SOBRE LOS METODOS MULTINIVELES DE PROYECCION

José Manuel Corrales, Mª Luisa Cuadrado, Mª Isabel Corcuera y Francisco Navarro
Departamento de Matemática Aplicada, E.T.S.I. de Telecomunicación
Universidad Politécnica de Madrid, Ciudad Universitaria, 28040, Madrid

1. Introducción

El estudio cuantitativo de los fenómenos que intervienen en las ciencias sociales, medioambientales, nuevas tecnologías, etc., necesita plantear, analizar y resolver sofisticados modelos matemáticos que, de forma adecuada, simulen las complejas relaciones existentes entre los distintos sistemas que en ellos intervienen [1].

En la práctica, la utilidad de estos modelos depende de la capacidad de desarrollar métodos numéricos que permitan obtener, con la precisión requerida y en forma económica, soluciones aproximadas que los satisfagan. Entre estos métodos, una clase importante es la de los métodos multiniveles o multirredes, dada su capacidad de adaptación a las condiciones del modelo matemático, e.g., un problema de contorno [2].

Los métodos multirredes son técnicas iterativas no estacionarias que obtienen, con eficiencia numérica, una solución aproximada (de un modelo propuesto) asociada a una discretización cuyo soporte es una red inicial de puntos o nodos contenidos en el dominio de definición del modelo. En forma sucinta, estos métodos combinan una técnica iterativa clásica con un algoritmo numérico de corrección que resuelve aproximadamente el modelo pero en redes de puntos más gruesas que la inicial [3].

En los métodos multirredes de proyección, el algoritmo numérico utilizado es del tipo Rayleigh-Ritz o Galerkin [4]. Estos métodos definen la solución aproximada optimizando un funcional (llamado de energía) en espacios de funciones de elementos finitos asociados a distintas redes.

El mayor énfasis del artículo reside en la formalización y sistematización de los métodos multiniveles de proyección, presentando las propiedades y principios básicos que fundamentan su eficacia.

2. Algoritmos de corrección

Sean F un espacio vectorial real, y L un operador lineal definido en F y cuyo recorrido es un subespacio de F.

Se desea resolver el problema inverso representado por la ecuación

$$Lu = f$$

dado $f \in F$.

Esta ecuación es el modelo diferencial o integral de un problema real o bien una discretización de este modelo continuo realizada mediante un método numérico oportuno (diferencias o elementos finitos en cualquiera de sus variantes). En este caso se considera que $F \equiv \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$.

Se asume que existe y es única la solución $u \in D(L)$ del problema planteado para el elemento $f \in F$ dado.

Con objeto de construir una aproximación de esta solución se usan a menudo métodos iterativos. Muchos de estos métodos se basan en algoritmos de corrección, como el siguiente:

Dado un elemento $v \in D(L)$, que se supone aproxima razonablemente a la solución u, se define su (vector) error $e(v) = u - v$ y su (vector) residuo $r(v) = f - Lv$, que estan relacionados mediante la expresión $L\,e(v) = r(v)$.

Si se conoce una aplicación lineal M de F en F tal que aproxima a L y es “facilmente” inversible, es posible calcular una aproximación $e(v)$ del error de v, resolviendo la ecuación

$$M\, e(v) = r(v).$$

Los algoritmos aditivos de corrección se definen como:

$$c(v) = v + e(v) = v + M^{-1}\, r(v) = (I - M^{-1}L)v + M^{-1}f.$$

Si la matriz de corrección M es la misma en todas las iteraciones, los métodos iterativos basados en estos algoritmos de corrección son estacionarios. No lo son si la matriz de corrección depende de la aproximación v : $M(v)$.

Observese que, en la hipótesis de existencia de L^{-1}, los métodos de corrección anteriores son consistentes en todo subconjunto V del subespacio $D(L)$ para el cual $u \in V$ y existen $M(u)$ y $M(u)^{-1}$, pues $c(u) = u$ dado que $r(u) = 0$. Otra forma de decir esto mismo, es decir que u es el punto fijo de la aplicación $(I - M(v)^{-1}L)v + M^{-1}f$, definida en V pues:

$$[I - (I - M(v)^{-1}L)]u = M(v)^{-1}f$$

y existe la matriz inversa de $I - (I - M(v)^{-1}L)$ dado que

$$[I - (I - M(v)^{-1}L)]^{-1} = (M(v)^{-1}L)^{-1} = L^{-1} M(v).$$

3. Algoritmos iterativos clásicos.

Si $L : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ es una matriz $N \times N$ y se descompone como $L = D - F - U$, donde D, F, U son matrices diagonal, triangular inferior y triangular superior asociadas a la matriz L, respectivamente.

