ÍNDICE Y MULTIPLICIDAD

Anna Cima [1], Armengol Gasull[2] y Joan Torregrosa [2]

(1) Departament de Matemàtica Aplicada II, E. T. S. d'Enginyers Industrials de Terrassa, Universitat Politècnica de Catalunya, Colom, 11. 08222 Terrassa. Barcelona, Spain.

(2) Departament de Matemàtiques, Edifici C, Universitat Autònoma de Barcelona, 08193 Bellaterra, Barcelona, Spain.

Abstract

Dado un cero de una aplicación analítica f de $\mathbb{R}^n$ en si mismo, Eisenbud y Levine dan una cota para el índice de f en este punto a partir de su multiplicidad. En este trabajo se demuestra que esta cota es óptima para el caso $n = 2$, y que se puede mejorar para dimensión superior.

1 Introducción

Sea $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ una aplicación suficientemente derivable, tal que $f(0) = 0$ y con el origen aislado en $f^{-1}(0)$. Entonces, el índice de f en este cero, se puede calcular como la suma de los signos del Jacobiano de f en todas las antiimágenes de un valor regular de f próximo al origen. La multiplicidad, $\mu_0[f]$, es el número de antiimágenes complejas de un valor regular próximo a 0.

En 1977, Eisenbud y Levine [EL], prueban las siguientes relaciones entre el índice y la multiplicidad de una aplicación f en el origen,

$$\begin{aligned} |\mathrm{ind}_0[f]| &\leq (\mu_0[f])^{1-\frac{1}{n}}, \\ \mathrm{ind}_0[f] &\equiv \mu_0[f] \pmod 2. \end{aligned} \tag{1}$$

Conocidas estas dos relaciones, surge la siguiente pregunta: Fijada la dimensión, para cada valor $\mu = \mu_0[f]$, ¿ que valores puede tomar el índice de f en el origen?

En el caso $n = 2$, el siguiente Teorema, responde a la pregunta formulada.

Teorema 1.1 *Para cada par de valores $\mu \in \mathbb{N}$ y $i \in \mathbb{Z}$ que satisfacen las condiciones $|i| \leq \sqrt{\mu}$ y $i \equiv \mu \pmod 2$, existe una aplicación diferenciable $f : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tal que $\mu_0[f] = \mu$ y $\mathrm{ind}_0[f] = i$.*

La demostración de este resultado consiste en definir una ecuación diferencial $x' = f(x)$ que tenga el origen como punto crítico, con multiplicidad μ y índice i. El punto clave de la demostración es usar el método de Poincaré para calcular el índice del punto crítico.

A partir de la técnica de Blow-up para el estudio local de puntos críticos, se da el retrato local en el origen de la ecuación anterior y se muestra que no todos los puntos críticos con la misma multiplicidad, μ, y índice máximo tienen el mismo retrato local.

Para dimensiones mayores, $n > 2$, se puede probar que la cota dada en (1) no es la óptima, en general.

2 Multiplicidad local

Recordemos que dada una aplicación $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, para $r \geq 1$, diremos que un punto $x \in \mathcal{U}$ es *regular* si la aplicación $df(x)$ es biyectiva en $\mathcal{U}$, sinó diremos que x es un *punto crítico*. Un punto $c \in \mathbb{R}^n$ es un *valor regular* si todos los puntos $x \in f^{-1}(c)$ son puntos regulares. Entonces tenemos que

Teorema 2.1 (Bertini-Sard [AVG]) *Si $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es de clases $\mathcal{C}^\infty$ entonces el conjunto de valores regulares de f es denso en $\mathbb{R}^n$.*

Dado un punto $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(a) = 0$, se dice que a es un *cero simple* de f si el jacobiano en a es diferente de cero ($(\partial f/\partial x)|_a \neq 0$), sinó el punto a se dice que es *múltiple*.

Dada una aplicación f, como las consideradas con anterioridad, tomamos la aplicación $g(x) = f(x) - \varepsilon$, entonces se puede probar que en un entorno $\mathcal{U}$ del origen, y casi para todo ε, la aplicación g en $\mathcal{U}$ solo tiene ceros simples complejos, y este número no depende de la elección del entorno ni del ε. Así podemos dar la siguiente definición,

Definición 2.2 ([AVG]) *El número de antiimágenes, a $\mathbb{C}^n$, que puede admitir un valor regular de f suficientemente cerca de 0 es igual a la multiplicidad de f en 0.*

Así es claro que la multiplicidad de un cero simple es 1 y que la de un cero múltiple es mayor que 1.

Podemos dar otras definiciones equivalentes de multiplicidad local de un cero de una aplicación, de manera que el cálculo efectivo de esta sea mucho más sencillo, aunque las definiciones sean más complicadas y sofisticadas.

Dadas f y $g \in \mathcal{C}^\infty$ y un punto a, tenemos la siguiente relación de equivalencia, $f \approx g$ si y solo si existe un entorno $\mathcal{U}$ de un punto a tal que $f \equiv g$ en $\mathcal{U}$. Con esta relación tomamos un representante de cada clase $[f]_a$ y lo denominamos *germen* de f en a. Con esta definición no es restrictivo suponer que $a = 0$ y escribiremos $[f]$ en lugar de $[f]_0$, para simplificar la notación. Consideremos el anillo $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \{[f], f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, f \in \mathcal{C}^\infty\}$, y el ideal $\mathcal{M}_0^\infty = \{[f] \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) : f(0) = 0\}$, como este es el único ideal maximal de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es un anillo local.

