15.- L. Kleiser, U. Shumann: *Treatment of incompressibility and boundary conditions in 3–D numerical spectral simulation of plane channel flows.* Hirschel E. H. ed., Proc. 3rd GAMM Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics, Vieweg–Verlag Braunschweig, 1980.

16.- A. Kovacs, M. Kawahara: " A finite element scheme based on the velocity–correction method for the solution of the time–dependent incompressible Navier–Stokes equations." *International Journal for Numerical Methods in Fluids* , Vol. **13**, p. 403–423, 1991.

17.- O. A. Ladyzhenskaya: *The mathematical theory of viscous incompressible flow.* Gordon and Breach, New York, 1969.

18.- H. Le, P. Moin: " An improvement of Fractional–Step Methods for the incompressible Navier–Stokes equations." *Journal of Computational Physics* , Vol. **92**, p. 369–379, 1991.

19.- W. K. Liu, J. Gvildys: " Fluid–Structure interaction of tanks with an eccentric core barrel." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. **58**, p. 51–77, 1986.

20.- R. Natarajan: " A Numerical Method for Incompressible Viscous Flow Simulation." *Journal of Computational Physics* , Vol. **100**, p. 384–395, 1992.

21.- S. A. Orzag, M. Israeli, M. O. Deville: " Boundary conditions for incompressible flows." *Journal of Scientific Computing,* Vol. **1**, N. 1, p. 75–111, 1986.

22.- L. Quartapelle, M. Napolitano: " Integral conditions for the pressure in the computation of incompressible viscous flows." *Journal of Computational Physics* , Vol. **62**, p. 340–348, 1986.

23.- L. Quartapelle: *Numerical Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations.* Birkhäuser, International Series in Numerical Mathematics Vol. 113, 1993.

24.- J. Shen: " Hopf bifurcation of the unsteady regularized driven cavity flow." *Journal of Computational Physics* , Vol. **95**, p. 228–245, 1991.

25.- J. Shen: " On error estimates of projection methods for Navier–Stokes equations: first–order schemes." *SIAM Journal Numerical Analysis,* Vol. **29**, p. 57–77, 1992.

26.- R. Temam: " Sur l'approximation de la solution des équations de Navier–Stokes par la méthode des pas fractionaires (I)." *Arch. Rac. Mech. Anal.,* Vol. **32**, N. 2, p. 135–153, 1969.

27.- R. Temam: *Navier–Stokes equations. Theory and Numerical Analysis.* North–Holland, Amsterdam, 3rd. Edition, 1984.

28.- R. Temam: " Remark on the Pressure Boundary Condition for the Projection Method." *Theoretical and Computational Fluid Dynamics,* Vol. **3**, p. 181–184, 1991.

REFERENCIAS.

1.- J. B. Bell, P. Colella, H. M. Glaz: " A Second–Order Projection Method for the incompressible Navier–Stokes equations." *Journal of Computational Physics* , Vol. **85**, p. 257–283, 1989.

2.- J. Blair Perot: " An Analysis of the fractional–step projection method." *Journal of Computational Physics* , Vol. **108**, p. 51–58, 1993.

3.- J. Blasco, R. Codina, A. Huerta: " A fractional–step method for the incompressible Navier–Stokes equations related to a predictor–multicorrector algorithm." Internal Report n. **63**, *International Center for Numerical Methods in Engineering,* 55 pages, 1995.

4.- F. Brezzi, M. Fortin: *Mixed and Hybrid finite element methods.* Springer Series in Computational Mathematics, 15. Springer–Verlag, 1991.

5.- A. N. Brooks, T. J. R. Hughes: " Streamline upwind Petrov–Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier–Stokes equations." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , Vol. **32**, p. 199–259, 1982.

6.- A.J.Chorin: " Numerical solution of the Navier–Stokes equations." *Mathematics of Computation,* Vol. **22**, p. 745–762, 1968.

7.- J. Donea, S. Giuliani, H. Laval, L. Quartapelle: " Finite element solution of the unsteady Navier–Stokes equations by a fractional step method." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , Vol. **30**, p. 53–73, 1982.

8.- J. K. Dukovicz, A. S. Dvinsky: " Approximate Factorization as a High Order Splitting for the Implicit Incompressible Flow Equations." *Journal of Computational Physics* , Vol. **102**, p. 336–347, 1992.

9.- U. Ghia, K. N. Ghia, C. T. Shin: " High–Re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and a multigrid method." *Journal of Computational Physics* , Vol. **48**, p. 387–411, 1982.

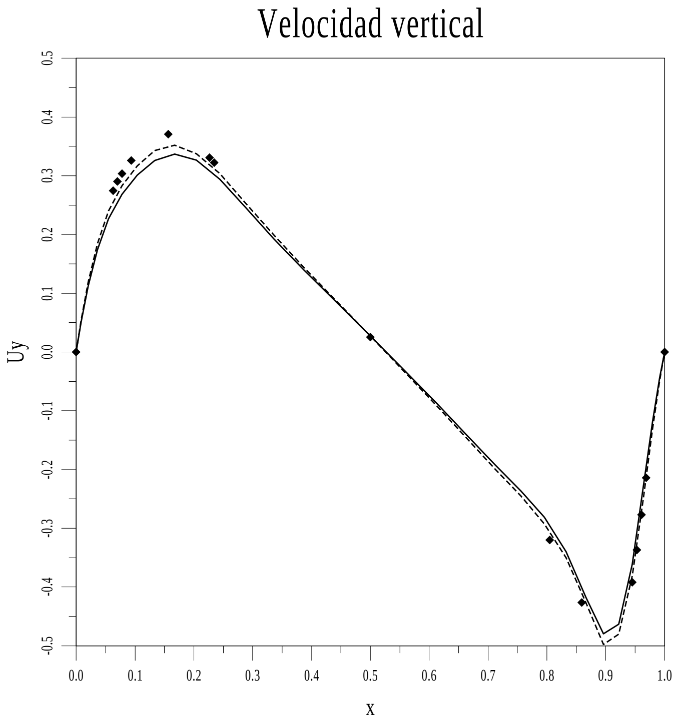
10.- V. Girault, P. A. Raviart: *Finite Element Approximation of the Navier–Stokes Equation.* Springer–Verlag, New York, 1986.

11.- P. M. Gresho: " On the theory of semi–implicit projection methods for viscous incompressible flow and its implementation via a finite element method that also introduces a nearly consistent mass matrix. Part I: theory." *International Journal for Numerical Methods in Fluids,* Vol. **11**, p. 587–620, 1990.

12.- P. M. Gresho, R. Sani: " On pressure boundary conditions for the incompressible Navier–Stokes equations." *International Journal for Numerical Methods in Fluids,* Vol. **7**, p. 1111–1145, 1987.