Método de Jacobi: $M = D$

$$v = v^{(i)}, \quad c(v) = v^{(i+1)}$$

$$v^{(i+1)} = v^{(i)} + D^{-1}(f - L v^{(i)}) = (I - D^{-1} L) v^{(i)} + D^{-1} f$$

Método de Gauss-Seidel: $M = D - F$

$$\begin{aligned} v^{(i+1)} &= v^{(i)} + (D - F)^{-1} (f - L v^{(i)}) = (I - (D - F)^{-1} L) v^{(i)} + (D - F)^{-1} f \\ &= (D - F)^{-1} U v^{(i)} + (D - F)^{-1} f \\ &= D^{-1} F v^{(i+1)} + D^{-1} U v^{(i)} + D^{-1} f. \end{aligned}$$

4. Algoritmos de corrección multiniveles

Sea $L_n u_n = f_n$ una discretización de la ecuación $Lu = f$ de forma que L_n es una matriz $n \times n$ y que tanto u_n (caso de existir y ser única) como f_n son elementos de $\mathbb{R}^n$. Es lógico que, si L es una matriz $N \times N$, n cumple que $n < N$.

Sea $L(X, Y)$ el espacio vectorial de todas las aplicaciones lineales cuyo dominio es el espacio vectorial X y su recorrido está contenido en el espacio vectorial Y.

Se define $T \in L(F, \mathbb{R}^n)$ como la aplicación restricción de la discretización $L_n u_n = f_n$. Por tanto T es una aplicación lineal sobreyectiva y $f_n = Tf$.

Asi mismo, sea $S \in L(\mathbb{R}^n, F)$ una aplicación lineal inyectiva llamada prolongación.

Algoritmos de corrección de dos niveles:
Dada una aproximación v de u, se calcula su residuo : $f - L v$.
Restringimos el residuo calculado : $T(f - Lv)$
Resolvemos la ecuación : $L_n e_n(v) = T(f - Lv)$
Prolongamos : $e(v) = S e_n(v) = S L_n^{-1} T (f - Lv)$
Corregimos : $c(v) = v + e(v) = (I - S L_n^{-1} TL)v + S L_n^{-1} Tf$.
Por tanto la inversa de la matriz de corrección es : $M^{-1} = S L_n^{-1} T$.

Los algoritmos iterativos multiniveles usan diversas estrategias [3] con objeto de optimizar su comportamiento: Aumentar su velocidad de convergencia y disminuir el número de operaciones a realizar. Estas estratégias usan ciertos procesos numéricos algunos de los cuales son:

1. Procesos de suavización del error.

Se calcula v mediante la iteración de una aproximación inicial dada mediante un método iterativo clásico, a veces llamado de relajación. El objetivo es disminuir en lo posible las componentes de alta frecuencia en el error y en el residuo de v de manera que se puedan aproximar bien en el nivel "n" [3]. Es decir, que la mayor parte de la información de r(v) se transmita a Tr(v).

2. Procesos iterativos de más de dos niveles.

En el algoritmo de corrección de dos niveles descrito anteriormente, es necesario invertir la matriz L_n con objeto de resolver la ecuación $L_n e_n(v) = T r(v)$. Se puede evitar esta inversión si se conoce la discretización del problema propuesto en un tercer nivel $L_\upsilon u_\upsilon = f_\upsilon$, donde $\upsilon < n < N$: se calcula una aproximación de $e_n(v)$ mediante un algoritmo de corrección identico al anterior pero realizado entre los niveles "n" y "υ". Esto se puede repetir tantas veces como sea razonable e intercalando procesos de suavizaci n donde sea oporltuno, generando una estrategia adaptada al problema concreto que se desea resolver.

5. Algoritmos correctivos de proyección.

Supongase que el problema $Lu = f$ se puede representar mediante una ecuación equivalente del tipo $u = Au + b$. Si L es una matriz N x N, esta ecuación representa un método clásico de iteración consistente con $Lu = f$ (vease apartado **3**).

Apliquese a $u = Au + b$ un algoritmo de corrección de dos niveles.

Dado $v \in$ DA), la ecuación residual en el nivel "n" es:

$$e_n(v) = A_n\, e_n(v) + T\,[b - (I - A)\, v]$$

por tanto,

$$c(v) = v + S\, e_n(v) = [I - S\,(I_n - A_n)^{-1}\, T(I - A)]\, v + S(I_n - A_n)^{-1} Tb.$$

Si se introduce ahora el concepto de proyección: $P \in L(F, F)$ es una proyección en F si $P^2 = P$.

Si P es una proyección en F se verifica que la suma directa de su recorrido y su núcleo es F, esto es $F = R(P) \oplus N(P)$. Es decir para todo $f \in F$ existe una única descomposición tal que $f = Pf + (I - P)f$, $Pf \in R(P)$ y $(I - P)f \in N(P)$.

Sean $T \in L(F, \mathbb{R}^n)$ la aplicación restricción y $S \in L(\mathbb{R}^n, F)$ la aplicación prolongación que ligan el nivel "N" con el nivel "n". Si se impone que $TS = I_n$ esto implica que $P = ST$ es una proyección pues $P^2 = STST = S\, I_n T = P$.

Considerese el problema de encontrar $\varphi \in R(P)$ tal que $T\varphi = Tf$, para cualquier $f \in F$ dado.