Definición 2.3 [AVG] *Decimos anillo local de f en 0 al cociente del anillo de funciones $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ por el ideal generado por las componentes de f, (f):*

$$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)/(f).$$

Además $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)/(f)$ hereda la estructura de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con ideal maximal la clase de $\mathcal{M}_0^\infty$ en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)/(f)$.

Definición 2.4 [AVG] *Decimos multiplicidad de f en 0 a la dimensión del anillo local de f en 0, es decir:*

$$\mu_0[f] = \dim \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)/(f).$$

Si $\mu_0[f] < \infty$ entonces diremos que f és una aplicación de multiplicidad finita, o bien una aplicación finita.

Para aplicaciones de clase $\mathcal{C}^\infty$, podemos considerar su expresión en serie de Taylor, y tomamos la aplicación que define f pensada en $\mathbb{C}^n$, $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, entonces f es holomorfa, y con el origen como cero aislado. De esta manera podemos dar otra definición equivalente de multiplicidad local de un cero de f, ja que se cumple que

$$\mu_0[f] = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{df_1}{f_1} \wedge \cdots \wedge \frac{df_n}{f_n},$$

donde $\Gamma = \{z : |z| = \varepsilon, |f_2(z)| = \ldots = |f_n(z)| = \delta\}$ con $\delta << \varepsilon$. Ver [AY, T].

En el caso holomorfo, si el anillo local en el origen tiene dimensión finita sobre $\mathbb{C}$, entonces 0 es un punto aislado en $f^{-1}(0)$. En cambio, en el caso real analítico, el anillo local en el origen tiene dimensión sobre $\mathbb{R}$ si y solo si 0 es un punto aislado en la antiimagen compleja del 0 por f.

Por ejemplo, la aplicación $f = e^{-1/x^2}$ es infinitamente diferenciable y admito un anillo local de dimensión infinita (el mismo que $f \equiv 0$) en un punto que es aislado en la antiimagen real del 0. Así diremos que la aplicación $f \equiv 0$ tiene multiplicidad infinita.

Veamos en un ejemplo como calcular la multiplicidad de f en 0, a partir de las diferentes definiciones, equivalentes, de multiplicidad.

Ejemplo 2.5 *La aplicación $f = (xy, x^2 - y^2)$ en el origen tiene multiplicidad cuatro.*

Si resolvemos el sistema $xy = \varepsilon_1, x^2 - y^2 = \varepsilon_2$, como $4\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \neq 0$ obtenemos las cuatro antiimágenes por f de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $(\pm\sqrt{\frac{\varepsilon_2 \pm \sqrt{\varepsilon_2^2+4\varepsilon_1^2}}{2}}, \pm\sqrt{\frac{-\varepsilon_2 \pm \sqrt{\varepsilon_2^2+4\varepsilon_1^2}}{2}})$, que son puntos regulares de f.

O bien, del hecho que $1, x, y, x^2$ es una base de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)/(f)$.

O también, podemos calcular $\mu_0[f] = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \left(\frac{df_1}{f_1} \wedge \frac{df_2}{f_2}\right)$, donde $\Gamma = \{z = (z_1, z_2) : |z| = \varepsilon, |f_2(z)| = \delta\}$ con $\delta << \varepsilon$, donde $f_1(x,y) = xy$ y $f_2(x,y) = x^2 - y^2$. Así tenemos que la multiplicidad será:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \left(\frac{d(xy)}{xy} \wedge \frac{d(x^2-y^2)}{x^2-y^2}\right) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \left(\frac{ydx + xdy}{xy} \wedge \frac{2xdx - 2ydy}{x^2-y^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \frac{-2y^2 - 2x^2}{xy(x^2-y^2)} dx \wedge dy = \frac{-2}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \left(\frac{y}{x(x^2-y^2)} \frac{x}{y(x^2-y^2)}\right) dx \wedge dy =$$

$$= \frac{-4}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \frac{y}{x(x^2-y^2)} dx \wedge dy = 4.$$

Ya que se cumple que $\int_\Gamma \frac{y}{x(x^2-y^2)} dx \wedge dy = \int_\Gamma \frac{x}{y(x^2-y^2)} dx \wedge dy$ i además tenemos que $\frac{1}{(2\pi)^2} \int_\Gamma \frac{x}{y(x^2-y^2)} dx \wedge dy = \frac{1}{2\pi} \int_{|y|=\delta} \frac{-1}{y} dy = -1$. ∎

Como en general, ninguna de las definiciones son aplicables de forma sencilla y trivial, podemos dar un compendio de propiedades muy útiles para el cálculo efectivo en ejemplos concretos.

Proposición 2.6 *Dada $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ una aplicación finita, entonces*

a) El anillo local de f en 0, así como la multiplicidad de f en 0 son independientes de la elección de las coordenadas.

b) Si para k suficientemente grande, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ coincide con f hasta orden k entonces se cumple que $(f) = (g)$.

c) $\mu_0[f] = 0$ si y solo si $f(0) \neq 0$.

d) Si f es polinomial, y cada componente f_i tiene grado l_i, entonces tenemos que $\mu_0[f] \leq \prod_{i=1}^n l_i$.

e) Si $g_i = f_i + \sum\limits_{j<i} A_j^i f_j$ entonces $\mu_0[f] = \mu_0[g]$.

f) Si para alguna i se cumple que $f_i = hg_i$ con $h(0) \neq 0$ entonces si tomamos $g = (f_1, \ldots, g_i, \ldots, f_n)$ tenemos que $\mu_0[f] = \mu_0[g]$.

