Interpolación de Hermite vía Elementos Finitos

D. Barrera Rosillo, M. J. Ibáñez Pérez, A. López Carmona

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Granada
Facultad de Ciencias
Campus Universitario de Fuentenueva, s/n
18071-Granada

Se utilizan elementos finitos compuestos triangulares y cuadrangulares para construir funciones de soporte compacto que permiten definir interpolantes de Hermite de orden uno exactos en espacios de polinomios de grado prefijado, dependiente del grado del elemento finito elegido. Asimismo, se analiza el problema de la búsqueda de configuraciones unisolventes formadas por puntos de $\mathbb{Z}^2$ y se dan resultados para la interpolación de bajo grado.

1. Introducción

El trabajo que se presenta se enmarca en el contexto de la construcción de interpolantes de Hermite de orden uno bivariados para los que los valores de la función y de sus derivadas parciales se toman sobre $\mathbb{Z}^2$.

En [4] W. Dahmen, T.N.T. Goodman y C. A. Micchelli proponen determinar la función fundamental para un problema de interpolación de Lagrange con datos sobre $\mathbb{Z}^2$; la construyen mediante el *ensamblaje* de elementos finitos de Hsieh-Clough-Tocher (HCT) cúbicos de clase uno, exigiendo que el interpolante asociado sea exacto en el espacio de los polinomios de grado menor o igual que tres, y prueban la unisolvencia del problema poniéndolo en relación con uno de interpolación lagrangiana polinómica adecuado.

Nuestro objetivo es construir interpolantes de Hermite de orden uno partiendo de elementos finitos triangulares de los tipos HCT y Powell-Sabin (PS), y cuadrangulares de tipo Fraeijs de Veubeke-Sander (FVS), ampliamente estudiados por P. Sablonnière y M. Laghchim-Lahlou ([6], [7], [8], [13], [14]).

En la sección 2 consideraremos el problema correspondiente a los elementos finitos de tipo PS, ilustrándolo con un ejemplo concreto, así como un resultado estándar acerca del error de interpolación. A continuación -sección 3- daremos el resultado de existencia y unicidad correspondiente al elemento finito de tipo HCT y haremos algunas consideraciones generales sobre el FVS.

Los resultados que se establecerán mostrarán que íntimamente unido a los anteriores problemas se encuentra el del estudio de sistemas de puntos del plano elegidos de entre los vértices de la triangulación tridireccional que proporcionan configuraciones de Hermite de orden uno unisolventes en espacios adecuados de polinomios. Para un sistema concreto de puntos se planteará la necesidad de clasificar las configuraciones asociadas, lo que constituirá el tema de la sección 4.

Finalizaremos analizando algunos sistemas simples de puntos adecuados para construir interpolantes de bajo grado y haciendo algunas referencias al problema de interpolación lagrangiano, no tratado aquí, pero susceptible de un tratamiento similar.

2. Interpolación de Hermite y elementos finitos de tipo PS

2.1. Preliminares

Sea $\Delta^{(1)}$ la triangulación regular del plano inducida por las trasladadas enteras de las rectas $x = 0$, $y = 0$ y $x - y = 0$. Trazando las medianas de cada triángulo T de $\Delta^{(1)}$ obtenemos una subtriangulación particular de T de tipo PS, que notaremos τ_6, y una subtriangulación del plano asociada.

Si $\mathbb{P}_m^n(T, \tau_6)$ representa el espacio de las funciones de clase $C^n(T)$ cuyas restricciones a los micro-triángulos de T son polinomios de grado menor o igual que m, para un entero $r \geq 1$, cualquier función de $\mathbb{P}_{4r+1}^{2r+1}(T, \tau_6)$ (resp. $r \geq 0$ y $\mathbb{P}_{4r+2}^{2r+1}(T, \tau_6)$) queda unívocamente determinada por sus valores y los de sus derivadas de órdenes menores o iguales que $3r$ (resp. $3r + 1$) en los vértices de T ([7]).

Si S es un subconjunto poligonal de $\mathbb{R}^2$ al que se puede dotar de la triangulación $\Delta^{(1)}$, el *ensamblaje* de los elementos de Powell-Sabin correspondientes a S proporciona una función de clase $C^{2r}(S)$ (resp. $C^{2r+1}(S)$).

Por otra parte, sean ρ un número natural menor o igual que $4r + 1$ (resp. $4r + 2$) y $\mathbb{P}_\rho$ el espacio de polinomios de grado menor o igual que ρ. Supongamos que P es un subconjunto de $\mathbb{Z}^2$ cuya envolvente convexa tiene al origen como punto interior, que P_1 es un subconjunto de P y que P_0 es un subconjunto de $P - P_1$. Si

$$\mathrm{card} P_0 + 3\ \mathrm{card} P_1 = \frac{(\rho+1)(\rho+2)}{2}$$

diremos que (P_0, P_1) es una configuración $\mathbb{P}_\rho$-admisible para la interpolación de Hermite de orden uno.

Sea (P_0, P_1) una configuración $\mathbb{P}_\rho$-admisible y escribamos, para $j = 0, 1$,

$$P_j = \left\{p_i^j,\ i \in I_j\right\},$$

donde los conjuntos de índices I_j se definen con tal fin. Si para cualesquiera conjuntos de escalares $\{\mu_i^{00},\ i \in I_0\}$ y $\{\nu_i^{00}, \nu_i^{10}, \nu_i^{01},\ i \in I_1\}$ el problema de interpolación de Hermite consistente en hallar un polinomio $q = q(x, y)$ de $\mathbb{P}_\rho$ tal que

$$q(p_i^0) = \mu_i^{00},\ i \in I_0$$
$$q(p_i^1) = \nu_i^{00},\ \frac{\partial q}{\partial x}\left(p_i^1\right) = \nu_i^{10},\ \frac{\partial q}{\partial y}\left(p_i^1\right) = \nu_i^{01},\ i \in I_1$$

es $I\!\!P_\rho$-unisolvente, diremos que (P_0, P_1) es una configuración $I\!\!P_\rho$-unisolvente. En este caso, podemos considerar el conjunto de las funciones de base de $I\!\!P_\rho$,

$$B_\rho\left(P_0, P_1\right) = \left\{q_i^{00},\ i \in I_0\right\} \cup \left\{q_i^{00},\ q_i^{10}, q_i^{01},\ i \in I_1\right\},$$

gracias a las cuales cualquier polinomio q de $I\!\!P_\rho$ se escribe de forma única como

$$q = \sum_{i\in I_0} q\left(p_i^0\right) q_i^{00} + \sum_{i \in I_1}\left(q\left(p_i^1\right) q_i^{00} + \frac{\partial q}{\partial x}\left(p_i^1\right) q_i^{10} + \frac{\partial q}{\partial y}\left(p_i^1\right) q_i^{01}\right) \tag{2.1.1}$$

2.2. El problema de interpolación spline de Hermite

Sean (P_0, P_1) una configuración $I\!\!P_\rho$-unisolvente y S_i, $0 \le i \le 1$, los subconjuntos de $I\!\!R^2$ obtenidos uniendo los hexágonos centrados en los puntos de P_i, cada uno de los cuales constituído por los triángulos que tienen por vértice común el punto considerado. Para cada α de $Z\!\!\!Z^2$, hagamos

$$S_i\left(\alpha\right) = \left\{s + \alpha :\ s \in S_i\right\} \quad i = 0, 1$$