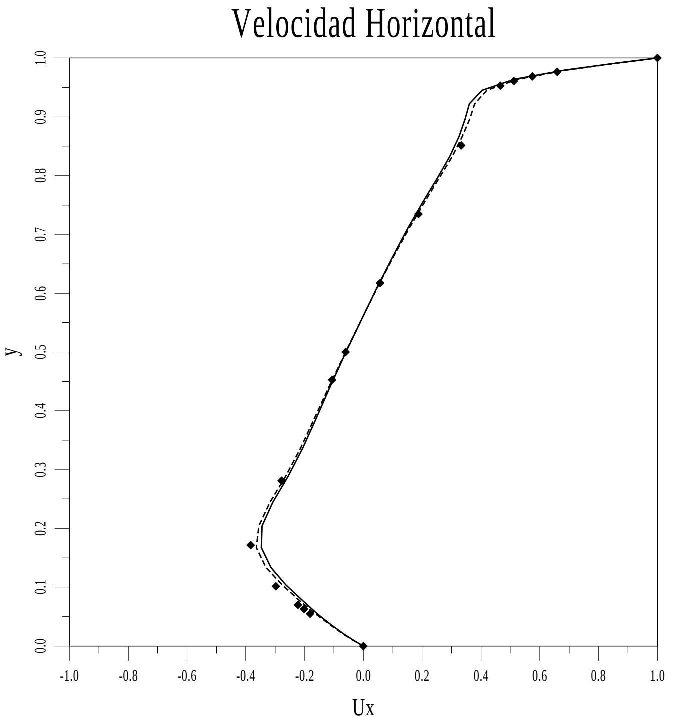
13.- J. van Kan: " A second–order accurate pressure correction scheme for viscous incompressible flow." *SIAM Journal of Sci. Stat. Comp.,* Vol. **7**, N. 3, p. 870–891, 1986.

14.- J. Kim, P. Moin: " Application of a Fractional–Step Method to incompressible Navier–Stokes equations." *Journal of Computational Physics* , Vol. **59**, p. 308–323, 1985.



Perfil de velocidad vertical a través de $y = 0.5$:
—— Q_1P_0; - - - Q_2P_1; ◇ Ghia et al.

uniforme. Los resultados obtenidos con elementos cuadráticos resultan ser más precisos que los de los elementos lineales, a pesar de que su coste computacional es menor.



Perfil de velocidad horizontal a través de $x = 0.5$:
—— Q_1P_0; - - - Q_2P_1; ◇ Ghia et al.

de la ecuación de Navier–Stokes incompresible en variables primitivas, el cual depende de un parámetro $\theta \in (0, 1]$. Para $\theta = 1$, se ha demostrado que tanto las velocidades intermedias como las de final de paso convergen a la solución exacta en el espacio $(H_0^1(\Omega))^d$. Mediante la introducción de un término viscoso en el segundo paso del método, se imponen las condiciones de contorno reales sobre la velocidad en todas las etapas del método, mientras que no se requiere de condición de contorno alguna para la presión. Así, a diferencia de otros métodos de paso fraccionado, el método no introduce capa límite numérica. Este método permite, además, reinterpretar un conocido algoritmo predictor–multicorrector como método de paso fraccionado, justificando así su buen comportamiento en problemas de flujo incompresible.

Una desventaja de esta formulación es que requiere del cumplimiento de la condición de compatibilidad entre los espacios aproximantes de velocidad y presión que aparece en la resolución numérica del problema de Stokes estacionario en variables primitivas. Se han considerado dos interpolaciones del método en elementos finitos, mediante los elementos Q_1P_0 y Q_2P_1 respectivamente. Este último se recomienda especialmente para el presente esquema, dado que satisface la condición LBB discreta.

Los resultados numéricos obtenidos confirman las propiedades teóricas del método. En primer lugar, se proporciona un estudio numérico de convergencia, el cual asegura que el método es de primer orden en el paso de tiempo, tanto para velocidades como para presiones, con las dos interpolaciones espaciales consideradas. A continuación se resuelve el problema del flujo en una cavidad, obteniendo soluciones correctas en velocidades con los dos elementos y en presión con el Q_2P_1, y modos espúreos de presión para el Q_1P_0 en una malla no

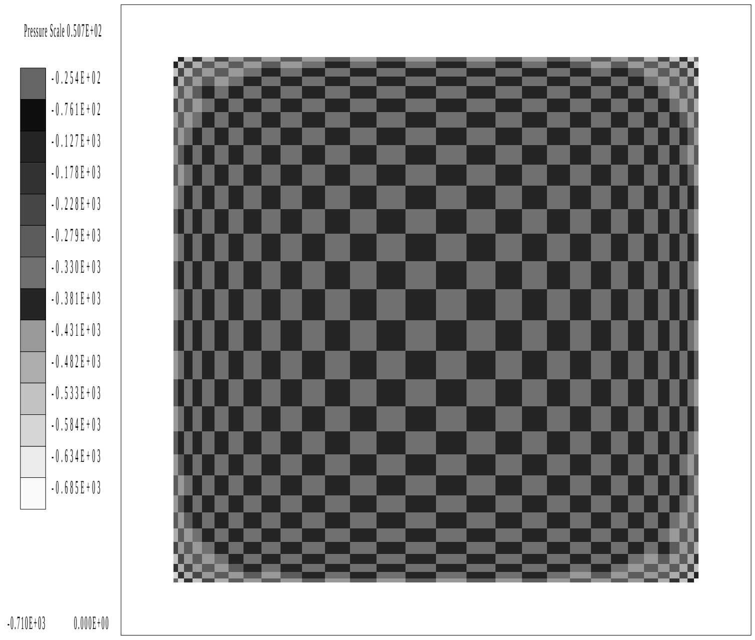


Figura 2: Elemento Q_1P_0, presiones elementales.

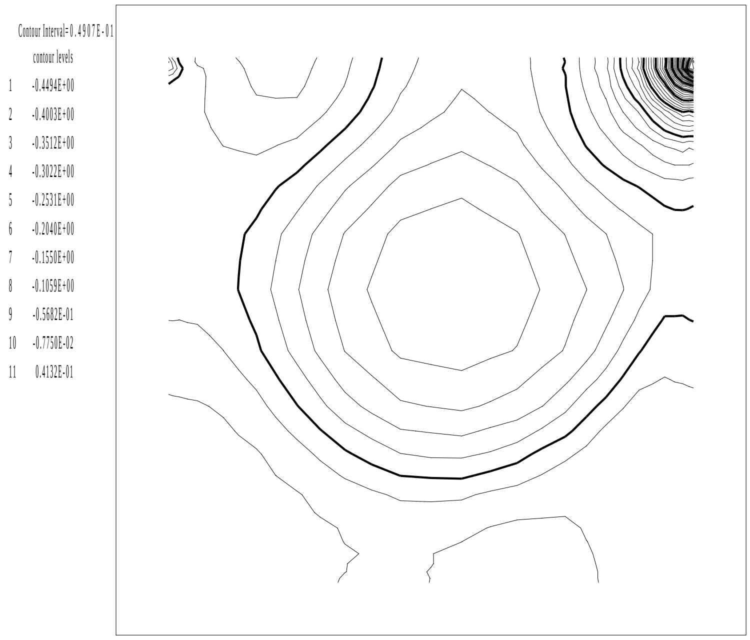


Figura 3: Elemento Q_2P_1, presiones nodales.