g) Si $f_i = f_i^{k_j} + T.O.S.$ entonces se cumple que $\mu_0[f] \geq \prod_{j=1}^n k_j$ y $\mu_0[f] = \prod_{j=1}^n k_j$ si y solo si $f_i^{k_j} = 0$ solo tiene solución trivial en $\mathbb{C}^n$, donde $f_i^{k_j}$ es la parte homogénea de f_i de grado k_j.

h) Si para algún i se cumple que $f_i = g_{i_1} g_{i_2}$, tomando $g_1 = (f_1, \ldots, g_{i_1}, \ldots, f_n)$ y $g_2 = (f_1, \ldots, g_{i_2}, \ldots, f_n)$ tenemos que $\mu_0[f] = \mu_0[g_1] + \mu_0[g_2]$.

i) *Para cualesquiera* $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ *aplicaciones finitas, se cumple que* $\mu_0[f \circ g] = \mu_0[f] \cdot \mu_0[g]$.

j) *Dada una familia uniparamétrica* h_t, *continua en* t *en un entorno* $\mathcal{U} \setminus \{0\}$ *de* 0, *tal que* $h_0 = \frac{f}{\|f\|}$, *y* $h_1 = \frac{g}{\|g\|}$ *entonces tenemos que* $\mu_0[f] = \mu_0[g]$.

DEMOSTRACION.

a) Como se puede dar una definición de anillo local a partir de la variedad de ceros de f, $f = 0$, independientemente de la expresión de f, es claro que tanto el anillo local como la multiplicidad son independientes de la elección de coordenadas, ver el Capítulo 1 Sección 4 de [AVG].

b) Probado en [EL].

c) $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) = (f) \Leftrightarrow 1 \in (f) = (f_1, \ldots, f_n) \Leftrightarrow 1 = \sum_i h_i f_i \Leftrightarrow f(0) \neq 0$.

d) Es claro del Teorema de Bezout, ver [AY] pág.180.

e) y *f*) son claros ya que $(f) = (g)$.

g) , *h*) y *i*) son probadas en [AY] pág. 176.

j) De la propiedad *b*) nos podemos reducir al caso en que f es polinomial, y como la multiplicidad real y la compleja coinciden, y para aplicaciones holomorfas ya es cierto, se cumple la propiedad. Ver [AVG] pág.73-74 .

∎

3 Índice Real

Recordemos ahora la definición de índice de una aplicación en un punto, así como algunas propiedades, extraídas de [AVG], [EL] y [L].

Dada una aplicación f continua y un punto a, no es restrictivo suponer que $a = 0$, podemos definir el índice real de f en 0 a partir del grado topológico [1], así tenemos que,

Definición 3.1 *Sea* $B_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ *una bola centrada en* 0 *y de radio* ε, *tal que* $f^{-1}(0) \cap B_\varepsilon = \{0\}$, *y sea* $S_\varepsilon^{n-1} = \partial B_\varepsilon$ *su frontera. Fijada una orientación en* $\mathbb{R}^n$, *definimos el índice de* f *en* 0, $\text{ind}_0[f]$ *como el grado de la aplicación*

$$\frac{f}{\| f \|} : S_\varepsilon^{n-1} \longrightarrow S_1^{n-1}.$$

[1] En el caso $n = 1$, el grado de $f : S^1 \longrightarrow S^1$ es el número de vueltas que da $f(x)$ a lo largo de S^1, cuando x da una vuelta a S^1, en el caso de dimensión mayor, se puede pensar como las veces que queda recubierto S^n por la imagen por f de S^n. Ver [D].

Para funciones diferenciables, podemos dar una definición equivalente de índice,

Definición 3.2 *Si f es diferenciable, $f(0)=0$ y p es un valor regular de f suficientemente cercano de 0, entonces tenemos que*

$$\mathrm{ind}_0[f] = \sum_{x\in f^{-1}(p)\cap\mathbb{R}^n} \mathrm{sgn} J_f(x),$$

donde $J_f(x)$ es el Jacobiano de f en el punto x, y donde sgn *es la función signo.*

Veamos, como hemos hecho en la sección anterior, algunas propiedades interesantes de la función índice:

Proposición 3.3 *Dada $f:(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,0)$, entonces se cumple que*

a) *El $\mathrm{ind}_0[f]$ es invariante por cambios de coordenadas no singulares y diferenciables.*

b) *Dada una familia uniparamétrica h_t, continua en t en un entorno $(\mathcal{U}\setminus\{0\})$ de 0, tal que $h_0=\frac{f}{\|f\|}$, y $h_1=\frac{g}{\|g\|}$ entonces tenemos que $\mathrm{ind}_0[f]=\mathrm{ind}_0[g]$.*

c) *Si f es una aplicación finita y para k suficientemente grande, $g:(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,0)$ coincide con f hasta orden k entonces se cumple que $\mathrm{ind}_0[f]=\mathrm{ind}_0[g]$.*

d) *Sea $B\subset\mathbb{R}^n$ una bola que no contiene ningún otro cero, excepto el origen, de f, de multiplicidad finita, i sea f_ε una familia uniparamétrica, diferenciable respecto ε, tal que $f_0=f$. Entonces, si ε es suficientemente pequeño, la suma de los índices de los ceros de f_ε en la bola B es igual al índice de f en el origen.*

e) *Sea f, el germen de una aplicación finita, y sea $J_0\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)/(f)$ el germen representante de la clase del Jacobiano, J, de f. Si $\phi:\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)/(f)\longrightarrow\mathbb{R}$ es un funcional lineal tal que $\phi(J_0)>0$, y si $<,>=<,>_\phi$ es la forma bilineal simétrica definida por $<g,h>=\phi(gh)$ para $g,h\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)/(f)$, entonces tenemos que*

$$\mathrm{ind}_0[f] = \text{signatura} <,> .$$

A partir de las propiedades de las Proposiciones 2.6 y 3.3, se puede comprobar el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3.4 *Sea $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ definida como*

$$(2x(x-2y-2z), 2y(y-2x-2z), -z(z-2x-2y)(z+4x+4y)), \tag{2}$$

entonces se cumple que $\mu_0[f]=12$ y $\mathrm{ind}_0[f]=4$.