Sea $r \geq 1$. Cualesquiera funciones $L^{00}_{(P_0,P_1),\alpha}$, $L^{10}_{(P_0,P_1),\alpha}$ y $L^{01}_{(P_0,P_1),\alpha}$ tales que

$$\operatorname{sop} L^{00}_{(P_0,P_1),\alpha} = S_0\left(\alpha\right) \bigcup S_1\left(\alpha\right),\ \operatorname{sop} L^{10}_{(P_0,P_1),\alpha} = \operatorname{sop} L^{01}_{(P_0,P_1),\alpha} = S_1\left(\alpha\right) \tag{2.2.2}$$

y

$$L^{ij}_{(P_0,P_1),\alpha\ |T} \in I\!\!P^{2r+1}_{4r+1}\left(T, \tau_6\right),\ 0 \le i + j \le 1,\ i, j \ge 0 \tag{2.2.3}$$

(resp. $L^{ij}_{(P_0,P_1),\alpha\ |T} \in I\!\!P^{2r+1}_{4r+2}\left(T, \tau_6\right)$) para cada triángulo T de $S_{i+j}\left(\alpha\right)$ quedan determinadas por sus valores y los de sus derivadas hasta el orden $3r$ (resp. $3r+1$) en los puntos de

$$P_i\left(\alpha\right) = \left\{p + \alpha :\ p \in P_i\right\} \quad i = 0, 1$$

Prefijamos sus valores y los de sus gradientes: para cada β de $Z\!\!\!Z^2$ definimos

$$\begin{aligned}
&L^{00}_{(P_0,P_1),\alpha}\left(\beta\right) = \delta_{\alpha\beta},\ \ \nabla L^{00}_{(P_0,P_1),\alpha}\left(\beta\right) = 0 \\
&L^{10}_{(P_0,P_1),\alpha}\left(\beta\right) = 0,\ \ \nabla L^{10}_{(P_0,P_1),\alpha}\left(\beta\right) = \left(\delta_{\alpha\beta}, 0\right) \\
&L^{01}_{(P_0,P_1),\alpha}\left(\beta\right) = 0,\ \ \nabla L^{01}_{(P_0,P_1),\alpha}\left(\beta\right) = \left(0, \delta_{\alpha\beta}\right)
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Supuestas construídas, podemos definir el interpolante de Hermite $\mathcal{H}_{\rho,(P_0,P_1)}$ como sigue:

$$\mathcal{H}_{\rho,(P_0,P_1)} f = \sum_{\alpha \in Z\!\!\!Z^2}\left(f\left(\alpha\right) L^{00}_{(P_0,P_1),\alpha} + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\alpha\right) L^{10}_{(P_0,P_1),\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\alpha\right) L^{01}_{(P_0,P_1),\alpha}\right) \tag{2.2.5}$$

Determinamos los restantes grados de libertad de manera que $\mathcal{H}_{\rho,(P_0,P_1)}$ sea un interpolante exacto en $I\!\!P_\rho$, es decir, tal que

$$\mathcal{H}_{\rho,(P_0,P_1)} q = q \quad \forall q \in I\!\!P_\rho$$

Como (P_0, P_1) es una configuración $I\!P_\rho$-unisolvente, para cada β de $Z\!\!Z^2$ la configuración $(P_0(\beta), P_1(\beta))$ también es $I\!P_\rho$-unisolvente. Hagamos, para $i = 0, 1$,

$$-P_i(\beta) = \{2\beta - \alpha,\ \gamma \in P_i(\beta)\}$$

También $(-P_0(\beta), -P_1(\beta))$ es $I\!P_\rho$-unisolvente. Sea

$$B_\rho(-P_0(\beta), -P_1(\beta)) = \left\{q^{00}_{2\beta-\alpha},\ \alpha \in P_0(\beta)\right\} \cup \left\{q^{00}_{2\beta-\alpha},\ q^{10}_{2\beta-\alpha}, q^{01}_{2\beta-\alpha},\ \alpha \in P_1(\beta)\right\} \quad (2.2.6)$$

su conjunto de funciones de base.

Definimos, para cada entero s entre 2 y $3r$ (resp. $3r + 1$),

$$\begin{aligned} D^s L^{00}_{(P_0,P_1),\beta}(\gamma) &= D^s q^{00}_{2\beta-\gamma}(\beta),\ \gamma \in P_0(\beta) \\ D^s L^{ij}_{(P_0,P_1),\beta}(\gamma) &= D^s q^{ij}_{2\beta-\gamma}(\beta),\ 0 \le i + j \le 1,\ i, j \ge 0,\ \gamma \in P_1(\beta) \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Proposición 2.1 *Sean $r \ge 1$, ρ un entero no negativo menor o igual que $4r + 1$ (resp. $4r + 2$) y (P_0, P_1) una configuración $I\!P_\rho$-unisolvente. Para cada β de $Z\!\!Z^2$, sean $L^{00}_{(P_0,P_1),\beta}$, $L^{10}_{(P_0,P_1),\beta}$ y $L^{01}_{(P_0,P_1),\beta}$ las únicas funciones de clase C^{2r} (resp. C^{2r+1}) que satisfacen las condiciones (2.2.2), (2.2.3), (2.2.4) y (2.2.7). Entonces el interpolante $\mathcal{H}_{\rho,(P_0,P_1)}$ definido por (2.2.5) es exacto en $I\!P_\rho$.*

Demostración. Por simplicidad omitimos la referencia a (P_0, P_1) al utilizar las funciones $L^{ij}_{(P_0,P_1),\beta}$.

Sea q un polinomio de $I\!P_\rho$. Para cada β de $Z\!\!Z^2$ las igualdades (2.2.4) implican que

$$\mathcal{H}_{\rho,(P_0,P_1)} q(\beta) = q(\beta),\ \nabla \mathcal{H}_{\rho,(P_0,P_1)} q(\beta) = \nabla q(\beta)$$

Además, para cada entero s entre 2 y $3r$ (resp. $3r + 1$) se verifica que

$$\begin{aligned} D^s \mathcal{H}_{\rho,(P_0,P_1)} q(\beta) = & \sum_{\alpha \in -P_0(\beta)} q(\alpha) D^s L^{00}_\alpha(\beta) + \sum_{\alpha \in -P_1(\beta)} q(\alpha) D^s L^{00}_\alpha(\beta) + \\ & \sum_{\alpha \in -P_1(\beta)} \left(\frac{\partial q}{\partial x}(\alpha) D^s L^{10}_\alpha(\beta) + \frac{\partial q}{\partial y}(\alpha) D^s L^{01}_\alpha(\beta) \right) \\ = & \sum_{\alpha \in P_0(\beta) \cup P_1(\beta)} q(2\beta - \alpha) D^s L^{00}_{2\beta-\alpha}(\beta) + \\ & \sum_{\alpha \in P_1(\beta)} \left(\frac{\partial q}{\partial x}(2\beta - \alpha) D^s L^{10}_{2\beta-\alpha}(\beta) + \frac{\partial q}{\partial y}(2\beta - \alpha) D^s L^{01}_{2\beta-\alpha}(\beta) \right) \end{aligned}$$

