GRANDES DESPLAZAMIENTOS DE LÁMINAS DELGADAS. APROXIMACIÓN DE MOVIMIENTOS INESTABLES

Iñigo Arregui [(1)], Philippe Destuynder [(2)] y Michel Salaün [(2)]
[(1)] Dpto. de Matemática Aplicada. Univ. Alfonso X El Sabio.
Aptdo. 016. 28691 - Villanueva de la Cañada (Madrid).
[(2)] Institut Aérotechnique de Saint-Cyr. C.N.A.M.
15, rue Marat. 78210 - St. Cyr - l'Ecole (Francia).

October 16, 1995

Introducción.

En la modelización de estructuras elásticas no lineales se utilizan tradicionalmente dos tipos de técnicas: las llamadas lagrangianas, en las que todas las magnitudes están referidas a una configuración inicial en reposo, y las técnicas de "lagrangiano actualizado" (o eulerianas) en las que la configuración de referencia varía en cada iteración del proceso de cálculo.

En el estudio de láminas delgadas es necesario, en general, el conocimiento de un gran número de datos con el fin de definir su superficie media. Este hecho impide la utilización de técnicas eulerianas en su modelización, ya que los datos obtenidos al final de una iteración son, en general, insuficientes para definir la superficie media de la lámina deformada y realizar una nueva iteración.

La formulación mixta propuesta por Destuynder y Salaün [6] , [11] sobre el modelo de lámina delgada de W. T. Koiter permite salvar este inconveniente. Basándonos en ella, hemos desarrollado una formulación euleriana [1] , [2] que permite el estudio de grandes desplazamientos (no linealidades geométricas) de láminas delgadas.

En este tipo de problemas aparecen, a menudo, otras dificultades: las inestabilidades. Si trazamos la curva de equilibrio de una estructura (carga aplicada frente a desplazamiento), estas inestabilidades vienen caracterizadas por los llamados puntos límite y puntos de bifurcación. Para poder determinarlos, y obtener las soluciones inestables, es necesario pilotar de cierta manera el algoritmo de cálculo.

Después de presentar brevemente la formulación incremental sobre el modelo de Koiter, haremos hincapié en los modos de pilotaje, y presentaremos algunos ejemplos numéricos resueltos con las técnicas descritas, y que nos han permitido validarlas.

Una formulación mixta para el modelo de Koiter.

Supongamos una lámina delgada Ω de material homogéneo e isótropo. Llamaremos ω a su superficie media y 2ε a su espesor, de forma que podremos escribir:

$$\Omega = \omega \times \,]-\varepsilon, +\varepsilon[\, \subset R^3.$$

Supondremos la frontera de ω (que denominaremos γ) dividida en tres partes: γ_0 (en la que la lámina está empotrada), γ_1 (condición de apoyo simple) y γ_2 (frontera libre).

Las hipótesis cinemáticas de Kirchhoff-Love permiten simplificar el estudio de la lámina reduciéndolo al de su superficie media. Varios modelos de lámina delgada han sido desarrollados a partir de estas hipótesis. Entre ellos, el modelo de W. T. Koiter [5],[7], que se escribe:

Encontrar un campo de desplazamientos $u = (\underline{u_t}, u_3) \in V_t \times V_3^0$ tal que,

$$\int_\omega R^{M_{\alpha\beta\lambda\mu}} \gamma_{\alpha\beta}(u)\gamma_{\lambda\mu}(v) + \frac{\varepsilon^2}{3} \int_\omega R^{F_{\alpha\beta\lambda\mu}} \rho_{\alpha\beta}(u)\rho_{\lambda\mu}(v) = \ell(v), \forall v \in V_t \times V_3^0 \qquad (1)$$

donde: $\underline{u_t}$ es el desplazamiento tangencial de los puntos de ω, u_3 es la flecha (desplazamiento en la dirección del vector normal a ω), y R^M y R^F son los tensores de rigidez en membrana y en flexión. Los tensores de deformación y de variación de curvatura vienen dados por:

$$\gamma_{\alpha\beta}(u) = \tfrac{1}{2}(u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta}\ u_3$$
$$\rho_{\alpha\beta}(u) = \tfrac{1}{2}(\theta_{\alpha|\beta} + \theta_{\alpha|\beta}) + \tfrac{1}{2}(b_\beta^\lambda\ u_{\alpha|\lambda} + b_\alpha^\lambda\ u_{\beta|\lambda}) - b_\alpha^\lambda\ b_{\lambda\beta}\ u_3$$

donde $\theta_\alpha = -u_{3,\alpha} - b_\alpha^\lambda\ u_\lambda$ es el vector rotación de la normal, y $u_{\alpha|\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda u_\lambda$ es la derivada covariante del vector desplazamiento u. Los espacios de funciones indicados en la expresión (1) son:

$$V_t = \left\{ \underline{v_t} = (v^1, v^2),\ v^\alpha \in H^1(\omega),\ v^\alpha = 0 \text{ en } \gamma_0 \cup \gamma_1 \right\}$$
$$V_3^0 = \{ v \in H^2(\omega),\ v = 0 \text{ en } \gamma_0 \cup \gamma_1,\ v_{,\alpha} = 0 \text{ en } \gamma_0 \}.$$

(En las expresiones anteriores, los índices griegos varían de 1 a 2).

Sabemos que este problema admite una única solución [3].

La formulación mixta propuesta por Destuynder y Salaün [6] se basa en una descomposición del esfuerzo cortante $Q = grad\ \varphi + rot\ \psi$. Las funciones potenciales (φ y ψ) son precisamente los multiplicadores de Lagrange de la restricción (condición de Kirchhoff-Love). Esta formulación se escribe:

Encontrar $(X, \Lambda) \in V \times M$ tales que,

$$\begin{array}{l} A(X,Y) + B(\Lambda, Y) = F(Y),\ \forall Y \in V \\ B(\Xi, X) = 0,\ \forall \Xi \in M \end{array} \tag{2}$$

donde: $X = (\underline{u_t}, u_3, \theta)$, $Y = (\underline{v_t}, v_3, \mu) \in V$, $\Lambda = (\varphi, \psi, C) \in M$. Por otra parte, $A(X,Y)$ es la funcional del primer miembro del problema (1), mientras que la funcional que incluye la restricción es:

$$B(\Lambda, Y) = \int_\omega g^{\alpha\lambda}\varphi_{,\lambda}\ (\mu_\alpha + b^\beta_\alpha\ v_\beta + v_{3,\alpha}) - \sum_{i=1,N} C_i \int_{\widehat{\gamma_2}^i} (\mu_\alpha + b^\beta_\alpha\ v_\beta)\tau^\alpha -$$
$$- \int_\omega \frac{\psi}{\sqrt{|g|}}(\mu_{2,1} - \mu_{1,2} + (b^\beta_2\ v_\beta)_{,1} - (b^\beta_1 v_\beta)_{,2}).$$

Finalmente, los espacios de funciones son:

$$\begin{array}{c} V = V_t \times V_3 \times W_t \\ M = V_3 \times L^2_0(\omega) \times R^N \\ V_3 = \{v \in H^1(\omega),\ v = 0 \text{ en } \gamma_0 \cup \gamma_1\} \\ W_t = \{\mu = (\mu_1, \mu_2),\ \mu_\alpha \in H^1(\omega),\ \mu = 0 \text{ en } \gamma_0\}. \end{array}$$

Una de las ventajas de esta formulación es que $u_3 \in H^1(\omega)$, por lo cual puede ser aproximado mediante polinomios de primer grado. La otra ventaja fundamental es que no aparece la derivada tercera de la carta que define la superficie media ω. Podemos entonces aproximar ésta mediante una función de clase dos. En la práctica, utilizamos para dicha definición los nodos del mallado sobre la superficie, y los vectores normales a la misma en dichos nodos. Estos datos son suficientes para evaluar todas las magnitudes que intervienen en el problema (2).