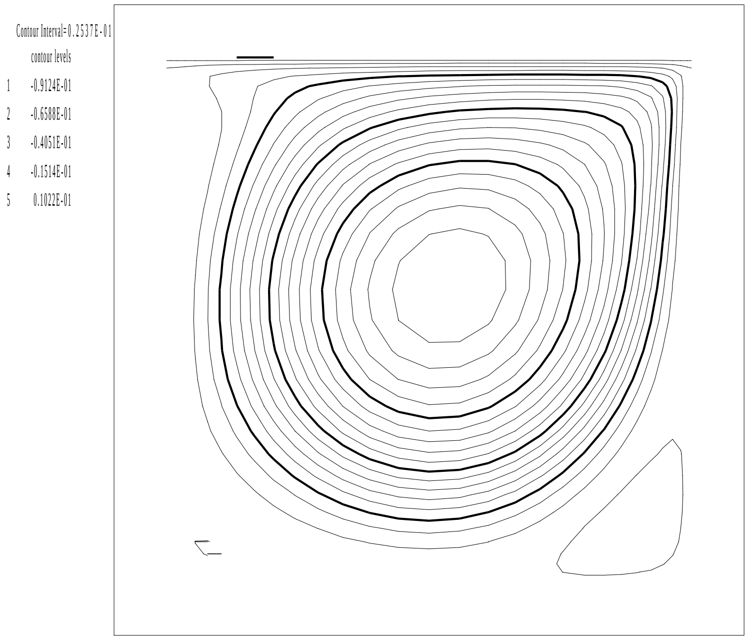


Figura 1a: Elemento Q_1P_0, función de corriente.

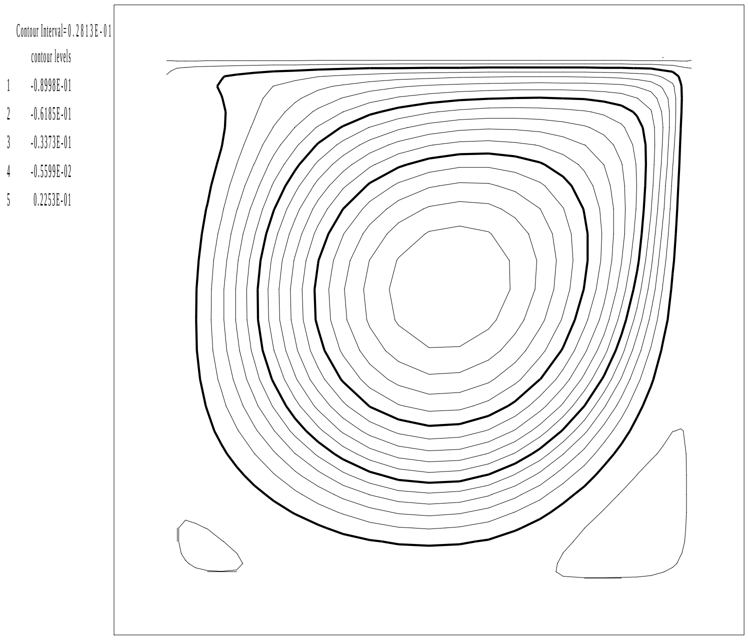


Figura 1b: Elemento Q_2P_1, función de corriente.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha desarrollado un método de paso fraccionado para la aproximación

Δt	$\kappa_1(\Delta t)$	$\kappa_2(\Delta t)$	$\kappa_p(\Delta t)$
1/16	2.04	2.02	2.03
1/32	2.02	2.01	2.02
1/64	2.01	2.01	2.01
1/128	1.99	1.99	2.00

Tabla 1: Elemento Q1P0.

Δt	$\kappa_1(\Delta t)$	$\kappa_2(\Delta t)$	$\kappa_p(\Delta t)$
1/16	2.24	2.27	2.04
1/32	2.01	1.99	2.02
1/64	2.00	1.99	2.01
1/128	1.97	1.99	2.01

Tabla 2: Elemento Q2P1.

5.2. Flujo en una cavidad

El segundo problema estudiado es el clásico flujo en una cavidad cerrada, habiendose considerado el caso *leaky* (es decir, con $u(0,1) = u(1,1) = (1,0)$. Se utilizó una malla regular no uniforme, más fina cerca de las fronteras; de nuevo, los mismos nodos definen la malla en los dos elementos. Esta consta de 30×30 elementos de 4 nodos. Se eligió un número de Reynolds de 1000, y se calculó a partir del fluído en reposo hasta que este alcanzara un estado estacionario.

En la Figura 1 se muestran los contornos de función de corriente obtenidos con ambos elementos. Pueden observarse subvórtices secundarios en los vértices inferiores derecho e izquierdo, pero no en el vértice superior izquierdo. Este hecho coincide con otros resultados numéricos obtenidos para este número de Reynolds ([7], [9], [14], [16]). Las presiones elementales obtenidas con el elemento Q_1P_0 se muestran en la Figura 2. Aparece un claro fenómeno de *checkerboarding*, que raramente se observa en una malla no uniforme como la presente. Este hecho invalida la aproximación de la presión sin afectar a la velocidad. Por otra parte, el elemento Q_2P_1 produjo resultados satisfactorios para la presión; en la Figura 3 se muestran los contornos de presión obtenidos a través de una interpolación nodal de mínimos cuadrados, los cuales concuerdan con los de las referencias mencionadas.

Finalmente, en las Figuras 4 y 5 se proporcionan los perfiles de velocidad horizontal y vertical a través de las líneas centrales de la cavidad $x = 0.5$ e $y = 0.5$, respectivamente. Como puede verse, estos resultados concuerdan altamente con los datos referenciales de [9]; puede observarse cómo los elementos cuadráticos proporcionan resultados más ajustados que los lineales sobre la misma malla, a pesar de requerir menor esfuerzo computacional.

siendo $G^{\dagger}$ la matriz traspuesta de G, asociada a la divergencia discreta, y F_2 otro vector conocido. Despejando U_{i+1}^{n+1} de (5.2a) (dado que la matriz B es definida positiva y por lo tanto invertible) y sustituyendo en (5.2b) se obtiene:

$$(G^T B^{-1} G)\,(P_{i+1}^{n+1}) \;=\; F_3 \tag{5.3}$$

que, seguido de (5.2a) es equivalente a resolver (5.2). Pueden observarse en (5.3) las restricciones asociadas al carácter mixto de (3.2): la matriz $(G^T B^{-1} G)$ es simétrica y semidefinida positiva; pero puede tener núcleo no trivial si la interpolación utilizada introduce los llamados 'modos espúreos' de presión, que cumplen $GP = 0$ con $P \neq 0$. Así ocurre el en caso del elemento Q_1P_0 cuando se fijan condiciones de contorno de tipo Dirichlet en toda la frontera, como se verá en el ejemplo del apartado (5.2).