Finalmente, recordemos que en el caso particular del plano, tenemos además, otro método para calcular el índice de un campo vectorial, dado por Poincaré.

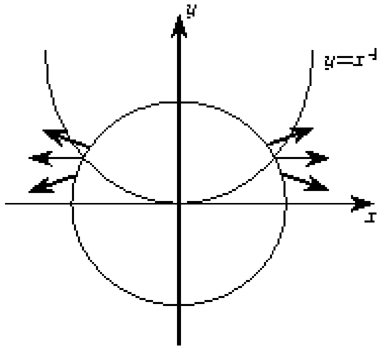


Figure 1: Aplicación del método de Poincaré al cálculo del índice de un campo en el plano.

Proposición 3.5 *Dada C una curva cerrada y simple de $\mathbb{R}^2$, sea X un campo vectorial definido en una región abierta simplemente conexa de $\mathbb{R}^2$, que contenga la curva C, y sea L una línea recta del plano. Supongamos que existe un número finito de puntos $M_k (k = 1, \ldots, n)$ de C tal que el vector $X(M_k)$ es paralelo a L. Sea M un punto que describe la curva en el sentido horario, y sea p (resp. q) el número de puntos M_k tales que el vector $X(M)$ corta la dirección de L en el sentido horario, (resp. antihorario). Entonces el índice de X en C es $\frac{p-q}{2}$. Si tenemos un punto crítico aislado de X, entonces el índice del punto se toma como el índice de cualquier curva, sin puntos críticos, cerrada y simple que lo envuelva solo a el.*

Como ilustración de este método veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.6 *La aplicación $f = (-y^2 + x^3 y, y - x^4)$ en el origen tiene índice* 1.

Tomando una circunferencia de radio suficientemente pequeño, δ, y considerando los puntos de esta en que el campo tiene una dirección fijada, por ejemplo la horizontal, tenemos solo dos puntos de intersección entre puntos de esta en que el campo tiene una dirección fijada, por ejemplo la circunferencia $x^2 + y^2 = \delta^2$ y la curva $y - x^4 = 0$, estudiando como es el campo sobre al circunferencia en estos dos puntos, ver la Figura 1, es claro que el índice será $\frac{1+1}{2} = 1$

4 La multiplicidad y el índice en el plano real

Como ya hemos avanzado en la Introducción tenemos una cota para el índice de f en el origen a partir de la multiplicidad del origen como cero de f.

Veremos en esta sección una demostración del Teorema 1.1, que nos garantiza la inmejorabilidad del resultado en el plano, y lo haremos a partir de dar un ejemplo de aplicación f, con multiplicidad y índice en el origen, $\mu_0[f]$ y $\mathrm{ind}_0[f]$ respectivamente, que cumplen

$$|\mathrm{ind}_0[f]| \leq \sqrt{\mu_0[f]}, \text{ i}$$

$$\mathrm{ind}_0[f] \equiv \mu_0[f] \pmod 2,$$

como únicas restricciones.

Proposición 4.1 *Sean $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ polinomios homogéneos de grado $n-1$, tales que $P(1,\lambda)$ i $Q(1,\lambda)$ tienen $n-1$ raíces positivas diferentes p_i y q_i para $i = 1,\ldots,n-1$ respectivamente, tales que $0 < p_i < q_i$ para todo i. Entonces la aplicación*

$$f = (xP(x,y), xQ(x,y) + \varepsilon y^{k-n(n-1)}),$$

con k entero y $k \geq n^2$, $k \equiv n \pmod 2$ y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, tiene $\mathrm{ind}_0[f] = n$ y $\mu_0[f] = k$.

DEMOSTRACION. Del enunciado es claro que podemos escribir P y Q como,

$$P(x,y) = (y - p_1 x)\cdot \ldots \cdot (y - p_{n-1}x),$$

$$Q(x,y) = (y - q_1 x)\cdot \ldots \cdot (y - q_{n-1}x).$$

Veamos primero que la multiplicidad en el origen es $\mu_0[f] = k$.