La regularidad de la triangulación considerada permite escribir

$$\begin{aligned} D^s \mathcal{H}_{\rho,(P_0,P_1)} q(\beta) = & \sum_{\alpha \in P_0(\beta) \cup P_1(\beta)} q(2\beta - \alpha) D^s L^{00}_\beta(\alpha) + \\ & \sum_{\alpha \in P_1(\beta)} \left(\frac{\partial q}{\partial x}(2\beta - \alpha) D^s L^{10}_\beta(\alpha) + \frac{\partial q}{\partial y}(2\beta - \alpha) D^s L^{01}_\beta(\alpha) \right) \end{aligned}$$

y las igualdades (2.2.7) conducen a la expresión equivalente

$$D^s\mathcal{H}_{\rho,(P_0,P_1)}q(\beta) = \sum_{\alpha\in P_0(\beta)\cup P_1(\beta)} q(2\beta-\alpha)\, D^s q^{00}_{2\beta-\alpha}(\beta) +$$

$$\sum_{\alpha\in P_1(\beta)} \left(\frac{\partial q}{\partial x}(2\beta-\alpha)\, D^s q^{10}_{2\beta-\alpha}(\beta) + \frac{\partial q}{\partial y}(2\beta-\alpha)\, D^s q^{01}_{2\beta-\alpha}(\beta)\right)$$

Haciendo uso del conjunto $B_\rho(-P_0(\beta), -P_1(\beta))$ de funciones de base para $I\!P_\rho$ relativo a $(-P_0(\beta), -P_1(\beta))$ (cf. (2.2.6)) y de la representación (2.1.1), el polinomio q se escribe de forma única como

$$q = \sum_{\alpha\in P_0(\beta)\cup P_1(\beta)} q(2\beta-\alpha)\, q^{00}_{2\beta-\alpha} + \sum_{\alpha\in P_1(\beta)} \left(\frac{\partial q}{\partial x}(2\beta-\alpha)\, q^{10}_{2\beta-\alpha} + \frac{\partial q}{\partial y}(2\beta-\alpha)\, q^{01}_{2\beta-\alpha}\right)$$

En consecuencia, se cumple que

$$D^s\mathcal{H}_{\rho,(P_0,P_1)}q(\beta) = D^s q(\beta).$$

y se deduce que $\mathcal{H}_{\rho,(P_0,P_1)}q = q$. $\square$

Se ha omitido el valor $r = 0$ pues el caso correspondiente está tratado en [13] para una α-triangulación.

2.3. Un interpolante de Hermite $I\!P_4$-exacto

Un ejemplo permitirá apreciar el procedimiento constructivo. Partimos del elemento finito tipo Powell-Sabin quíntico de clase dos, correspondiente a $r = 1$, para construir un interpolante exacto en $I\!P_4$. La determinación del interpolante de Hermite requiere la especificación de las derivadas de órdenes dos y tres.

Elegimos

$$P = \{(0,0), (1,0), (1,1), (0,1), (-1,0), (-1,-1), (0,-1)\},$$

$$P_1 = \{(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)\}$$

y

$$P_0 = \{(-1,0), (-1,-1), (0,-1)\}$$

La configuración (P_0, P_1) es $I\!P_4$-unisolvente, y se esquematiza en la Fig. 2.1.

En la Fig. 2.2 se representa la configuración $(-P_0(\beta), -P_1(\beta))$

Los soportes de las funciones fundamentales para el problema de interpolación de Hermite tratado correspondientes a β son las envolventes convexas de los conjuntos de puntos mostrados en la 2.3

Los valores de sus derivadas parciales segundas y terceras se hallan a partir de las funciones de base asociadas a la configuración $(-P_0(\beta), -P_1(\beta))$ y los agrupamos en la Tabla 2.1

$$
\begin{array}{ccc}
 & (0,1) & (1,1) \\
(-1,0) & (0,0) & (1,0) \\
(-1,-1) & (0,-1) &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
 & \odot & \odot \\
\bullet & \odot & \odot \\
\bullet & \bullet &
\end{array}
$$

Fig. 2.1. Configuración $I\!P_4$-unisolvente. $\bullet$ y $\odot$ indican datos de Lagrange y de Hermite, respectivamente.

$$
\begin{array}{ccc}
 & \beta+v & \beta+u+v \\
\beta-u & \beta & \beta+u \\
\beta-u-v & \beta-v &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
 & \bullet & \bullet \\
\odot & \odot & \bullet \\
\odot & \odot &
\end{array}
$$

Fig. 2.2. Configuración $(-P_0(\beta), -P_1(\beta))$. $u = (1,0), v = (0,1)$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \beta & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccc}
 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \beta & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot &
\end{array}
$$

Fig. 2.3. Conjuntos para los soportes de las funciones fundamentales.

Polinomios de base	Derivadas segundas y terceras en $(0,0)$							Punto del soporte
$p^{0,0}_{(0,0)}$	-4	2	-4	0	0	0	0	$\gamma=(0,0)$
$p^{0,0}_{(1,0)}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\gamma=(-1,0)$
$p^{0,0}_{(1,1)}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\gamma=(-1,-1)$
$p^{0,0}_{(0,1)}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	$\gamma=(0,-1)$
$p^{0,0}_{(-1,0)}$	$\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{4}$	0	-3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\gamma=(1,0)$
$p^{0,0}_{(-1,-1)}$	0	$\frac{7}{4}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\gamma=(1,1)$
$p^{0,0}_{(0,-1)}$	0	$-\frac{7}{4}$	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-3	$\gamma=(0,1)$
$p^{1,0}_{(0,0)}$	2	0	0	-6	2	-2	0	$\gamma=(0,0)$
$p^{1,0}_{(-1,0)}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	-1	0	$\gamma=(1,0)$
$p^{1,0}_{(-1,-1)}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	-1	1	0	$\gamma=(1,1)$
$p^{1,0}_{(0,-1)}$	0	0	0	0	-2	2	0	$\gamma=(0,1)$
$p^{0,1}_{(0,0)}$	0	0	2	0	-2	2	-6	$\gamma=(0,0)$
$p^{0,1}_{(-1,0)}$	0	0	0	0	2	-2	0	$\gamma=(1,0)$
$p^{0,1}_{(-1,-1)}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1	-1	0	$\gamma=(1,1)$
$p^{0,1}_{(0,-1)}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	-1	1	0	$\gamma=(0,1)$

Tabla 2.1. Datos para la determinación de las funciones fundamentales

2.4. Sobre el error de interpolación

El que el operador de interpolación $\mathcal{H}_{\rho,(P_0,P_1)}$ sea exacto en $I\!P_\rho$ permite enunciar un resultado estándar acerca de la norma del error de interpolación.

Proposición 2.2 *Para un parámetro de escala $h>0$, el operador $\mathcal{H}^h_{\rho,(P_0,P_1)}$ definido por*

$$\mathcal{H}^h_{\rho,(P_0,P_1)}f=\mathcal{E}_h\mathcal{H}_{\rho,(P_0,P_1)}\mathcal{E}_{\frac{1}{h}}f,$$

donde $\mathcal{E}_hf(x)=f(hx)$, satisface que el error de interpolación $\left|\mathcal{H}^h_{\rho,(P_0,P_1)}f-f\right|$ con f suficientemente regular es de orden $h^{\rho+1}$ para $h\to 0^+$.

Es posible abordar el problema de estimar la constante que interviene en la acotación del error de interpolación haciendo uso de la técnica desarrollada en [5]. Para cada macrotriángulo T de la triangulación $\Delta^{(1)}$ el error de interpolación se aproxima considerando las representaciones Bernstein-Bèzier ([3], [7]) de ciertas expresiones polinómicas a trozos definidas a partir de las funciones fundamentales que determinan $\mathcal{H}_{\rho,(P_0,P_1)}$ y que cortan al interior de T ([1]).

En [13] se trata el caso $r=0$, cuadrático de clase uno, que hemos omitido aquí.