En la implementación numérica del esquema (5.1)–(5.3)–(5.2a) se ha considerado el término convectivo de manera explícita, es decir, $(u^n \cdot \nabla)u^n$. Además, siguiendo a [5], se aproxima la matriz B por M, siendo la diferencia entre ambas de orden Δt. E incluso la matriz de masa M se toma 'cargada' (*lumped*), resultando un esquema numérico con 3 sistemas lineales en cada paso de tiempo, dos de ellos con matriz diagonal M^L y otro con matriz simétrica (semi)definida positiva $(G^T (M^L)^{-1} G)$.

5.1. Estudio numérico de convergencia

Como comprobación numérica de las propiedades de aproximación del método, se consideró el caso test introducido por van Kan (ver [13]). Consiste en el flujo de Navier–Stokes en una cavidad unidad cuadrada en la cual se prescribe un perfil de velocidad de entrada en la pared superior dado por $u((x,1),t) = (0, -\sin(\pi(x^3 - 3x^2 + 3x))e^{(1-1/t)})$ para $0 \leq x \leq 1$ y $t > 0$, las paredes lateral izquierda e inferior son de no deslizamiento y en la derecha se imponen condiciones de contorno naturales. Como en [13], se fija un número de Reynolds de 10, y el fluído se considera en reposo inicialmente. Se usó una malla uniforme de 6×6 elementos en el caso Q_1P_0; para comparar los resultados obtenidos con ambas interpolaciones, se emplearon los mismos nodos para definir una malla de 3×3 elementos Q_2P_1. Esta requiere de menos grados de libertad de presión que aquella, reduciendo así el coste computacional (dado que el único sistema con matriz consistente es el de la presión, (5.3)).

Denotemos por $\kappa_i(\Delta t)$ al cociente $\dfrac{||U_i(\Delta t) - U_i(\frac{1}{2}\Delta t)||}{||U_i(\frac{1}{2}\Delta t) - U_i(\frac{1}{4}\Delta t)||}$, donde U_i $(i = 1,2)$ contiene la componente i–ésima de las velocidades nodales obtenidas para $t = 1$ con el paso de tiempo indicado. Se usa la norma euclídea para estos vectores. Análogamente, $\kappa_p(\Delta t)$ denota el mismo cociente para las presiones (y, eventualemente, derivadas espaciales de la presión) elementales. En las tablas I y II se observan los resultados obtenidos para este problema. En ellas se puede comprobar el primer orden de aproximación en el paso de tiempo del método, tanto para velocidades como para presiones, así como para ambos elementos.

Dado que $u^2_{k'} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$, se tiene que $u^*(t) \in V$ c.p.t. en $(0,T)$, y $u^* \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$.

La demostración de la convergencia fuerte en $L^2(Q)$ es la misma que en [27], y por lo tanto se omite. Sólo resta probar que u^* es solución de (2.1). Para ello se utiliza el mismo argumento que [27], de manera que los resultados de convergencia probados hasta el momento implican que, pasando (4.4) al límite cuando k' tiende a 0:

$$\frac{d}{dt}(u^*,v) \;+\; \nu((u^*,v)) \;+\; c(u^*,u^*,v) \;=\; (f,v) \quad \forall v \in V \tag{4.7}$$

en el sentido de las distribuciones en $(0,T)$, es decir, u^* satisface (2.10). Esto, a su vez, implica (ver [27]) que $\dfrac{du^*}{dt} \in L^1(0,T;V')$, $u^*(0) = u^0$ débilmente en V y u^* es igual c.p.t. a una función continua de $(0,T)$ en V. Estos resultados aseguran que u^* es una solución débil de (2.1), y el Teorema queda probado.

La demostración del Corolario es consecuencia de la unicidad de la solución u en el caso bidimensional. $\triangle$

En definitiva, tanto las velocidades intermedias $u^{n+1/2}$ como las de final de paso u^{n+1} se demuestran converger a u en $(H^1_0(\Omega))^d$, a través de las funciones u^1_k y u^2_k respectivamente. Esto mejora los resultados de [27], donde u^{n+1} sólo convergen en $(L^2(\Omega))^d$.

5. RESULTADOS NUMERICOS

Se consideran a continuación dos interpolaciones espaciales de Galerkin en elementos finitos de tipo mixto del método (3.1)–(3.2), ambas con presión discontinua. La primera es el bien conocido elemento de velocidad bilineal (para $d = 2$) y presión constante en cada elemento (Q_1P_0), el cual no cumple la condición LBB discreta y sufre del fenómeno de *checkerboarding.* El segundo elemento usado es el de velocidad bicuadrática y presión lineal en cada elemento (Q_2P_1), el cual sí cumple la condición LBB.

En lo sucesivo, se adopta la siguiente notación standard: U y P representan vectores de velocidades nodales y presiones elementales, respectivamente; M es la matriz de masa, K la de viscosidad, $C(U)$ la de convección y G representa el operador de gradiente discreto (ver [19] para las definiciones precisas de estas matrices). La aproximación en elementos finitos de (3.1) conduce al sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$B\,(U^{n+1}_{i+1/2}) \;=F_1 \tag{5.1}$$

donde $B = M + \theta\,\Delta t\,\nu K$ y F_1 es un vector conocido. Por otra parte, (3.2) lleva a:

$$\begin{aligned} B\,(U^{n+1}_{i+1}) \;\;-\;\; G\,(P^{n+1}_{i+1}) &= F_2 && (5.2a)\\ G^\dagger\;(U^{n+1}_{i+1}) &= 0, && (5.2b)\end{aligned}$$

donde $C > 0$ es una constante relativa a la continuidad de la forma trilineal c; el resto de afirmaciones son consecuencia del Lema 3 y del Lema III.1.1 del [27]. $\triangle$

El principal resultado de esta Sección se resume en el siguiente teorema:

Teorema 1: sea $d \leq 4$, $f \in L^2(0,T;H)$ y $u^0 \in V$.

Entonces, existe una subsucesión k' de k y una solución u de (2.1) tales que:

1) $u^i_{k'}$ y $u_{k'}$ convergen a u en $L^2((0,T)\times\Omega)$ fuertemente, $i = 1,2,3$.

