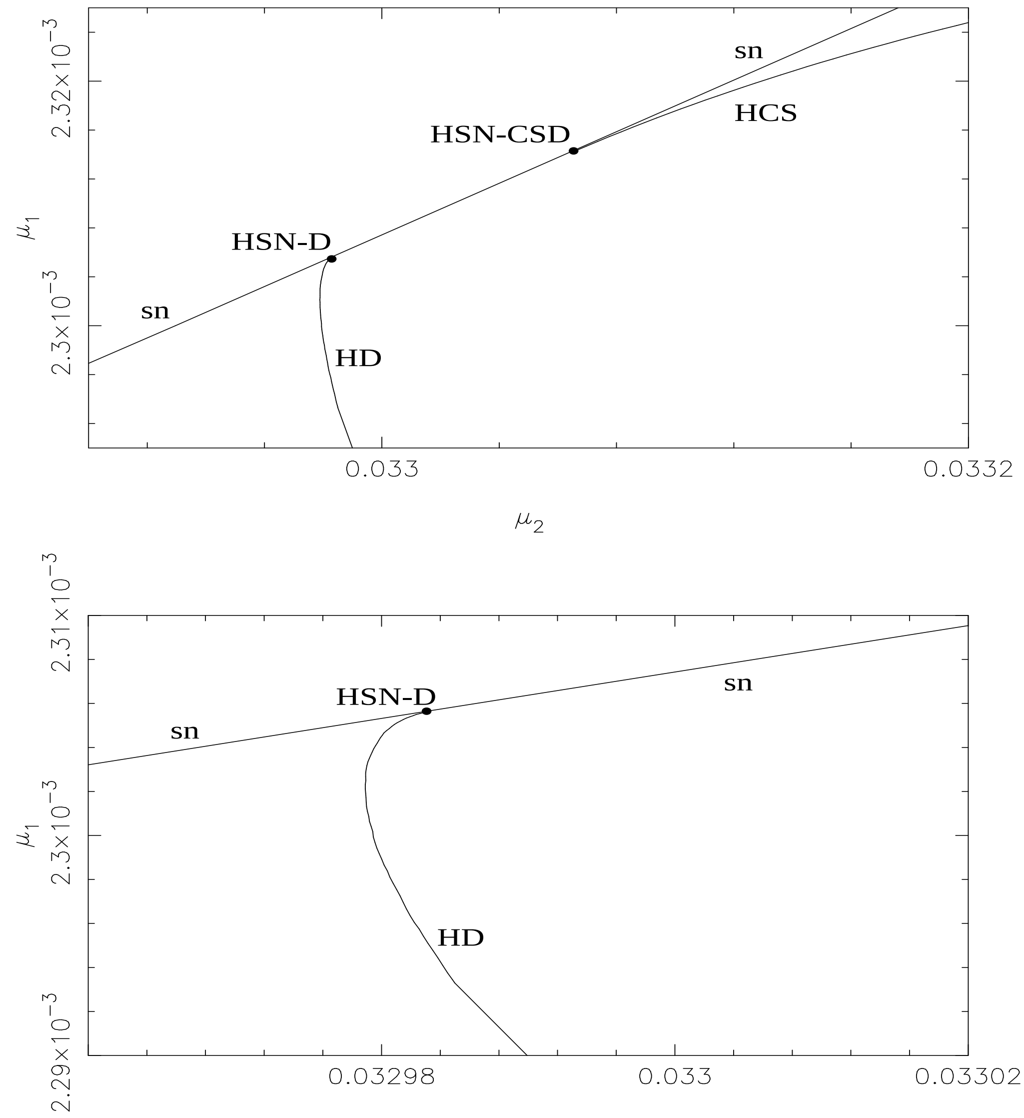

Figure 6: Detalles del diagrama *en forma de cruce*.

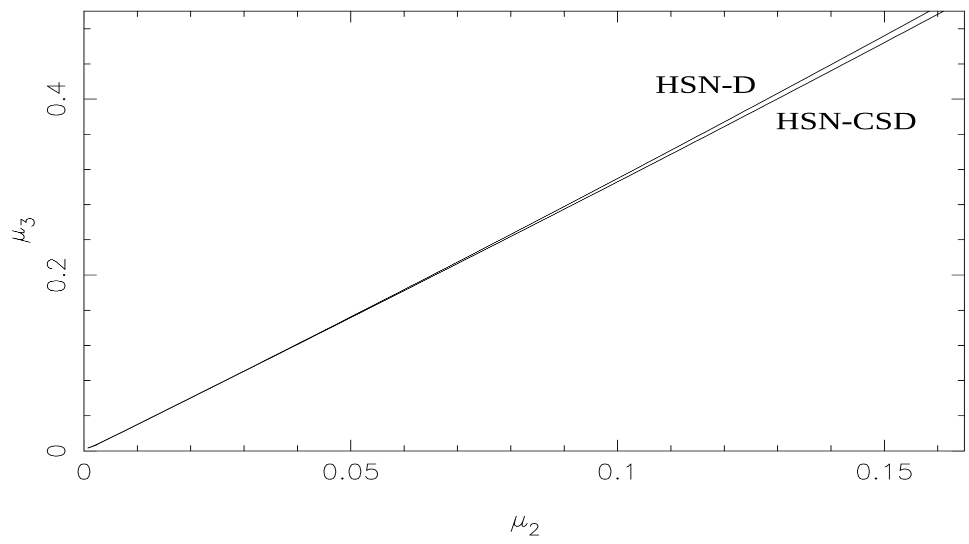

Figure 7: Proyección de las curvas de homoclinas silla–nodo derechas ($HSN-D$) y cóncavas superiores derechas ($HSN-CSD$).

4 Bibliografía

[1] Andronov, A.A.; Leontovich, E.A.; Gordon, I.I.; Maier, A.G., *Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane*, Israel Program of Scientific Translations, Jerusalem (1971).

[2] Boissonade J.; De Kepper, P., *Transitions from Bistability to Limit Cycle Oscillations. Theoretical Analysis and Experimental Evidence in an Open Chemical System*, J. Phys. Chem., n. 84, pp. 501–506 (1980).

[3] Freire, E.; Gamero, E.; Ponce, E., *An Algorithm for Symbolic Computation of Hopf Bifurcation*, Computers and Mathematics, E. Kaltofen & S. M. Watt (eds.) Springer–Verlag, pp. 109–118 (1989).

[4] Guckenheimer, J., *Global Bifurcations in Simple Models of a Chemical Reactor*, Lectures in Applied Mathematics, vol. 24, pp. 163–174 (1986).

[5] Schecter, S., *The Saddle–node Separatrix–loop bifurcation*, SIAM J. Math. Anal., n. 18, pp. 1142–1156 (1987).