3. Interpolación de Hermite y elementos finitos de tipos HCT y FVS

Cuando se consideran elementos finitos de los tipos HCT y FVS el planteamiento desarrollado previamente sigue siendo aplicable con las modificaciones oportunas. A continuación nos ocupamos del caso HCT, detallando las condiciones precisas análogas a (2.2.2), (2.2.3), (2.2.4) y (2.2.7) y enunciando un resultado similar a la Proposición 2.1. En lo que respecta al elemento finito de tipo FVS hacemos tan sólo algunas indicaciones ([1]).

3.1. Elementos de tipo HCT

Si en cada triángulo T de la triangulación $\Delta^{(1)}$ consideramos el baricentro, por ejemplo, y unimos los vértices con él obtenemos una subtriangulación particular de T de tipo HCT, que notaremos τ_3, y una subtriangulación del plano inducida por ella. Ahora $I\!\!P_m^n(T,\tau_3)$ representa el espacio de las funciones de clase $C^m(T)$ cuyas restricciones a los tres micro-triángulos de T son polinomios de grado menor o igual que n.

En [7] y [8] se estudian las condiciones que determinan de forma única a una función definida en un triángulo T. Supongamos que T tiene vértices A_i, $1\leq i\leq 3$, y que l_i es el lado opuesto al vértice A_i.

Si r es un entero no negativo, cualquier función f de $I\!\!P_{6r+3}^{2r+1}(T,\tau_3)$ queda determinada si se conocen los datos

$$\begin{aligned}
&D^s f(A_i),\ 0\leq s\leq 3r+1\\
&D_{d_i}^s f\left(p_{i,j}^s\right),\ 1\leq j\leq s,\ 1\leq s\leq 2r+1\\
&D_{d_i}^s f\left(p_{i,j}^{4r+2-s}\right),\ 1\leq j\leq 4r+2-s,\ 2r+2\leq s\leq 4r+1
\end{aligned}$$

donde las d_i, $1\leq i\leq 3$, son direcciones no paralelas a los lados l_i, y los $p_{i,m}^n$, $1\leq m\leq n$, representan n puntos distintos e interiores a l_i, estando el índice asociado al orden de la derivada direccional que los utiliza.

Si r es un entero mayor o igual que 1 y f es una función de $I\!\!P_{6r+1}^{2r+1}(T,\tau_3)$ los datos correspondientes son

$$\begin{aligned}
&D^s f(A_i),\ 0\leq s\leq 3r\\
&D_{d_i}^s f\left(p_{i,j}^s\right),\ 1\leq j\leq s,\ 1\leq s\leq 2r\\
&D_{d_i}^s f\left(p_{i,j}^{4r-s}\right),\ 1\leq j\leq 4r-s,\ 2r+2\leq s\leq 4r-1
\end{aligned}$$

Para una configuración (P_0,P_1) $I\!\!P_\rho$-unisolvente, con ρ entero no negativo menor o igual que $6r+3$ (resp. $6r+1$), estamos interesados en construir funciones $\overline{L}_{(P_0,P_1),\alpha}^{00}$, $\overline{L}_{(P_0,P_1),\alpha}^{10}$ y $\overline{L}_{(P_0,P_1),\alpha}^{01}$ tales que

$$\operatorname{sop}\overline{L}_{(P_0,P_1),\alpha}^{00}=S_0(\alpha)\bigcup S_1(\alpha),\ \operatorname{sop}\overline{L}_{(P_0,P_1),\alpha}^{10}=\operatorname{sop}\overline{L}_{(P_0,P_1),\alpha}^{01}=S_1(\alpha)\qquad(3.1.1)$$

y que cumplan que

$$\overline{L}_{(P_0,P_1),\alpha\ |T}^{ij}\in I\!\!P_{6r+3}^{2r+1}(T,\tau_3),\ 0\leq i+j\leq 1,\ i,j\geq 0\qquad(3.1.2)$$

para cada triángulo T de $S_{i+j}(\alpha)$ (resp. $r \geq 1$ y $\overline{L}^{ij}_{(P_0,P_1),\alpha\,|T} \in \mathbb{P}^{2r+1}_{6r+1}(T,\tau_3)$), además de las igualdades

$$\begin{aligned}
&\overline{L}^{00}_{(P_0,P_1),\alpha}(\beta) = \delta_{\alpha\beta},\ \nabla\overline{L}^{00}_{(P_0,P_1),\alpha}(\beta) = 0\\
&\overline{L}^{10}_{(P_0,P_1),\alpha}(\beta) = 0,\ \nabla\overline{L}^{10}_{(P_0,P_1),\alpha}(\beta) = (\delta_{\alpha\beta},0)\\
&\overline{L}^{10}_{(P_0,P_1),\alpha}(\beta) = 0,\ \nabla\overline{L}^{01}_{(P_0,P_1),\alpha}(\beta) = (0,\delta_{\alpha\beta})
\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

para cada β de $\mathbb{Z}^2$. Serán globalmente de clase C^{2r+1} (resp. C^{2r}).

Sea $B_\rho(-P_0(\beta), -P_1(\beta))$ el conjunto de funciones de base relativo a $(-P_0(\beta), -P_1(\beta))$, definido en (2.2.6). Hagamos $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $e_3 = (1,1)$, $\overline{e}_1 = (0,1)$, $\overline{e}_2 = (1,0)$ y $\overline{e}_3 = (1,-1)$. Definimos para cada entero s entre 2 y $3r+1$ (resp. $3r$)

$$\begin{aligned}
&D^s\overline{L}^{00}_{(P_0,P_1),\beta}(\gamma) = D^s q^{00}_{2\beta-\gamma}(\beta),\ \gamma \in P_0(\beta)\\
&D^s\overline{L}^{ij}_{(P_0,P_1),\beta}(\gamma) = D^s q^{ij}_{2\beta-\gamma}(\beta),\ 0 \leq i+j \leq 1,\ i,j \geq 0,\ \gamma \in P_1(\beta)
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Para $\epsilon^n_{i,m} \in \left\{\pm\frac{m}{n+1}\right\}$, $1 \leq m \leq n$, $1 \leq i \leq 3$, definimos, para $\gamma \in P_0(\beta)$ y $1 \leq k \leq 3$,

$$D^s_{\overline{e}_k}\overline{L}^{00}_{(P_0,P_1),\beta}\left(\gamma + \epsilon^s_{k,j}e_k\right) = \begin{cases}
D^s_{\overline{e}_k} q^{00}_{2\beta-\gamma}\left(\epsilon^s_{k,j}e_k\right), & \begin{array}{l}1 \leq s \leq 2r+1\\ 1 \leq j \leq s\end{array}\\
resp.\ D^s_{\overline{e}_k} q^{00}_{2\beta-\gamma}\left(\epsilon^s_{k,j}e_k\right), & \begin{array}{l}1 \leq s \leq 2r\\ 1 \leq j \leq s\end{array}\\
D^s_{\overline{e}_k} q^{00}_{2\beta-\gamma}\left(\epsilon^{4r+2-s}_{k,j}e_k\right), & \begin{array}{l}2r+2 \leq s \leq 4r+1\\ 1 \leq j \leq 4r-s+2\end{array}\\
resp.\ D^s_{\overline{e}_k} q^{00}_{2\beta-\gamma}\left(\epsilon^{4r-s}_{k,j}e_k\right) & \begin{array}{l}2r+1 \leq s \leq 4r-1\\ 1 \leq j \leq 4r-s\end{array}
\end{cases} \tag{3.1.5}$$