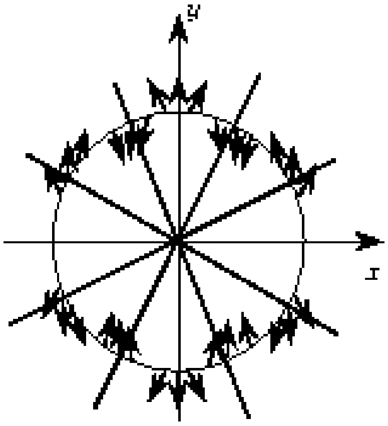
Usando las propiedades de la multiplicidad de f en un punto, Proposición 2.6 tenemos que $\mu_0[(xP(x,y), xQ(x,y)+\varepsilon y^{k-n(n-1)})] = \mu_0[(x, xQ(x,y)+\varepsilon y^{k-n(n-1)})] + \mu_0[(P(x,y), xQ(x,y)+\varepsilon y^{k-n(n-1)})] = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_0[(y - p_i x, xQ(x,y)+\varepsilon y^{k-n(n-1)})] + \mu_0[(x, \varepsilon y^{k-n(n-1)})] = (k - n(n-1))\mu_0[(x,\varepsilon y)] + \sum_{i=1}^{n-1} n = k - n(n-1) + n(n-1) = k$, donde hemos usado que $\mu_0[(x,\varepsilon y)] = 1$ por que el origen de $(x,\varepsilon y)$ es aislado y $\mu_0[(y - p_i x, xQ(x,y)+\varepsilon y^{k-n(n-1)})] = n$. Este segundo resultado es debido a que si $k = n^2$ entonces tenemos que $\prod_{j=1}^{n-1}(p_i - q_j) + \varepsilon p_i^n \neq 0$ para ε suficientemente pequeño y para todo $i = 1,\ldots,n-1$, y si $k > n^2$ entonces como $p_i \neq q_i$ para ningún i, tenemos que $(y - p_i x) \not| \, xQ(x,y)$.

A partir de la definición de índice de Poincaré veamos ahora que el índice en el origen es n,

Consideremos la circunferencia $C = \{x^2 + y^2 = \delta^2\}$ con δ pequeño para que el origen sea un único punto crítico en el interior de C. Tomando la dirección vertical, es decir donde $xP(x,y) = 0$, y buscando en que puntos de C el campo es vertical, obtenemos los puntos de intersección de C con $x = 0, y = p_i x$ $i = 1,\ldots,n-1$, y estudiando como es el campo cerca de estos puntos,

$f|_{x=0} = (0, \varepsilon y^{k-n(n-1)})$ y

$f|_{y=p_i x} = (0, x^n(p_i - q_1)\cdot \ldots \cdot (p_i - q_{n-1}) + \varepsilon x^{k-n(n-1)} p_i^{k-n(n-1)}).$



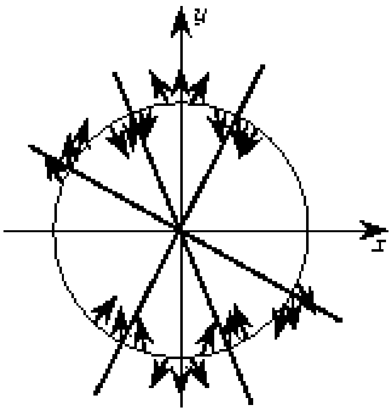


Figure 2: Índice a partir del método de Poincaré, para n par $(n=4)$ y n impar $(n=5)$, respectivamente.

podemos concluir que tomando

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{\min\limits_{j=1,\dots,n-1} |\prod\limits_{i=1}^{n-1}(p_j - q_i)|}{\max\limits_{j=1,\dots,n-1} |p_j|^n},$$

entonces tenemos que

$$\operatorname{sgn}(x^n(p_i - q_1)\cdot \ldots \cdot (p_i - q_{n-1}) + \varepsilon x^{k-n(n-1)} p_i^{k-n(n-1)}) =$$

$$= \operatorname{sgn}(x^n(p_i - q_1)\cdot \ldots \cdot (p_i - q_{n-1})),$$

para todo $i = 1, \dots, n-1$. Ya que si $k > n^2$ como x es tal que $x^2 + y^2 = \delta^2$ con δ pequeño, el valor de ε es irrelevante, mientras sea positivo. Si $k = n^2$ de la definición de ε es claro que $|\varepsilon p_i^n| < |\prod_{j=1}^{n-1}(p_i - q_j)|$ para todo i.

A partir de la elección de p_i y q_i la segunda componente de f en los puntos $(x, p_i x)$ cambiará alternativamente de signo, siendo positiva en el punto $(0, \delta)$. Estudiando el campo cerca de estos puntos, obtenemos que, según la paridad de $n-k$ una situación como refleja la Figura 2.

Es claro por tanto de la noción de índice de Poincaré que el índice en este caso es n. ∎

Conocidos los valores de la multiplicidad local y del índice local de un punto crítico de una ecuación diferencial estos no determinan de manera única el retrato local en dicho punto. Veamos como para el mismo ejemplo anterior, pero solo en el caso de índice máximo, que no todos los puntos críticos que tienen la misma multiplicidad y mismo índice tienen el mismo retrato local.

Dada la naturaleza múltiple de los puntos críticos de la ecuación $(\dot{x}, \dot{y}) = f(x, y)$, nos será imprescindible usar la técnica de Blow-up's, ver [ALGM].

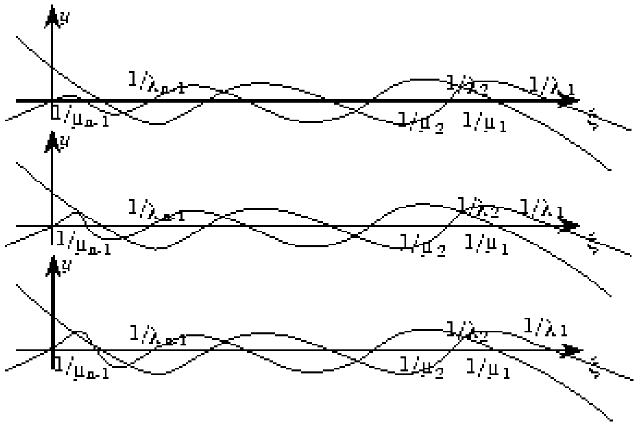


Figure 3: Gráficas de $P(\xi,1)$ y $\xi Q(\xi,1)$ para n par ($n=6$).