Formulación incremental para el estudio de grandes desplazamientos.

Sea Ω_0 la configuración ocupada por la lámina en reposo. Vamos a descomponer la carga exterior aplicada sobre la estructura en varios incrementos, de forma que la carga total aplicada en cada iteración será:

$$\lambda^{(k+1)}\ell(v) = \lambda^{(k)}\ell(v) + \Delta\lambda^{(k+1)}\ell(v),\ k = 0, 1, 2....$$

Haremos la hipótesis de que la rigidez del material se conserva constante durante todo el proceso. El Principio de los Trabajos Virtuales puede escribirse, en una iteración cualquiera (k), de la siguiente forma:

sobre Ω_{k+1}, $\displaystyle\int_{\Omega_{k+1}} Tr\left[C_{k+1}\frac{\partial v}{\partial M_{k+1}}\right] = \lambda^{(k+1)}\ell(v),\ \forall v \in V(\Omega_{k+1})$

o bien, sobre Ω_k, $\displaystyle\int_{\Omega_k} Tr\left[\sigma_{k+1}\overline{F}\frac{\partial v}{\partial M_k}\right] = \lambda^{(k+1)}\ell(v),\ \forall v \in V(\Omega_k)$

siendo $V(\Omega_k)$ el espacio de desplazamientos admisibles sobre Ω_k y M_k un punto genérico de Ω_k. C_{k+1} es la tensión de Cauchy, mientras que σ_{k+1} es la tensión de Piola-Kirchhoff. Estas dos últimas vienen ligadas por la relación:

$$C_{k+1} = \frac{1}{|F|}\ F\ \sigma_{k+1}\ \overline{F}$$

donde F es el tensor gradiente de deformación: $F = I + \dfrac{\partial u_{k+1}}{\partial M_k}$. Además, hemos representado por $\overline{F}$ el traspuesto de F.

Si consideramos que los incrementos de carga y, en consecuencia, los desplazamientos ocasionados, son suficientemente pequeños, podemos linearizar la expresión de la deformación, y escribir:

$$\sigma_{k+1} = C_k + R\gamma(u_{k+1}) = C_k + \frac{1}{2}\ R\left(\frac{\partial u_{k+1}}{\partial M_k} + \overline{\frac{\partial u_{k+1}}{\partial M_k}}\right).$$

Entrando con esta expresión en el Principio de los Trabajos Virtuales, obtenemos la igualdad:

$$\int_{\Omega_k} Tr\left[(C_k + R\gamma(u_{k+1}))\left(I + \overline{\frac{\partial u_{k+1}}{\partial M_k}}\right)\frac{\partial v}{\partial M_k}\right] = \lambda^{(k+1)}\ell(v),\ \forall v \in V(\Omega_k).$$

Despreciando los términos de segundo orden, llegamos a:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_k} Tr\left[R\ \gamma(u_{k+1})\ \gamma(v)\right] + \int_{\Omega_k} Tr\left[C_k\ \overline{\frac{\partial u_{k+1}}{\partial M_k}}\ \frac{\partial v}{\partial M_k}\right] = \\ = \lambda^{(k+1)}\ell(v) - \int_{\Omega_k} Tr\left[C_k\ \gamma(v)\right],\ \forall v \in V(\Omega_k).\end{aligned}$$

La resolución de este problema nos proporciona el desplazamiento u_{k+1}, que nos permite, a su vez reactualizar la geometría de la lámina (posiciones de los nodos y vectores normales), así como las tensiones que se van acumulando. Por otra parte, y puesto que suponemos que los desplazamientos verifican las hipótesis de Kirchhoff-Love, podemos utilizar la formulación mixta presentada anteriormente. Una vez discretizado el problema, la expresión matricial del mismo es:

$$\begin{aligned}&A'\ X + B\ \Lambda = F - \Sigma^p\\ &B\ X = 0\end{aligned} \qquad (3)$$

donde la matriz A' incluye el trabajo realizado por las tensiones acumuladas [1],[2].