y, para $\gamma \in P_1(\beta)$ y $1 \leq k \leq 3$,

$$D^s_{\overline{e}_k}\overline{L}^{ij}_{(P_0,P_1),\beta}\left(\gamma + \epsilon^s_{k,j}e_k\right) = \begin{cases}
D^s_{\overline{e}_k} q^{ij}_{2\beta-\gamma}\left(\epsilon^s_{k,j}e_k\right), & \begin{array}{l}1 \leq s \leq 2r+1\\ 1 \leq j \leq s\end{array}\\
resp.\ D^s_{\overline{e}_k} q^{ij}_{2\beta-\gamma}\left(\epsilon^s_{k,j}e_k\right), & \begin{array}{l}1 \leq s \leq 2r\\ 1 \leq j \leq s\end{array}\\
D^s_{\overline{e}_k} q^{ij}_{2\beta-\gamma}\left(\epsilon^{4r+2-s}_{k,j}e_k\right), & \begin{array}{l}2r+2 \leq s \leq 4r+1\\ 1 \leq j \leq 4r-s+2\end{array}\\
resp.\ D^s_{\overline{e}_k} q^{ij}_{2\beta-\gamma}\left(\epsilon^{4r-s}_{k,j}e_k\right), & \begin{array}{l}2r+1 \leq s \leq 4r-1\\ 1 \leq j \leq 4r-s\end{array}
\end{cases} \tag{3.1.6}$$

con $0 \leq i+j \leq 1$, $i,j \geq 0$.

Proposición 3.1 *Sean r un entero no negativo (resp. $r \geq 1$) , ρ un entero no negativo menor o igual que $6r+3$ (resp. $6r+1$) y (P_0, P_1) una configuración $\mathbb{P}_\rho$-unisolvente. Para cada β de $\mathbb{Z}^2$, sean $\overline{L}^{00}_{(P_0,P_1),\beta}$, $\overline{L}^{10}_{(P_0,P_1),\beta}$ y $\overline{L}^{01}_{(P_0,P_1),\beta}$ las únicas funciones de clase C^{2r+1} (resp. C^{2r}) que satisfacen las condiciones (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5) y*

(3.1.6), siendo nulas las derivadas direccionales precisas en las restantes aristas. Entonces el interpolante $\overline{\mathcal{H}}_{\rho,(P_0,P_1)}$ definido por

$$\overline{\mathcal{H}}_{\rho,(P_0,P_1)} f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} \left(f(\alpha)\, \overline{L}^{00}_{(P_0,P_1),\alpha} + \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha)\, \overline{L}^{10}_{(P_0,P_1),\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha)\, \overline{L}^{01}_{(P_0,P_1),\alpha} \right)$$

es exacto en $\mathbb{P}_\rho$.

El elemento finito HCT cúbico de clase uno es el empleado en [4] para definir un interpolante lagrangiano exacto en $\mathbb{P}_3$.

3.2. Algunas consideraciones sobre el uso de elementos de tipo FVS

El tratamiento que se sigue para construir interpolantes de Hermite a partir del elemento finito de tipo FVS es similar al referido en la subsección precedente, considerando la partición en cuadriláteros, $\mathcal{P}$, inducida por las trasladadas enteras de las rectas $x = 0$ e $y = 0$. Si se trazan las diagonales de cada cuadrado Q de $\mathcal{P}$ se obtiene una subtriangulación particular de Q de tipo FVS, que notaremos τ_4, y una subtriangulación del plano asociada.

Los soportes de las funciones fundamentales correspondientes a un punto β formadas a partir de elementos finitos de este tipo se construyen uniendo los cuadrados que tienen a β como vértice común. Dependen de la exactitud deseada del operador de interpolación y de la configuración unisolvente que se considere.

Las condiciones que fijan los grados de libertad del problema son similares a las empleadas en el caso del elemento finito HCT y se imponen en puntos igualmente espaciados de los lados de los cuadrados que conforman los soportes ([1]).

En lo que respecta al error de interpolación, son aplicables las observaciones de la subsección 2.4.

4. Sistemas de puntos y configuraciones asociadas

Los resultados presentados en las secciones 2 y 3 muestran la necesidad de disponer de configuraciones unisolventes adecuadas al grado del elemento finito considerado y al orden de exactitud del interpolante para construir sus funciones fundamentales de soporte compacto. A ello dedicamos esta sección.

4.1. Clasificación de configuraciones admisibles

Describiremos en lo que sigue algunos hechos genéricos sobre la clasificación de configuraciones admisibles, basándonos en consideraciones de tipo combinatorio y de representación de grupos finitos ([15], [16]).

Supongamos que P es un subconjunto de $\mathbb{Z}^2$ prefijado, al que denominaremos sistema de puntos. El problema de determinar las configuraciones construídas con puntos de P admisibles para la interpolación de Hermite de orden uno equivale, en principio, a hallar las formas en que se pueden asignar a los puntos de P los símbolos s, l y h, por ejemplo, de manera que se cumpla la condición que define la admisibilidad.

Sea m un entero mayor o igual que dos. Analizaremos el número de configuraciones (P_0, P_1) $\mathbb{P}_m$-admisibles, con $P_1 \subset P$ y $P_0 \cup P_1 \subset P$.

Para ello, hagamos

$$j = \mathrm{card}\,(P - (P_0 \cup P_1)) \ , \ k - j = \mathrm{card}\,(P_0 \cup P_1) \tag{4.1.1}$$

La $\mathbb{P}_m$-admisibilidad de (P_0, P_1) se reduce al cumplimiento de las condiciones

$$(k-j) + 3\,(\mathrm{card}P - k) = \frac{(m+1)\,(m+2)}{2} \ , \ 0 \le j \le k \le \mathrm{card}P \tag{4.1.2}$$

Definición 4.1 *Sean P_0 y P_1 dos subconjuntos de P tales que $P_1 \subset P$ y $P_0 \cup P_1 \subset P$. Si j y k satisfacen la relación (4.1.1) y $(j, k-j, \mathrm{card}P - k)$ es solución de (4.1.2), diremos que (P_0, P_1) es una configuración $\mathbb{P}_m$-admisible de tipo $s^j l^{k-j} h^{\mathrm{card}P-k}$, en cuyo caso $(j, k-j, \mathrm{card}P - k)$ se dirá tipo admisible. Si alguno de los valores j, $k-j$ o $\mathrm{card}P - k$ es nulo omitiremos el término correspondiente, y si es la unidad omitiremos el índice.*

El número de configuraciones del tipo admisible $(j, k-j, \mathrm{card}P - k)$ es $\binom{\mathrm{card}P}{k}\binom{k}{j}$ y el de configuraciones admisibles en general es $\sum_{k,j}\binom{\mathrm{card}P}{k}\binom{k}{j}$, coeficiente de $x^{\frac{(m+1)(m+2)}{2}}$ en el desarrollo de $(1 + x + x^3)^{\mathrm{card}P}$, donde la suma se extiende al conjunto de tipos admisibles.

Al ser la triangulación del plano regular y pretender estudiar realmente las configuraciones $\mathbb{P}_m$-unisolventes, es razonable clasificar el conjunto de configuraciones de un tipo dado atendiendo a la conservación de la $\mathbb{P}_m$-unisolvencia mediante las isometrías del sistema de puntos P o de algunos asociado. Concretamente, le podemos hacer corresponder el sistema $\widetilde{P}$ formado de la manera natural por vértices de la triangulación equilátera $\Delta_*^{(1)}$relativa a $\Delta^{(1)}$ y notar P^* al sistema de puntos de los dos considerados con mayor número de isometrías.