2) $u^i_{k'}$ y $u_{k'}$ convergen a u en $L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^d)$ débil–estrella, $i = 1,2,3$.

3) $u^i_{k'}$ y $u_{k'}$ convergen a u en $L^2(0,T;(H^1_0(\Omega))^d)$ débilmente, $i = 1,2,3$.

Para cualquier otra subsucesión de k'' tal que estos resultados de convergencia sean válidos, u debe ser solución de (2.1).

Se tiene, además:

Corolario 1: sea $d = 2$.

Entonces la convergencia dada en el Teorema 1 es de la sucesión completa.

Demostración: dado que u^i_k $(i = 1,2,3)$ y u_k están acotadas en $L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^d$, existe una subsucesión k' (que puede tomarse la misma para las 4 sucesiones) y u^i $(i = 1,2,3)$, $u^* \in L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^d$ tales que:

$$\begin{aligned} &u^i_{k'} \longrightarrow u^i \ \text{ en } \ L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^d \quad \text{débil} - \text{estrella} \ \ (i = 1,2,3) \\ &u_{k'} \longrightarrow u^* \ \text{ en } \ L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^d \quad \text{débil} - \text{estrella} \end{aligned}$$

Dado que $u^i_{k'}$ $(i = 1,2,3)$ y $u_{k'}$ son acotadas en $L^2(0,T;(H^1_0(\Omega))^d$, existe una subsucesión de k' (que se denota también por k') tal que:

$$\begin{aligned} &u^i_{k'} \longrightarrow u^i \ \text{ en } \ L^2(0,T;(H^1_0(\Omega))^d \quad \text{débilmente} \ \ (i = 1,2,3) \\ &u_{k'} \longrightarrow u^* \ \text{ en } \ L^2(0,T;(H^1_0(\Omega))^d \quad \text{débilmente} \end{aligned}$$

Esta convergencia también es válida en $L^2(0,T;(L^2(\Omega))^d$. Dado que, por el Lema 4:

$$(u^2_{k'} - u^3_{k'}),\ (u^2_{k'} - u^1_{k'}),\ (u^2_{k'} - u_{k'}) \longrightarrow 0 \text{ in } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^d \quad \text{fuertemente},$$

debe ser $u^1 = u^2 = u^3 = u^*$.

u_k: $[0,T] \to (L^2(\Omega))^d$ / u_k es continua, lineal en t en cada intervalo $[nk,(n+1)k]$ y $u_k(nk) = u^n$, para $n = 0,\ldots,N$.

Estas funciones satisfacen, para una sucesión decreciente de k's:

Lema 3: 1) u_k^i y u_k permanecen acotadas en $L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^d)$, $i = 1,2,3$.

2) u_k^i y u_k permanecen acotadas en $L^2(0,T;(H_0^1(\Omega))^d)$, $i = 1,2,3$

3) $(u_k^2 - u_k^1)$ and $(u_k^2 - u_k^3)$ permanecen acotadas en $L^2(0,T;(H_0^1(\Omega))^d)$

Estos resultados son consecuencia del Lema 2 y de las definiciones de las funciones. La principal novedad con respecto a [27] es ahora la acotación de u_k^2 y u_k en $L^2(0,T;(H_0^1(\Omega))^d$, así como la de las diferencias $(u_k^2 - u_k^1)$ y $(u_k^2 - u_k^3)$. △

Se tiene también:

Lema 4: 1) $||u_k^2 - u_k^1||_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^d)} \leq \sqrt{kd_2}$

2) $||u_k^2 - u_k^3||_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^d)} \leq \sqrt{4kd_2}$

3) $||u_k - u_k^2||_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^d)} \leq \sqrt{\frac{4kd_2}{3}}$

Demostración: la parte 1) resulta del Lema 2), parte 3); 2) resulta del Lema 2), partes 3) y 4) y de la desigualdad triangular. Finalmente, 3) es consecuencia de la definición de u_k y del Lema 2), partes 3) y 4). △

Lema 5:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u_k(t),v) &= -\nu((u_k^2(t),v)) - c(u_k^3(t),u_k^1(t),v) + (f_k(t),v) \\ &\equiv \, < g_k(t),v >, \qquad \forall v \in V, \ \forall t \in (0,T), \end{aligned} \tag{4.4}$$

con g_k acotado en $L^2(0,T;V')$. En particular, u_k es igual casi por todo a una función continua de $[0,T]$ en V.

Demostración: sumando (4.1) y (4.2a) para $v \in V$, se obtiene:

$$(\frac{u^{n+1}-u^n}{k},v) + \nu((u^{n+1},v)) + c(u^n,u^{n+1/2},v) \ = \ < f^n,v > \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^d \tag{4.5}$$

de manera que (4.4) resulta de las anteriores definiciones. Además:

$$||g_k(t)||_{V'} \leq \nu||u_k^2(t)|| + C\,||u_k^3(t)||\,||u_k^1(t)|| + |f_k(t)|, \tag{4.6}$$

$$(\frac{u^{n+1}-u^{n+1/2}}{k},v)+\nu((u^{n+1}-u^{n+1/2},v))+b(v,p^{n+1})=0, \forall v\in(H_0^1(\Omega))^d \quad (4.2a)$$

$$b(u^{n+1},q)=0,\ \ \forall q\in L_0^2(\Omega) \qquad (4.2b)$$

Supongamos que $f\in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^d$. Entonces, se tiene:

Lema 1: estimación a priori.

$$|u^N|^2+\sum_{n=0}^{N-1}(|u^{n+1}-u^{n+1/2}|^2+|u^{n+1/2}-u^n|^2) \qquad (4.3)$$

$$+\,k\nu\sum_{n=0}^{N-1}||u^{n+1}||^2+k\nu\sum_{n=0}^{N-1}||u^{n+1}-u^{n+1/2}||^2\le d_2$$

donde $d_2=|u^0|^2+\frac{d_0^2}{\nu}\int_0^T|f(s)|^2\,ds$ y d_0 fue introducido en (2.4).