Las direcciones de llegada son dadas por la ecuación

$$\begin{aligned} x^2Q(x,y)-xyP(x,y)=0 \quad & \text{si } k>n^2, \text{ i} \\ x^2Q(x,y)+\varepsilon y^{k-n(n-1)}-xyP(x,y)=0 \quad & \text{si } k=n^2. \end{aligned}$$

Así $x=0$ y $p_i \neq 0$ para toda i, son las direcciones de llegada y como $y=0$ no lo es nunca, para estudiar el origen es suficiente con estudiar solo el Blow-up direccional que cubre todas las direcciones de llegada excepto la horizontal.

Consideremos el blow-up dado $(x,y)=(\xi y,y)$, entonces el sistema se convierte en

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\xi} & = & \frac{xyP(x,y)-x^2Q(x,y)-\varepsilon y^{k-n(n-1)}}{y^2} \\ \dot{y} & = & xQ(x,y)+\varepsilon y^{k-n(n-1)} \end{array} \right. , \tag{3}$$

o, simplificando,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\xi} & = & \xi y^{n-1}(P(\xi,1)-\xi Q(\xi,1)-\varepsilon y^{k-n^2}) \\ \dot{y} & = & y^n(\xi Q(\xi,1)+\varepsilon y^{k-n^2}) \end{array} \right. , \tag{4}$$

dividiendo por y^{n-1},

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\xi} & = & \xi(P(\xi,1)-\xi Q(\xi,1)-\varepsilon y^{k-n^2}) \\ \dot{y} & = & y(\xi Q(\xi,1)+\varepsilon y^{k-n^2}) \end{array} \right. . \tag{5}$$

Veamos ahora cuales y como son los puntos críticos sobre $y=0$ del sistema (5). Si $y=0$ entonces tenemos que $\xi(P(\xi,1)-\xi Q(\xi,1))=0$, así que $(0,0)$ es un punto crítico, y se hace necesario estudiar los ceros de $P(\xi,1)-\xi Q(\xi,1)=0$. En las Figuras 3 y 4 se dan las gráficas de $P(\xi,1)$ y $\xi Q(\xi,1)$ en función de los valores que pueden tomar p_i y q_i.

Las coordenadas ξ de los puntos críticos, denominémoslos ξ^*, se obtienen de los puntos de corte de las gráficas de $P(\xi,1)$ y $\xi Q(\xi,1)$. Entonces las matrices

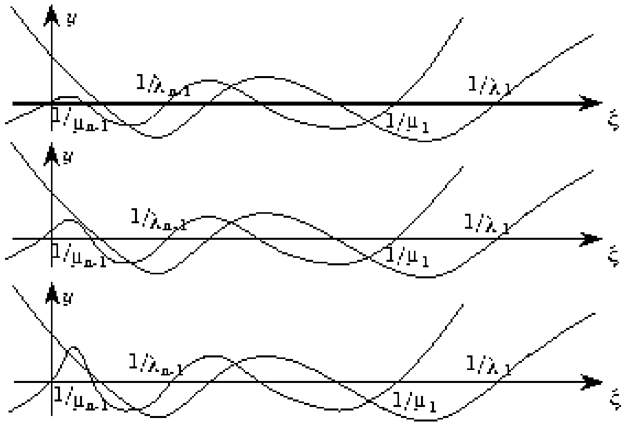


Figure 4: Gráficas de $P(\xi,1)$ y $\xi Q(\xi,1)$ para n impar($n=5$).

jacobianas de los puntos críticos del sistema (5) son

$$
\begin{aligned}
J_{(\xi^*,0)} &= \begin{pmatrix} \xi^*(P(\xi,1)-\xi Q(\xi,1))'|_{\xi^*} & 0 \\ 0 & \xi^* Q(\xi^*,1) \end{pmatrix}, \\
J_{(0,0)} &= \begin{pmatrix} P(0,1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Esta claro que tenemos cuatro tipos de puntos críticos. El origen s un nodo repulsor y los otros tres tipos varían, según como se corten las gráficas de $P(\xi,1)$ y $\xi Q(\xi,1)$. Si denominamos por P_{ξ^*} a $(P(\xi,1)-\xi Q(\xi,1))'|_{\xi^*}$ y Q_{ξ^*} a $\xi^* Q(\xi^*,1)$, tenemos cuatro tipos de puntos críticos:

1. Tipo A: Si $P_{\xi^*}>0$ y $Q_{\xi^*}>0$ entonces el punto es un nodo repulsor.
2. Tipo B: Si $P_{\xi^*}<0$ y $Q_{\xi^*}>0$ entonces el punto es una silla.
3. Tipo C: Si $P_{\xi^*}<0$ y $Q_{\xi^*}<0$ entonces el punto es un nodo atractor.
4. Tipo D: Si $P_{\xi^*}=0$ y $Q_{\xi^*}>0$ entonces se puede ver, aplicando los resultados de [ALGM] para puntos degenerados, que el punto es un silla-nodo.

De la naturaleza de las gráficas de P y ξQ, como se muestra en las Figuras 3 y 4, sabemos cual es el retrato cerca de $y=0$ para el sistema (5), obteniendo así una retratos como en las Figuras 5 y 6.