A cada configuración (P_0, P_1) $\mathbb{P}_m$-admisible de tipo $s^j l^{k-j} h^{\mathrm{card}P-k}$ le corresponde un par (P_0^*, P_1^*), con P_0^* y P_1^* subconjuntos de P^*.

Definición 4.2 *Diremos que dos configuraciones $\mathbb{P}_m$-admisibles (P_0, P_1) y (Q_0, Q_1) de tipo $s^j l^{k-j} h^{\mathrm{card}P-k}$ son equivalentes si existe una isometría σ de P^* tal que $\sigma\,(P_i^*) = Q_i^*$, $0 \le i \le 1$.*

La relación considerada es de equivalencia e induce una partición del conjunto de configuraciones $\mathbb{P}_m$-admisibles de tipo $s^j l^{k-j} h^{\mathrm{card}P-k}$. Cada clase de equivalencia se dirá $\mathbb{P}_m$-admisible de tipo $s^j l^{k-j} h^{\mathrm{card}P-k}$.

La $\mathbb{P}_m$-unisolvencia de una configuración representante de cada una de las clases de equivalencia de un tipo dado implica la de todas las configuraciones de la misma, lo que justifica el que hablemos de clase de equivalencia $\mathbb{P}_m$-unisolvente de ese tipo y que nos interesemos en el cálculo del número de clases de equivalencia de ese tipo prefijado.

Sea $G\,(P^*)$ el grupo de isometías de P^*. Cada isometría σ de P^* induce una permutación $\pi\,(\sigma)$ de los puntos de P, permutación que se descompone como producto de ciclos disjuntos cuyos órdenes dividen al orden del grupo y forman un conjunto que notamos $J_{\pi(\sigma)}$. Si $\pi(\sigma)$ es producto de α_i i-ciclos, $i \in J_{\pi(\sigma)}$, el polinomio $\prod_{i\in J_{\pi(\sigma)}} x_i^{\alpha_i}$ se denomina representación de la estructura de ciclos de $\pi(\sigma)$.

Definición 4.3 *Si n es el máximo del conjunto $\bigcup_{\sigma\in G(P^*)} J_{\pi(\sigma)}$, al polinomio*

$$I_{G(P^*)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{\mathrm{card} G(P^*)} \sum_{\sigma\in G(P^*)} \prod_{i\in J_{\pi(\sigma)}} x_i^{\alpha_i},$$

lo llamaremos índice de ciclo de $G(P^*)$.

Incluir variables que no corresponden a ningún tipo de ciclo resultará ser un hecho irrelevante.

Proposición 4.4 *([15], [16]) El número de clases de equivalencia de tipo $s^j l^{k-j} h^{\mathrm{card}P-k}$ es el coeficiente de $s^j l^{k-j} h^{\mathrm{card}P-k}$ en $I_{G(P^*)}(s+l+h, s^2+l^2+h^2, \cdots, s^n+l^n+h^n)$.*

4.2. Configuraciones unisolventes para la interpolación de bajo grado

El problema de la unisolvencia de la interpolación polinómica de Hermite multivariada ha sido estudiado ampliamente y es objeto de una intensa investigación ([2], [12] reflejan el estado del tema de manera precisa).

La teoría de sistemas de interpolación desarrollada por M. Gasca, J. I. Maeztu, V. Ramírez y J. Lorente es una herramienta muy interesante en la determinación de la unisolvencia de un problema de Hermite dado y en la construcción de la solución. En [10] y [11] se presentan resultados en esta línea, que hacen uso del concepto de función de incidencia y que se han utilizado para decidir sobre la la unisolvencia de las configuraciones de una clase de equivalencia de un tipo dado o, al menos, para reducirlas al estudio de otras más simples.

La construcción de interpolantes de los tipos considerados en las secciones 2 y 3 se basa en el empleo de elementos finitos de tipos PS, HCT y FVS. Los grados, ligados a la clase sobre cada macro-triángulo y a la clase global, aumentan rápidamente. Los casos de grado más bajo corresponden a $I\!P_5^2$ y $I\!P_6^3$ (para triangulaciones tipo PS) y a $I\!P_3^1$, $I\!P_7^2$ y $I\!P_9^3$ (para las de tipos HCT y FVS). Daremos, pues, resultados correspondientes a estos espacios de funciones.

Comenzamos tomando $H_1 = \{(0,0), (1,0), (1,1), (0,1), (-1,0), (-1,-1), (0,-1)\}$. Para este sistema de puntos podemos considerar como espacios de interpolación $I\!P_m$, $2 \le m \le 4$. El grupo de isometrías $G(H_1^*)$ del hexágono regular H_1^* tiene índice de ciclo

$$I_{G(H_1^*)}(x_1, x_2, \cdots, x_6) = \frac{1}{12}\left(x_1^7 + 2x_1x_6 + 2x_1x_3^2 + 4x_1x_2^3 + 3x_1^3x_2^2\right)$$

En la Tabla 4.1 agrupamos las diferentes posibilidades en función del espacio considerado. Los esquemas de tipo s^2h^5 no pueden ser $I\!P_4$-unisolventes ([12]).

En las Tablas 4.2, 4.3, y 4.4 indicamos un representante de cada clase unisolvente para cada uno de los tipos admisibles.

Espacio	k	j	$k-j$	$7-k$	Tipo de esquema	Número de configuraciones	Número de clases
$\mathbb{P}_2$	7	1	6	0	sl^6	7	2
	6	3	3	1	s^3l^3h	140	15
	5	5	0	2	s^5h^2	21	4
$\mathbb{P}_3$	5	1	4	2	sl^4h^2	105	12
	4	3	1	3	s^3lh^3	140	15
$\mathbb{P}_4$	3	0	3	4	l^3h^4	35	6
	2	2	0	5	s^2h^5	21	4

Tabla 4.1. Tipos de esquemas y número de clases $\mathbb{P}_m$-admisibles, $2 \leq m \leq 4$.

Esquema	Representantes
sl^6	$\begin{array}{ccc} & \bullet & \times \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \end{array}$
s^3l^3h	$\begin{array}{ccc} & \bullet & \bullet \\ \times & \odot & \bullet \\ \times & \times & \end{array}$ $\begin{array}{ccc} & \bullet & \odot \\ \times & \bullet & \bullet \\ \times & \times & \end{array}$ $\begin{array}{ccc} & \times & \odot \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \times & \times & \end{array}$ $\begin{array}{ccc} & \times & \odot \\ \times & \bullet & \bullet \\ \times & \bullet & \end{array}$ $\begin{array}{ccc} & \times & \odot \\ \bullet & \bullet & \times \\ \times & \bullet & \end{array}$ $\begin{array}{ccc} & \bullet & \odot \\ \bullet & \times & \bullet \\ \times & \times & \end{array}$ $\begin{array}{ccc} & \bullet & \odot \\ \bullet & \times & \times \\ \times & \bullet & \end{array}$ $\begin{array}{ccc} & \times & \odot \\ \bullet & \times & \times \\ \bullet & \bullet & \end{array}$ $\begin{array}{ccc} & \times & \odot \\ \bullet & \times & \bullet \\ \bullet & \times & \end{array}$ $\begin{array}{ccc} & \bullet & \odot \\ \times & \times & \bullet \\ \bullet & \times & \end{array}$ $\begin{array}{ccc} & \bullet & \odot \\ \bullet & \times & \times \\ \bullet & \times & \end{array}$

Tabla 4.2. Representantes de clases de equivalencia $\mathbb{P}_2$-unisolventes. $\times$ indica punto sin dato, $\bullet$ dato lagrangiano y $\odot$ datos de Hermite

Si queremos abarcar los espacios $\mathbb{P}_m$, $5 \leq m \leq 9$, necesitamos un conjunto que incluya a H_1. La elección natural consiste en tomar el hexágono H de vértices $(2,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$, $(-2,0)$, $(-2,-2)$ y $(0,-2)$, y elegir como sistema de puntos el conjunto H_2 intersección de H y $\mathbb{Z}^2$. Sin embargo, podemos hacer una intermedia, C_1, consistente en la intersección del cuadrado C de vétices $(1,-1)$, $(1,1)$, $(-1,1)$ y $(-1,-1)$ con $\mathbb{Z}^2$.