Este problema tiene solución única $\varphi = Pf$. La demostración es sencilla, pues $T\varphi = Tf$ implica que $ST\varphi = STf$ y como $P = ST$ y $P^2 = P$, se obtiene que, $\varphi = Pf$, que $\exists!$ y esta contenida en $R(P)$.

Los métodos de proyección aproximan la ecuación $Lu = f$ mediante la ecuación $P L \varphi = Pf$. Como $P = ST$ y S es una aplicación inyectiva, se cumple que $T L \varphi = Tf$.

Si además $\varphi \in R(P)$, en el supuesto de que existe solución única de la ecuación aproximada $P\,L\,\varphi = Pf$ también $\exists!\ u_n \in \mathbb{R}^n :\ \varphi = S\,u_n$.
En consecuencia, la discretización en el nivel "n" asociada a este método de proyección es $T\,L\,S\,u_n = Tf$, es decir $L_n = TLS$.

Si aplicamos los conceptos anteriores al algoritmo de corrección resulta el de proyección. Obteniendose que

$$c(v) = v + S((I_n - TAS)^{-1}\,T[b - (I - A)v]$$

$$= [I - S(I_n - TAS)^{-1}\,T(I - A)]v + S(I_n - TAS)^{-1}Tb.$$

Si imponemos la condición que el radio espectral $\rho\ (TAS)\quad \alpha < 1$, se cumple que la discretización $u_n = TAS\ u_n + Tf$ tiene solución única para todo $f \in F$, pues $\exists\ (I_n - TAS)^{-1} = I_n + TAS + (TAS)^2 + \ldots..$

Por tanto,

$$S(I_n - TAS)^{-1}\,T = ST + STAST + STASTAST + \ldots =$$

$$= P + (PA)P + (PA)^2\,P + \ldots = (I - PA)^{-1}\,P$$

luego,

$$I - S(I_n - TAS)^{-1}T(I - A) = I - (I - PA)^{-1}\,P(I - A) = (I - PA)^{-1}\,(I - P),$$

en consecuencia, se obtienen las expresiones

$$c(v) = v + (I - PA)^{-1}\,P[b - (I - A)v] = (I - PA)^{-1}\,(I - P)v + (I - PA)^{-1}Pb$$

$c(v) = PA\,c(v) + (I - P)v + Pb$, de donde
$P\,c(v) = PA\,c(v) + Pb$
$(I - P)\,c(v) = (I - P)v$

Como además, $u = u + (I - PA)^{-1}\,P[b - (I - A)u]$, se cumple que

$$u - c(v) = (u - v) - (I - PA)^{-1}\,P(I - A)\,(u - v) = (I - PA)^{-1}\,(I - P)\,(u - v).$$

Para toda norma $||.||$ definida en F se cumplen las desigualdades siguientes:

$$\rho\ [(I - PA)^{-1}\,(I - P)]\quad ||\,I - PA\,||^{-1}\,||\,I - P\,||\qquad (1 - ||\,P\,A\,||)^{-1}\,||\,I - P\,||$$

$$(1 - \alpha)^{-1}\ (1 + ||\,P\,||).$$

Son casos particulares de los anteriores en los cuales para cada elemento $v \in V$ subconjunto de D(A) inicial de un algoritmo correctivo de proyección, la aplicación restricción $T \in L\,(F, \mathbb{R}^n)$ es estacionaria pero la aplicación prolongación no lo es : $S(v) \in L\,(\mathbb{R}^n, F)$ de forma que para todo $v \in V$ se cumple que $TS(v) = I_n$ y $P(v) = S(v)T$ es una proyección en F que además satisface la igualdad $P(v)v = v$.

Por tanto, se cumple que $c(v) = (I - P(v)\,A\,)^{-1} P(v)\,b$,

es decir

$c(v) = P(v)\,Ac(v) + P(v)\,b$ y $c(v) = P(v)\,c(v)$.

Por tanto, $u - c(v) = (I - P(v)\,A\,)^{-1}\,(I - P(v))u$

Luego $|| u - c(v)|| \quad || I - P(v)\,A||^{-1}\,|| I - P(v)\,u||$

$$(1 - \alpha\,)^{-1}\,(1 + || P(v)||\,)\,d(u, R(P(v)))$$

siendo $d(u, R(P(v))) = \inf\{|| u - \varphi|| , \quad \text{para todo } \varphi \in R(P(v))\}$.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido posible gracias a las sugerencias y estimulos del profesor D. Carlos Vega.

Esta investigación ha sido parcialmente subvencionada por el Proyecto C106/91 de la Consejería de Cultura de la Comunidad Autónoma de Madrid.

Bibliografía

[1] Arfken, G.: Mathematical Methods for Physicists, 3rd ed. Academic Press, New York (1985).

[2] Brandt, A.: Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. Math. Comp., 31, 333-390.

[3] Hackbusch, W.: Multi-grid Methods and Applicatións. Springer-Verlag, Berlin (1985).

[4] McCormick, S.F.: Multi-level Projection Methods for Partial Differential Equations. SIAM (1992).