La demostración es similar a la del Lema 7.1.2 de [27]. Cabe notar el último término del lado izquierdo de (4.3), el cual no aparecía en [27]. $\triangle$

Lema 2: para cada $m=0,\dots,N-1$:

1) $|u^{m+i/2}|^2\le d_2,\ \ i=1,2.$

2) $k||u^{m+1/2}||^2\le d_2/\nu$

3) $\sum_{n=0}^{N-1}|u^{n+1}-u^{n+1/2}|^2\le d_2$

4) $\sum_{n=0}^{N-1}|u^{n+1/2}-u^n|^2\le d_2$

5) $k\sum_{n=0}^{N-1}||u^{n+1}-u^{n+1/2}||^2\le d_2/\nu$

6) $k\sum_{n=0}^{N-1}||u^{n+1}||^2\le d_2/\nu$

La demostración es, de nuevo, similar a la de [27]. Cabe destacar la acotación 5), que no estaba en [27]. $\triangle$

Se definen a continuación unas funciones de aproximación que a trozos son iguales a $u^{n+1/2}$, u^{n+1} o u^n. Se define también una interpolación lineal entre u^{n+1} y u^n:

$$u_k^1\colon[0,T]\to(L^2(\Omega))^d \ \ / \ \ u_k^1(t)=u^{n+1/2},\ \ nk\le t<(n+1)k$$

$$u_k^2\colon[0,T]\to(L^2(\Omega))^d \ \ / \ \ u_k^2(t)=u^{n+1},\ \ nk\le t<(n+1)k$$

$$u_k^3\colon[0,T]\to(L^2(\Omega))^d \ \ / \ \ u_k^3(t)=u^{n},\ \ nk\le t<(n+1)k$$

Una ventaja de usar un esquema como (3.1)–(3.2) en vez de (3.5) es el desacomplamiento entre los efectos convectivos y la incompresibilidad, el cual permite el uso de aproximaciones adecuadas a cada término.

COMENTARIO 2: al igual que en los métodos de proyección standard, puede derivarse una ecuación de Poisson para la presión para resolver (3.2), desacomplando así el cálculo de esta del de la velocidad. De hecho, tomando la divergencia de (3.2a) se tiene:

$$\Delta t \, \nabla^2 p^{n+1} \;=\; (I - \theta \, \Delta t \, \nu \nabla^2)\mathrm{div}\,(u^{n+1/2}) \;\in H^{-1}(\Omega) \tag{3.6}$$

donde se ha supuesto suficiente regularidad de las funciones involucradas. Pero para que (3.6) y (3.2a) impliquen (3.2b), la condición de incompresibilidad $\mathrm{div}\, u^{n+1} = 0$ debe imponerse también en la frontera (ver [15]), como en el método original de [6]. Además, p^{n+1} queda sujeta a condiciones integrales (ver [22]). Se adopta, así pues, la formulación original grad–div (3.2), que tiene la ventaja de permitir aproximaciones discontinuas de presión y no requiere de condición de contorno alguna para esta variable. Una desventaja de resolver (3.2) es que la interpolación espacial utilizada debe satisfacer la condición LBB discreta, y que las incógnitas de velocidad y presión deben tratarse conjuntamente.

4. CONVERGENCIA DEL METODO

Se demuestra ahora la convergencia del método de paso fraccionado introducido en la Sección anterior a una solución del problema continuo, en el caso $\theta = 1$. Las ideas usadas aquí siguen una línea similar a la demostración de convergencia del método original de paso fraccionado dada por R. Temam (ver [27]). Así, se proporciona un teorema de convergencia de unas sucesiones de funciones obtenidas a partir de las velocidades intermedias y al final del paso del método a una solución exacta.

Sea $T = N\Delta t$ y llamemos $k = \Delta t$. El método (3.1)–(3.2) con $\theta = 1$ puede escribirse en forma variacional como:

I) Hallar $u^{n+1/2} \in (H_0^1(\Omega))^d$ tal que:

$$\Big(\frac{u^{n+1/2} - u^n}{k}, v\Big) + \nu((u^{n+1/2}, v)) + c(u^n, u^{n+1/2}, v) \;=\; < f^n, v >, \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^d \tag{4.1}$$

donde la forma trilineal $c(u, v, w) \;=\; \int_\Omega ((u \cdot \nabla)v) \cdot w \, d\Omega$ es continua sobre $[(H_0^1(\Omega))^d]^3$ (para $d \leq 4$) y, cuando $\mathrm{div}\, u = 0$ y $n \cdot u|_\Gamma = 0$ (como es el caso para $u = u^n$), antisimétrica en sus dos últimos argumentos, es decir, satisface: $c(u, v, v) \;=\; 0, \; \forall v \in (H_0^1(\Omega))^d$.

II) Hallar $u^{n+1} \in (H_0^1(\Omega))^d$ y $p^{n+1} \in L_0^2(\Omega)$ tales que:

El método propuesto aquí incluye un término de difusión en la fase de incompresibilidad, el cual permite la imposición de la condición de contorno 'real' sobre la velocidad sin necesitar de condición de contorno alguna para la presión. Así, dado $u^{n+1/2}$ de (3.1), se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1}-u^{n+1/2}}{\Delta t} - \theta\nu\nabla^2(u^{n+1}-u^{n+1/2}) + \nabla p^{n+1} &= 0 &\quad (3.2a)\\ \operatorname{div} u^{n+1} &= 0 &\quad (3.2b)\\ u^{n+1}|_\Gamma &= 0 &\quad (3.2c) \end{aligned}$$

Pueden encontrarse ideas parecidas a este esquema en los métodos de [18], desarrollado en un contexto discreto, [20] o en el ejemplo de un método de orden superior de la Sección 7.5 de [23].

La forma débil de (3.2) consiste en hallar $u^{n+1} \in (H_0^1(\Omega))^d$ y $\phi^{n+1} = \Delta t\, p^{n+1} \in L_0^2(\Omega)$ tales que:

$$\begin{aligned} a_\theta(u^{n+1}, v) + b(v, \phi^{n+1}) &= l_1(v), &\quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^d &\quad (3.3a)\\ b(u^{n+1}, q) &= 0, &\quad \forall q \in L_0^2(\Omega) &\quad (3.3b) \end{aligned}$$

donde ahora $a_\theta(u,v) = (u,v) + \theta\,\Delta t\,\nu\,((u,v))$ es otra forma bilineal continua y simétrica sobre $(H_0^1(\Omega))^d$, que también es coerciva con respecto a $||u||_0$; b es una forma continua sobre $(H_0^1(\Omega))^d \times L_0^2(\Omega)$ definida como $b(v,q) = -(\operatorname{div} v, q)$, y $l_1 \in (H^{-1}(\Omega))^d$ es conocido. El problema (3.3) es de tipo mixto (ver [4]), en el cual a_θ es coerciva y b satisface la condición *inf–sup* o LBB:

$$\inf_{q\in L_0^2(\Omega)} \Big(\sup_{v\in (H_0^1(\Omega))^d} \frac{b(v,q)}{||v||\ |q|_{L_0^2(\Omega)}} \Big) \geq \beta > 0, \qquad (3.4)$$

de manera que la existencia y unicidad de solución de (3.2) está garantizada.