El índice de ciclo del grupo de isometrías de C_1^* es

$$I_{G\left(C_1^*\right)}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{8}\left(x_1^9 + 2x_1x_4^2 + 4x_1^3x_2^3 + x_1x_2^4\right)$$

La Tabla 4.5 recoge los tipos de configuraciones admisibles, así como los números de configuraciones y clases de equivalencia de cada uno de ellos, para el el único espacio de polinomios no considerado anteriormente que es posible utilizar, $\mathbb{P}_5$, mientras que la Tabla 4.6 muestra representantes de las clases de configuraciones $\mathbb{P}_5$-unisolventes.

Esquema	Representantes											
sl^4h^2		$\odot$	$\times$		$\times$	$\odot$		$\bullet$	$\odot$		$\odot$	$\bullet$
	$\odot$	$\bullet$	$\bullet$	$\odot$	$\bullet$	$\bullet$	$\odot$	$\bullet$	$\times$	$\odot$	$\bullet$	$\times$
	$\bullet$	$\bullet$		$\bullet$	$\bullet$		$\bullet$	$\bullet$		$\bullet$	$\bullet$	
		$\bullet$	$\odot$		$\bullet$	$\odot$						
	$\odot$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\odot$	$\bullet$						
	$\bullet$	$\times$		$\times$	$\bullet$							
s^3lh^3		$\times$	$\times$		$\odot$	$\times$		$\times$	$\times$		$\times$	$\times$
	$\times$	$\bullet$	$\odot$	$\times$	$\bullet$	$\odot$	$\odot$	$\times$	$\bullet$	$\odot$	$\times$	$\odot$
	$\odot$	$\odot$		$\odot$	$\times$		$\odot$	$\odot$		$\odot$	$\bullet$	
		$\times$	$\bullet$		$\times$	$\odot$		$\times$	$\odot$		$\times$	$\bullet$
	$\odot$	$\times$	$\times$	$\bullet$	$\times$	$\times$	$\odot$	$\times$	$\times$	$\odot$	$\times$	$\odot$
	$\odot$	$\odot$		$\odot$	$\odot$		$\bullet$	$\odot$		$\odot$	$\times$	
		$\bullet$	$\odot$		$\times$	$\odot$		$\times$	$\odot$			
	$\times$	$\odot$	$\odot$	$\times$	$\odot$	$\bullet$	$\bullet$	$\odot$	$\times$			
	$\times$	$\times$		$\times$	$\odot$		$\times$	$\odot$				

Tabla 4.3. Representantes de clases de equivalencia de tipos $\mathbb{P}_3$-unisolventes.

	$\odot$	$\odot$		$\odot$	$\bullet$
$\bullet$	$\odot$	$\odot$	$\bullet$	$\odot$	$\odot$
$\bullet$	$\bullet$		$\odot$	$\bullet$	

Tabla 4.4. Representantes $\mathbb{P}_4$-unisolventes de tipo l^3h^4.

Si $P = H_2$ entonces el índice de ciclo del grupo de isometrías de P^* es

$$I_{G\left(H_2^*\right)}\left(x_1, x_2, \cdots, x_6\right) = \frac{1}{12}\left(x_1^{19} + 2x_1x_6^3 + 2x_1x_3^6 + x_1x_2^9 + 3x_1^5x_2^7 + 3x_1^3x_2^8\right)$$

Los resultados que se deducen se resumen en la Tabla 4.7.

El número de clases de equivalencia admisibles es, por lo general, muy elevado, por lo que la búsqueda automatizada de clases unisolventes se hace imprescindible. En la Tabla 4.8 se encuentra un ejemplo de esquema unisolvente para cada uno de los espacios de polinomios correspondiente.

Finalizamos considerando el sistema de puntos C_2, intersección del cuadrado de vértices $(2, -2)$, $(2, 2)$, $(-2, 2)$ y $(-2, -2)$ con $\mathbb{Z}^2$, cuyo sistema C_2^* asociado tiene grupo de simetía $G\left(C_2^*\right)$ con índice de ciclo

$$I_{G\left(C_2^*\right)}\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \frac{1}{8}\left(x_1^{25} + 2x_1x_4^6 + x_1x_2^{12} + 4x_1^5x_2^{10}\right)$$

Los tipos $\mathbb{P}_9$-admisibles se muestran en la Tabla 4.9, a la que sigue un ejemplo concreto de configuración $\mathbb{P}_9$-unisolvente que se muestra en la Fig. 4.1

k	j	$k-j$	$9-k$	Tipo de esquema	Número de configuraciones	Número de clases
3	0	3	6	l^3h^6	84	16
2	2	0	7	s^2h^7	36	8

Tabla 4.5. Resultados sobre tipos de esquemas y número de clases $\mathbb{P}_5$-admisibles sobre C_1.

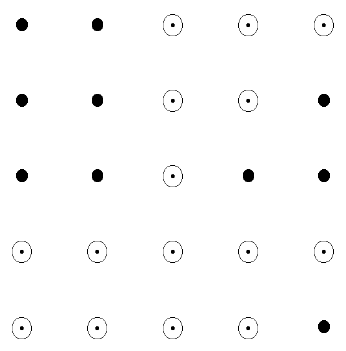

Fig. 4.1. Una Configuración $\mathbb{P}_9$-unisolvente sobre C_2.

5. Observaciones

Hay que poner de manifiesto la conveniencia de elegir configuraciones cuyo tipo contenga el símbolo h^s con el mayor índice posible, a fin de que los soportes de las funciones fundamentales sean minimales para el orden de exactitud prefijado.

Asimismo, a efectos computacionales, sería útil que dichos soportes fuesen convexos, lo que conlleva un problema de determinación de configuraciones adecuadas.

Otra cuestión que surge es la posibilidad de establecer como criterio de selección de una configuración de tipo determinado el que minimice la constante asociada al error de interpolación.

En relación con estas observaciones, se está trabajando en estos momentos sobre su resolución, desconociendo el alcance de las mismas.

El problema de la construcción de funciones fundamentales de soporte compacto para la interpolación de Hermite de orden uno basada en los elementos finitos de los tipos PS, HCT y FVS se encuentra con la necesidad de determinar configuraciones unisolventes, como se ha dicho. Aunque no ha sido el tema de este trabajo, el problema de interpolación lagrangiana considerado en [4] se puede tratar de manera general para cada uno de los tipos de elementos finitos empleados utilizando un procedimiento similar al expuesto y, lo que es importante, sin tener que afrontar la búsqueda de esquemas lagrangianos polinómicos unisolventes, ya que basta considerar un conjunto inferior de puntos adecuado ([12]). En este caso, la técnica de interpolación bivariada desarrollada en [9] se muestra interesante en la determinación de las necesarias funciones de base para el problema polinómico lagrangiano.