Pilotaje del algoritmo.

El parámetro que define los diferentes niveles de solicitación es el coeficiente λ del segundo miembro, y podemos modificarlo a voluntad. Varias formas de hacerlo son posibles.

La manera más simple es añadir en cada iteración un incremento $\Delta\lambda$ constante, pero en este caso no podemos seguir la parte inestable de la curva, si es que existe (cf. Figura 1). Está claro que, en un momento dado del cálculo, debemos poder disminuir la carga exterior, con el fin de "descender" sobre la curva de equilibrio. Estamos, pues, obligados a adaptar el incremento de carga en cada iteración del proceso.

Situémosnos, a fin de simplificar las notaciones, en el caso en que, en lugar de tratar el problema dual (2), resolvemos el problema primal:

Encontrar X que verifique: $A'\ X = f$.

Este problema puede resolverse de la siguiente forma. Introducimos el conjunto de valores y vectores propios $\{\mu_i, w_i\}$ de A' y buscamos la solución X de la forma:

$$X = \sum_{i \geq 0} \alpha_i\ w_i$$

verificándose: $A'\ w_i = \mu_i\ w_i$.

Como A' es simétrica, los vectores propios son ortogonales dos a dos, y podemos escogerlos normalizados:

$$\begin{gathered}(w_i, w_j) = 0 \text{ si } i \neq j \\ (w_i, w_i) = 1\end{gathered}$$

de donde se puede deducir fácilmente:

$$\alpha_i = \frac{(f, w_j)}{\mu_j}.$$

Sabemos que, cuando nos acercamos a un punto límite, el primer valor propio (μ_0) tiende a cero; en este caso,

$$\alpha_0 = \frac{(f, w_0)}{\mu_0} >> \alpha_j, \text{ si } j \neq 0$$

y el desplazamiento X es casi colineal al primer vector propio (w_0), porque las contribuciones de los otros vectores son despreciables frente a la del primero, siempre que éste no sea ortogonal a la carga f.

Puesto que es en las proximidades del punto límite donde debemos hacer los incrementos de carga más pequeños, podemos tomar:

$$\Delta\lambda^{(k)} = \eta\mu_0^{(k)}$$

donde la constante de proporcionalidad (η) vale, por ejemplo:

$$\eta = \frac{\Delta\lambda^{(0)}}{\mu_0^{(0)}}$$

y el superndice (k) indica la etapa de cálculo. Además, en la parte descendente de la curva, el primer valor propio del sistema (3) es negativo, con lo que el parámetro de pilotaje λ va a disminuir.

Hemos constatado que esta técnica proporciona incrementos $\Delta\lambda$ bastante grandes, con el riesgo de sobrepasar el punto límite y la rama inestable en la curva de equilibrio (Figura 1).

Además, cuando utilizamos un incremento suficientemente grande, el equilibrio no es verificado. Por esta razón efectuamos algunas iteraciones de corrección, a solicitación exterior constante, en las cuales hacemos trabajar únicamente al vector de tensiones acumuladas Σ^p, hasta llegar a una posición de equilibrio (Figura 2).

Consideremos de nuevo el problema que intentamos resolver. En formulación primal, puede escribirse (en la etapa $k+1$):

$$A'X = \lambda^{(k+1)}F - \Sigma^p(X) = L(X) \tag{4}$$

con $\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \Delta\lambda$.