COMENTARIO 1: Sumando (3.1a) y (3.2a) se obtiene:

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} - \theta\nu\nabla^2 u^{n+1} - (1-\theta)\nu\nabla^2 u^n + (u^n\cdot\nabla)u^{n+1/2} + \nabla p^{n+1} = f^n, \qquad (3.5)$$

donde puede observarse el tratamiento implícito del término viscoso en u^n y u^{n+1}, y no en la velocidad intermedia $u^{n+1/2}$. Además. de (3.5) se deduce también que, por lo menos para el problema lineal o para una aproximación explícita del término convectivo, p^{n+1} tiene el carácter de aproximación de la presión en t_{n+1}, a diferencia de otros métodos de paso fraccionado en los que p^{n+1} es sólo una variable matemática para la imposición de la condición de incompresibilidad (ver [28]).

3. METODO DE PASO FRACCIONADO

Se considera la siguiente familia de métodos para la aproximación de (2.1), dependiente de un parámetro $\theta > 0$, en los cuales el avance en el tiempo se descompone en dos etapas. Así, dado $\Delta t > 0$, se tiene:

PRIMERA FASE: dado $u^n \in V$ aproximación de $u(t)$ en $t_n = n\Delta t$, se busca una velocidad intermedia $u^{n+1/2}$ tal que:

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\Delta t} \quad - \quad \theta\nu\nabla^2 u^{n+1/2} \quad - (1-\theta)\nu\nabla^2 u^n \quad + \quad (u^n \cdot \nabla)u^{n+1/2} \quad &= \quad f^n \quad (3.1a) \\ u^{n+1/2}|_\Gamma \quad &= \quad 0 \quad\; (3.1b) \end{aligned}$$

La aproximación del término convectivo puede considerarse de otras maneras; la forma semi–implícita adoptada aquí está tomada de [25]. Siguiendo a [27], el término de fuerza f^n consiste en la media temporal de $f(t)$ entre t_n y t_{n+1}.

Las ecuaciones (3.1) pueden escribirse de forma débil como: $\tilde{a}_\theta(u^{n+1/2}, v) = l_0(v)$, $\forall v \in (H_0^1(\Omega))^d$, donde $\tilde{a}_\theta(u,v) = (u,v) + \theta\,\Delta t\,\nu\,((u,v)) + \Delta t((u^n \cdot \nabla)u, v)$ es una forma bilineal continua sobre $(H_0^1(\Omega))^d$, que es coerciva con respecto a la norma $||u||_0$ (y por tanto a $||u||$), y $l_0 \in (H^{-1}(\Omega))^d$ es una forma lineal conocida. La coercividad de $\tilde{a}$ resulta del carácter antisimétrico de la aproximación del término convectivo (el cual a su vez es consecuencia del carácter solenoidal y la anulación en la frontera por parte de u^n), y la presencia del término difusivo. La existencia y unicidad de solución de (3.1) queda establecida por el teorema de Lax–Milgram.

El caso totalmente implícito $\theta = 1$ aparece en el método original de R. Temam ([26]) y en el método de J. Shen ([25]), entre otros. Es para este caso que se demuestra la convergencia del métdo en el apartado siguiente.

El caso de Crank–Nicholson $\theta = 1/2$ es de una relevancia particular, dado que proporciona una aproximación de segundo orden al término viscoso. Puede hallarse en los métodos de [1], [11], [13] y [14]. La diferencia fundamental entre todos ellos reside en el tratamiento de la no linealidad, que suele ser de segundo orden y explícito.

SEGUNDA FASE: en cuando al segundo paso, la mayoría de métodos de paso fraccionado emplean la noción de proyección, basada en la descomposición de Hodge de un campo vectorial dado ($u^{n+1/2}$ en este caso) en suma de un campo solenoidal con componenente normal nula en la frontera y el gradiente de una función escalar (ver [17], [27]). La incompatibilidad de las condiciones de contorno de proyección con las del problema continuo y la necesidad de imponer condiciones de contorno 'no físicas' sobre la presión pueden resultar en la aparición de una capa límite numérica de tamaño $O(\nu T)^{1/2}$ (ver [11] y [21] para más discusión sobre este particular).

Dada la condición de incompresibilidad (2.1b), se requieren también subespacios cerrados de estos espacios formados por campos solenoidales. Así, en notación standard (ver [27]) se define:

$$
\begin{aligned}
H &= \{u \in (L^2(\Omega))^d \;/\; \exists \operatorname{div} u = 0 \in L^2(\Omega), \;\; n \cdot u|_\Gamma = 0\} && (2.5)\\
V &= \{u \in (H_0^1(\Omega))^d \;/\; \operatorname{div} u = 0 \in L^2(\Omega)\} && (2.6)
\end{aligned}
$$

La dependencia temporal del sistema (2.1) comporta la necesidad de definir los siguientes espacios: dado $r \in [1, \infty)$, $T > 0$ y un espacio de Banach W, el espacio $L^r(0, T; W)$ está formado por las funciones de $(0, T)$ en W que son fuertemente r–integrables, es decir, tales que:

$$||u||_{L^r(0,T;W)} = (\int_0^T ||u(t)||_W^r \, dt)^{1/r} \; < \infty \qquad (2.7)$$

Es un nuevo espacio de Banach con respecto a la norma $||u||_{L^r(0,T;W)}$. El espacio de las funciones esencialmente acotadas de $(0, T)$ en W se denota por $L^\infty(0, T; W)$. Cuando W es un espacio de Hilbert con producto escalar $(.,.)_W$, el espacio $L^2(0, T; W)$ también lo es con respecto a:

$$(u, v) \; = \; \int_0^T (u(t), v(t))_W \, dt \qquad (2.8)$$

En esta notación, dada $f \in L^2(0, T; (H^{-1}(\Omega))^d)$, la forma débil de (2.1) consiste en hallar $u \in L^2(0, T; (H_0^1(\Omega))^d)$ y $p \in L^2(0, T; L_0^2(\Omega))$ tales que:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(u(t), v) + ((u \cdot \nabla)u, v) + \nu((u, v)) - (\operatorname{div} v, p) =< f(t), v >, \forall v \in (H_0^1(\Omega))^d \quad (2.9a)\\
(\operatorname{div} u, q) = 0, \qquad\qquad \forall q \in L_0^2(\Omega) \qquad (2.9b)
\end{aligned}
$$

Existe solución de (2.9), la cual es única para ν suficientemente grande (ver [27]). En el caso bidimensional la solución es siempre única. Estas soluciones se caracterizan por cumplir (ver [27]) $u \in L^2(0, T; V)$ y:

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) \; + \; ((u(t) \cdot \nabla)u(t), v) \; + \; \nu((u(t), v)) \; =< f(t), v >, \quad \forall v \in V \qquad (2.10)$$

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y NOTACION

La evolución de un fluído incompresible viscoso en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ está gobernada, en la formulación en variables primitivas, por la ecuación de Navier–Stokes incompresible no estacionaria:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u + \nabla p - \nu \nabla^2 u = f \tag{2.1a}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \tag{2.1b}$$

en $Q = \Omega \times (0, T)$, donde $u(x, t) \in \mathbb{R}^d$ es la velocidad del fluído en la posición $x \in \Omega$ y el tiempo $t \in (0, T)$ (con $T > 0$ dado), $p(x, t) \in \mathbb{R}$ es la presión cinemática del fluído, $\nu > 0$ es la viscosidad cinemática y $f(x, t)$ es una fuerza externa. El sistema (2.1) requiere de condiciones de contorno; por simplicidad, se consideran sólo condiciones de Dirichlet homogéneas:

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma \times (0, T) \tag{2.2}$$

donde la frontera $\Gamma = \partial\Omega$ se supone suficientemente regular (ver [27]). El presente estudio puede exterderse, sin embargo, a condiciones de contorno más generales.