Al deshacer el Blow-up se obtiene el retrato del origen para el sistema original, como muestran las Figuras 7 y 8 para $n=4$ y $n=3$ respectivamente.

5 Una cota para el índice, en dimensión superior a 2

Veamos ahora que para dimensión tres o superior, los resultados de la sección anterior no son ciertos, es decir que la cota dada por Eisenbud y Levine, en [EL]

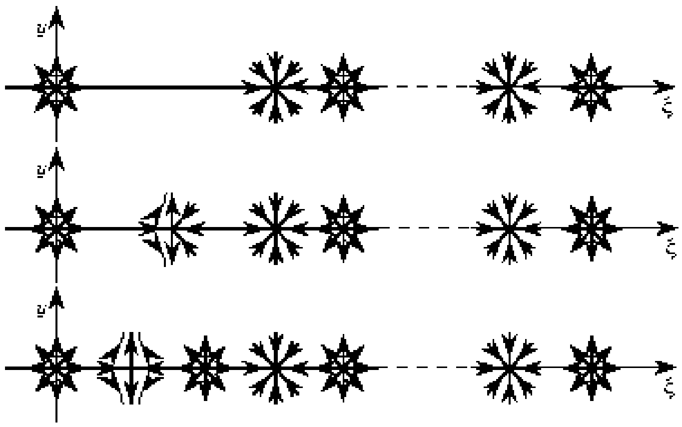


Figure 5: Retrato de los puntos críticos con $y = 0$ del sistema (1.4) para n par.

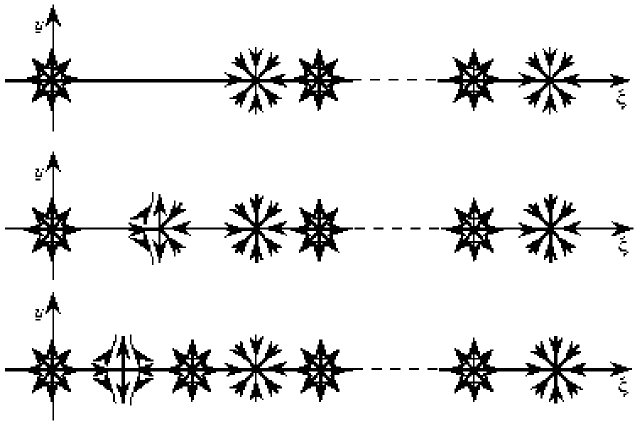


Figure 6: Retrato de los puntos críticos con $y = 0$ del sistema (1.4) para n impar.

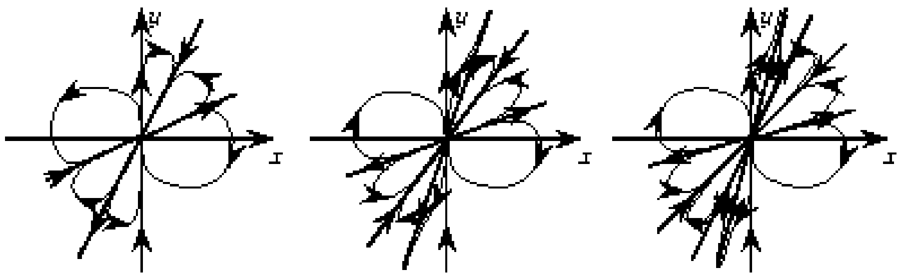


Figure 7: Retrato del origen en el caso en que n es par ($n = 4$).

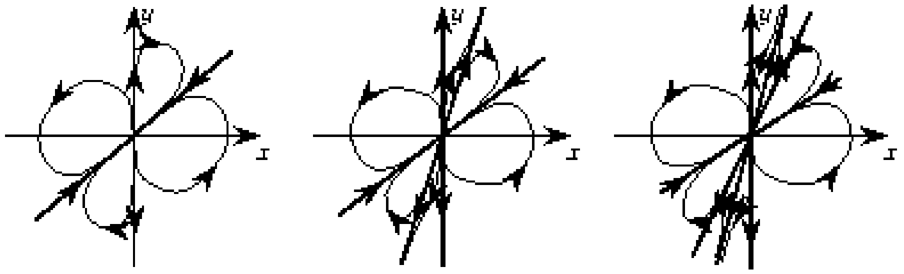


Figure 8: Retrato del origen en el caso en que n es impar ($n = 3$).

no es óptima.

Conocidas ya las definiciones y propiedades del índice y la multiplicidad de un cero aislado de f, una aplicación finita, podemos establecer a partir de [EL] una relación entre los dos conceptos.

Teorema 5.1 [EL] *Sea $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ una aplicación de multiplicidad finita. Si I es un ideal de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)/(f)$ tal que es maximal respecto la propiedad $I^2 = 0$, entonces se cumple que*

$$|\mathrm{ind}_0[f]| = \mu_0[f] - 2\mathrm{dim} I.$$

Como estamos interesados en dar una cota del índice a partir de la multiplicidad de f, esta claro que a partir de la última propiedad de índice tenemos que una posible cota sería $|\mathrm{ind}_0[f]| \leq \mu_0[f]$.

Como mejora de este resultado en [EL], se demuestra que,

Teorema 5.2 *Si $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ el germen de una aplicación finita, entonces tenemos que*

a) $|\mathrm{ind}_0[f]| \leq (\mu_0[f])^{1-\frac{1}{n}}$,

b) Si f es singular entonces, $|\mathrm{ind}_0[f]| \leq \mu_0[f]/2$, *y*

c) $|\mathrm{ind}_0[f]| \equiv \mu_0[f] \pmod 2$.