Bibliografía

[1] Barrera Rosillo, D., Esquemas locales de interpolación de Lagrange y de Hermite. Su

extensión a varias variables, Tesis doctoral, Universidad de Granada (en preparación).

[2] Bojanov, B. D., Hakopian, H. A., Sahakian, A.A., Spline Functions and Multivariate Interpolations, Kluwer Academic Publishers (1993).

[3] Chui, Ch. K., Multivariate Splines, CBMS-NSF Reg. Conf. in Appl. Math Series 54, SIAM (1988)

[4] Dahmen, W, Goodman, T.N.T., Micchelli, C.A., *Local Spline Interpolation Schemes in One and Several Variables*, in Approximation & Optimization, Proceedings Havana 1987, ed. A. Gómez, F. Guerra, M.A. Jiménez, G. López, LNM 1354, Springer Verlag (1987).

[5] Gout, J.L., *Estimation de l'erreur d'interpolation d'Hermite dans $\mathbb{R}^2$*, Numerische Mathematik, 28, 407-429, 1977.

[6] Laghchim Lahlou, M., Sablonnière, P., *Composite Quadrilateral Finite Elements of class C^r*, Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design, ed. T. Lyche. L.L Schumaker, Academic Press (1989).

[7] Laghchim Lahlou, M., *Elements Finis Composites de Classe C^k dans $\mathbb{R}^2$*, Thèse, I.N.S.A. de Rennes, 1991.

[8] Laghchim Lahlou, M., Sablonnière, P., *Triangular Finite Elements of HCT type and class C^ρ*, Advances in Mathematics 2, 1994, 101-122

[9] López Carmona, A., *Interpolación por recurrencia en varias variables*, Tesis doctoral, Universidad de Granada, 1981.

[10] Lorente Pardo, J., *Funciones Splines: Interpolación Conservativa. Interpolación Multivariada*, Tesis doctoral, Universidad de Granada, 1987.

[11] Lorente Pardo, J., Ramírez, V., *On Interpolation Systems and H-Reducible Interpolation Problems*, Topics in Multivariate Approximation, ed. C.K. Chui, L.L. Schumaker, F.I. Utreras, Academic Press, 1987.

[12] Lorentz, R. A., Multivariate Birkhoff Interpolation, Lecture Nores in Mathematics 1516, Springer Verlag (1992)

[13] Sablonnière, P.,*Error bounds for Hermite Interpolation by Quadratic Splines on an α-Triangulation*, IMA J. Numerical Anal., (1987) 7, 495-508.

[14] Sablonnière, P., *Composite Finite Elements de Class C^2*,Topics in Multivariate Approximation, ed. C.K. Chui, L.L. Schumaker, F.I. Utreras, Academic Press, 1987, 207-217.

[15] Slomson, A., An Introduction to Combinatorics, Chapman and Hall (1991).

[16] Van Lint , J. H., Wilson, R. M., A Course in Combinatorics, Cambridge University Press (1992).

Esquema	Representantes			
s^2h^7	$\odot\ \times\ \odot$	$\odot\ \odot\ \odot$		
	$\odot\ \odot\ \odot$	$\odot\ \odot\ \times$		
	$\odot\ \odot\ \times$	$\odot\ \times\ \odot$		
l^3h^6	$\bullet\ \bullet\ \odot$	$\bullet\ \odot\ \bullet$	$\bullet\ \odot\ \odot$	$\odot\ \bullet\ \odot$
	$\odot\ \bullet\ \odot$	$\odot\ \bullet\ \odot$	$\odot\ \bullet\ \bullet$	$\bullet\ \bullet\ \odot$
	$\odot\ \odot\ \odot$	$\odot\ \odot\ \odot$	$\odot\ \odot\ \odot$	$\odot\ \odot\ \odot$
	$\bullet\ \bullet\ \odot$	$\bullet\ \bullet\ \odot$	$\bullet\ \bullet\ \odot$	$\bullet\ \bullet\ \odot$
	$\odot\ \odot\ \bullet$	$\odot\ \odot\ \odot$	$\odot\ \odot\ \odot$	$\odot\ \odot\ \odot$
	$\odot\ \odot\ \odot$	$\bullet\ \odot\ \odot$	$\odot\ \bullet\ \odot$	$\odot\ \odot\ \bullet$
	$\bullet\ \odot\ \bullet$	$\bullet\ \odot\ \bullet$	$\bullet\ \odot\ \odot$	$\odot\ \bullet\ \odot$
	$\odot\ \odot\ \odot$	$\odot\ \odot\ \odot$	$\odot\ \odot\ \bullet$	$\bullet\ \odot\ \bullet$
	$\bullet\ \odot\ \odot$	$\odot\ \bullet\ \odot$	$\odot\ \bullet\ \odot$	$\odot\ \odot\ \odot$

Tabla 4.6. Representantes de clases de equivalencia de tipos $I\!\!P_5$-unisolventes.

Espacio	k	j	$k-j$	$19-k$	Tipo de esquema	Número de configuraciones	Número de clases
$I\!\!P_6$	14	1	13	5	$sl^{13}h^5$	162792	13748
	13	3	10	6	$s^3l^{10}h^6$	7759752	648203
	12	5	7	7	$s^5l^7h^7$	39907296	3329248
	11	7	4	8	$s^7l^4h^8$	24942060	2081515
	10	9	1	9	s^9lh^9	923780	77440
$I\!\!P_7$	10	1	9	9	sl^9h^9	923780	77440
	9	3	6	10	$s^3l^6h^{10}$	7759752	648203
	8	5	3	11	$s^5l^3h^{11}$	4232592	353808
	7	7	0	12	s^7h^{12}	50388	4356
$I\!\!P_8$	6	0	6	13	l^6h^{13}	27132	2376
	5	2	3	14	$s^2l^3h^{14}$	116280	9871
	4	4	0	15	s^4h^{15}	3876	364

Tabla 4.7. Resultados sobre tipos de esquemas y número de clases $I\!\!P_m$-admisibles, $6 \leq m \leq 8$, sobre H_2.

$m=6$					$m=7$					$m=8$				
		$\times$	$\bullet$	$\times$			$\odot$	$\odot$	$\odot$			$\odot$	$\times$	$\odot$
	$\odot$	$\odot$	$\times$	$\bullet$		$\times$	$\odot$	$\bullet$	$\times$		$\odot$	$\odot$	$\odot$	$\odot$
$\times$	$\bullet$	$\odot$	$\odot$	$\times$	$\odot$	$\bullet$	$\odot$	$\odot$	$\bullet$	$\odot$	$\odot$	$\bullet$	$\bullet$	$\odot$
$\odot$	$\odot$	$\odot$	$\bullet$		$\odot$	$\odot$	$\bullet$	$\odot$		$\times$	$\odot$	$\odot$	$\bullet$	
$\times$	$\odot$	$\times$			$\bullet$	$\times$	$\bullet$			$\odot$	$\odot$	$\odot$		

Tabla 4.8. Algunas configuraciones $I\!\!P_m$-unisolventes, $6 \leq m \leq 8$.

k	j	$k-j$	$25-k$	Tipo de esquema	Número de configuraciones	Número de clases
10	0	10	15	$l^{10}h^{15}$	3268760	410170
9	2	7	16	$s^2l^7h^{16}$	73547100	9199605
8	4	4	17	$s^4l^4h^{17}$	75710250	9469965
7	6	1	18	s^6lh^{18}	3364900	421640

Tabla 4.9. Tipos de esquemas y número de clases de equivalencia $\mathbb{P}_9$-admisibles sobre C_2.