Se debe especificar también una condición inicial para la velocidad:

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \Omega \tag{2.3}$$

mientras que la presión no requiere, a priori, de condición de contorno o inicial alguna.

Para el estudio de estas equaciones de movimiento se consideran los siguientes espacios de Hilbert (ver, por ejemplo, [10]): $L^2(\Omega)$, con el producto escalar usual $(u, v) = \int_\Omega u\, v\; dx$ y norma $|u| = (u, u)^{1/2}$; el espacio cociente $L^2_0(\Omega) = L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ en el caso de condición de contorno de Dirichlet sólo, dado que en ese caso la presión queda definida salvo constante aditiva; el espacio $H^1(\Omega)$, cuyo producto escalar y norma se designan respectivamente por $(u, v)_1 = (u, v) + (\nabla u, \nabla v)$ y $||u|| = (u, u)_1^{1/2}$.

El espacio $H^1(\Omega)$ contiene a $H^1_0(\Omega)$ como subespacio cerrado, formado por funciones que se anulan en la frontera del dominio. La desigualdad de Poincaré–Friedrich:

$$d_0(\nabla u, \nabla u)^{1/2} \geq (u, u)^{1/2}, \qquad \forall u \in H^1_0(\Omega) \tag{2.4}$$

donde $d_0 > 0$ es una constante que depende de Ω, asegura que $||u||_0 = (\nabla u, \nabla v)^{1/2}$ es una norma en $H^1_0(\Omega)$, equivalente a la norma inducida por $H^1(\Omega)$. El producto escalar en $H^1_0(\Omega)$ es, entonces, $((u, v)) = (\nabla u, \nabla v)$. El espacio dual de $H^1_0(\Omega)$ se denota por $H^{-1}(\Omega)$; la dualidad entre estos espacios se designa por $< \, , \, >$. Todos estos resultados se extienden a espacios de funciones vectoriales.

1. INTRODUCCION

Para la resolución numérica de la ecuación de Navier–Stokes no estacionaria, que describe la evolución de un fluído incompresible viscoso, se han desarrollado numerosos métodos. Entre ellos, los métodos de paso fraccionado se caracterizan por una descomposición de los diferentes operadores que aparecen en la ecuación (convección, difusión, incompresibilidad) en cada paso de tiempo (ver, por ejemplo, [7], [8], [13] o [14]). Dichos métodos aparecieron originalmente en este contexto en los trabajos de A. J. Chorin ([6]) y R. Temam ([26]); algunos de ellos, principalmente los desarrollados como métodos de proyección (del campo de velocidades sobre el subespacio de campos solenoidales), presentan una dificultad en la imposición de las condiciones de contorno sobre la velocidad, incompatibles con las condiciones adecuadas en las fase de incompresibilidad (ver [28]). Este hecho puede generar la aparición de un cierto error en la dirección tangencial a la frontera (ver [12], [21] o [23]).

En este trabajo se presenta un nuevo método de paso fraccionado, el cual permite la imposición de las condiciones de contorno reales del problema en todos las fases. Para este método se ha enunciado y demostrado un teorema de convergencia a la solución continua, que mejora los resultados de convergencia obtenidos por R. Temam para el método original de paso fraccionado. En concreto, tanto las velocidades en los pasos fraccionados como al final del paso convergen a la solución en el espacio $L^2(0,T;(H_0^1(\Omega))^d$, mientras que en el método original las velocidades al final del paso convergen sólo en $L^2(0,T;(L^2(\Omega))^d$ (debido a que no satisfacen la condición de contorno exacta).

Un posible inconveniente en la utilización del método propuesto reside en que, para resolver de manera adecuada la fase de incompresibilidad, la discretización espacial empleada debe cumplir la condición *inf–sup* o de Ladyzenskaya–Babuška–Brezzi (LBB, ver [4]), que aparece, por ejemplo, en la resolución del problema de Stokes.

Por otra parte, el método resulta ser de primer orden en el paso de tiempo tanto para las velocidades como para las presiones, según se ha comprobado numéricamente en un problema test.

Uno de los motivos que llevó a la introducción de este método fue el estudio de un algoritmo predictor–multicorrector para la ecuación de Navier–Stokes no estacionaria, desarrollado por T. J. R. Hughes y colaboradores ([5], [19]) en los años 80. El nuevo método de paso fraccionado permite una reinterpretación del algoritmo en este contexto (ver [3]).

Finalmente, se presentan resultados numéricos obtenidos con este método mediante una interpolación en los elementos finitos Q_1P_0 y Q_2P_1, que, respectivamente, no cumplen y cumplen la condición LBB. Dichos resultados incluyen, además del estudio numérico del orden de convergencia, el clásico problema del flujo en una cavidad.

CONVERGENCIA DE UN METODO DE PASO FRACCIONADO PARA LA ECUACION DE NAVIER–STOKES INCOMPRESIBLE

J. Blasco (1)*, R. Codina(2), A. Huerta(1)

(1) Departament de Matemàtica Aplicada III

(2) Departament de Resistència de Materials i Estructures a l'Enginyeria

E.T.S. d'Enginyers de Camins, Universitat Politècnica de Catalunya,
c/ Gran Capità s/n, 08034 Barcelona.

RESUMEN

En este trabajo se presenta un método implícito de paso fraccionado para la resolución numérica de la ecuación de Navier–Stokes incompresible no estacionaria en variables primitivas. Se demuestra la convergencia del método a una solución exacta de la ecuación en el espacio $L^2(0,T;(H_0^1(\Omega))^d$, la cual resulta ser de primer orden en el paso de tiempo tanto para la velocidad como para la presión. Mediante una descomposición del término difusivo, se imponen las condiciones de contorno de Dirichlet del problema original en todas las etapas del método, no requiriendo de condición de contorno alguna para la presión. Se proporcionan resultados numéricos obtenidos con dos interpolaciones diferentes del método en elementos finitos.

(*) Con la colaboración del Departament de Política Territorial i Obres Públiques de la Generalitat de Catalunya.