Cuando la aplicación f es polinomial y homogénea componente a componente, se puede mejorar el resultado del Teorema 5.2 usando un trabajo de Khovanskii, [K].

Para enunciar los resultados de [K], nos hace falta introducir un mínimo de notación.

Sea $m \in \mathbb{N}^n$ decimos $\Delta(m)$ al paralelepípedo de $\mathbb{R}^n$ definido por las inecuaciones $0 \leq y_1 \leq m_1 - 1, \ldots, 0 \leq y_n \leq m_n - 1$. Podemos definir la función $\Pi_n(m)$ de Khovanskii como el número de puntos de coordenadas enteras de la sección central $y_1 + \ldots + y_n = \frac{1}{2}(m_1 + \ldots + m_n - n)$ de $\Delta(m)$. Entonces se cumple el siguiente resultado, demostrado en [CGT]

Teorema 5.3 *El índice,* $\mathrm{ind}_0[f]$*, de un punto singular aislado de un campo polinomial,* $f = (f_1, \ldots, f_n)$*, con componentes* f_i *homogéneas de grado* m_i *para todo* $i = 1, \ldots, n$*, cumple la inecuación*

$$|\mathrm{ind}_0[f]| \leq \Pi_n(m),$$

y la congruencia

$$\mathrm{ind}_0[f] \equiv \mu_0[f] \pmod 2, \; donde \; \mu_0[f] = \prod_{i=1}^{n} m_i,$$

además el número $\mathrm{ind}_0[f]$ *no está sometido a ninguna otra restricción, y existe una aplicación* f *para cada elección posible del número* $\mathrm{ind}_0[f]$.

Para los casos particulares de $n = 2$ y $n = 3$ se puede ver en [CGT] que,

$\Pi_2(m) = m_1$,

$$\Pi_3(m) = \begin{cases} m_1 m_2 & \text{si } m_1 + m_2 \leq m_3 \\ \frac{1}{4}(1 + 2m_1m_2 + 2m_1m_3 + 2m_2m_3- & \\ m_1^2 - m_2^2 - m_3^2) & \text{si } m_1 + m_2 \geq m_3 \end{cases}.$$

A partir de las propiedades de invariancia del índice y la multiplicidad de un punto singular de una aplicación $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ introducidas en las secciones anteriores, se puede dar una mejora natural del Teorema 5.2, ver [CGT]

Proposición 5.4 *Sea* $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ *el germen de una aplicación finita, con* $\mu_0[f] = \mu$*, entonces tenemos que*

$$a)\ |\mathrm{ind}_0[f]| \leq \begin{cases} 1 & si & & \mu & < & 4 \\ \vdots & si & & \vdots & & \\ \mu^{1-\frac{1}{n-1}} & si & 2^{n-1} & \leq & \mu & < & 2^n \\ \mu^{1-\frac{1}{n}} & si & 2^n & \leq & \mu & & \end{cases}, \ y$$

$b)$ $|\mathrm{ind}_0[f]| \equiv \mu_0[f] \pmod 2$.

La cota dada en la proposición anterior, puede ser mejorada en general, pero en ciertos esta es la mejor posible, así que encontrar cual es realmente la cota óptima del índice conocida la multiplicidad es todavía una incógnita. Veamos algunos ejemplos que muestran estas nociones.

Proposición 5.5 *Sea* $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ *el germen de una aplicación finita, con* $\mu_0[f] = 2^n$*. Entonces tenemos que* $|\mathrm{ind}_0[f]| < \mu_0[f]^{1-\frac{1}{n}}$ *para cada* $n > 2$.

Ejemplo 5.6 *La aplicación* $f_t : (\mathbb{R}^3, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ *definida como*

$$(2x(x - 2y - 2z), 2y(y - 2x - 2z), -z(z - 2x - 2y)(z + 4x + 4y) + tx(y + z)),$$

tiene $\mathrm{ind}_0[f_t] = 4$ *i* $\mu_0[f_t] = 10$ *para todo valor* t*, no nulo, cerca de* 0.

References

[ALGM] A. A. Andronov, E.- A. Leontovich, I.I. Gordon, y A. L. Maier, *Qualitative theory of second-order dynamic systems.* John Wiley & Sons, New York, 1973.

[AVG] V. Arnold, A. Varchenko, S. Goussein-Zadé, *Singularités des applications différentiables.* Mir, Moscow, 1982.

[AY] L. A. Aizenberg, A. P. Yuzhakov, *Integral representations and residues in multidimensional complex analysis.* AMS, Vol. 58. (1980).

[CGT] A. Cima, A. Gasull y J. Torregrosa, *On the relation between index and multiplicity*, preprint.

[D] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, INC., Boston, 1966.

[EL] D. Eisenbud, H. Levine, *An algebraic formula for the degree of a* $\mathbb{C}^{\infty}$ *mag germ.* Annals of Mathematics, Vol. 106, (1977), pp. 19-44.

[F] W. Fulton, *Algebraic curves. An introduction to algebraic geometry.* Benjamin, New York, 1969.

[K] A. G. Khovanskii, *Index of a polynomial field.* Functional Analysis and its Applications, Vol. 13 (1979) pp. 38-45.

[L] N. G. Lloyd, *Degree theory.* Cambridge University Press, Great Britain, 1978.

[T] A. K. Tsikh, *Nultidimensional Residues and Their Applications.* AMS, Providence, (Translations of Mathematical Monographs, Volum 103) , 1992.