Consideremos una descomposición de tipo Liapunov-Schmidt:

$$X = \alpha w_0 + y, \tag{5}$$

con

$$\begin{gathered}(M\ w_0, y) = 0\\ A'\ w_0 = \mu_0\ M\ w_0.\end{gathered}$$

La descomposición que hemos realizado implica:

$$A' \ X = \alpha' \ M \ w_0 + y'.$$

Sustituyendo X por su valor en (5) y efectuando el producto escalar de los dos miembros de la ecuación (4) por el primer vector propio w_0:

$$\alpha(A'w_0, w_0) + (A'y, w_0) = (L(\alpha w_0 + y), w_0)$$

y teniendo en cuenta las relaciones:

$$\begin{gathered}(A'w_0, w_0) = \mu_0(Mw_0, w_0) = \mu_0 \\ (A'y, w_0) = (A'w_0, y) = \mu_0(Mw_0, y) = 0\end{gathered}$$

obtenemos:

$$\alpha\mu_0 = (L, w_0) = \lambda^{(k+1)}(F, w_0) - (\sum^{p}(\alpha w_0 + y), w_0). \tag{6}$$

En particular, tendremos en el punto límite:

$$0 = \lambda^{(k+1)}(F, w_0) - (\sum^{p}(\alpha w_0 + y), w_0) \tag{7}$$

de donde podemos deducir el parmetro $\lambda^{(k+1)}$.

Consideremos ahora el vector z ortogonal a w_0 (en el sentido del producto escalar definido por la matriz A'):

$$(A'w_0, z) = \mu_0(Mw_0, z) = 0$$

y proyectemos la igualdad (4) sobre el espacio ortogonal a w_0:

$$\alpha(A'w_0, z) + (A'y, z) = (L, z)$$

obteniendo:

$$(A'y, z) = (L, z).$$

Esta expresión puede escribirse, en forma matricial:

$$A'y = P.L = q, \tag{8}$$

donde P representa la proyección sobre el espacio ortogonal a w_0. Puesto que hemos descompuesto el vector $A'X$ (cf. (5), podemos hacer lo mismo con el vector L:

$$L = \xi M w_0 + q,\ (w_0, q) = 0$$

de donde obtenemos, con (6):

$$\begin{gathered}(L, w_0) = \xi(M w_0, w_0) = \xi = \alpha \mu_0 \\ P.L = q.\end{gathered}$$

Podemos entonces determinar la componente ortogonal a w_0:

$$q = L - \xi M w_0 = L - \alpha \mu_0 M w_0 \tag{9}$$

y resolver así el sistema (8) para obtener la solución final $X = \alpha\ w_0 + y$.

El algoritmo que proponemos es el siguiente: en la iteración (k) imponemos una componente del desplazamiento $\widehat{X}_{(N)}$ correspondiente al grado de libertad (N) (por ejemplo, imponemos la flecha en un nodo del mallado en el que el vector w_0 es no nulo), lo que nos permite realizar una primera estimación del parámetro α:

$$\alpha^{(k,j)} = \frac{\widehat{X}_{(N)}}{w_{0(N)}}$$

correspondiente a un desplazamiento $y^{(k,0)}$ nulo. Gracias a la relación (7), podemos estimar $\lambda^{(k,0)}$, que nos permite calcular un primer desplazamiento $y^{(k,1)}$ con ayuda de (8) y (9). A fin de que la condición $X^{(k,j)}_{(N)} = \widehat{X}_{(N)}$ sea verificada, el coeficiente α debe ser recalculado:

$$\alpha^{(k,j)} = \frac{\widehat{X}_{(N)} - y^{(k,j)}_{(N)}}{w_0(N)}.$$

En el límite, el desplazamiento $y^{(k,j)}$ debe converger hacia un vector $y^{(k)}$. De forma similar, obtendremos una convergencia en la serie de coeficientes α. El desplazamiento final será entonces:

$$X^{(k)} = \alpha^{(k)} w_0 + y^{(k)}$$

al cual corresponde una carga exterior $\lambda^{(k)}$.

Nota 1. La relación (6) que liga α y $\lambda^{(k+1)}$ puede proporcionarnos una forma de trabajar ligeramente diferente: en la proximidad del punto límite, imponemos α suficientemente pequeño (incluso α=0) y calculamos el incremento correspondiente:

$$\Delta\lambda = \frac{\alpha\mu_0 - ((\lambda^{(k)}\ F - \Sigma^p), w_0)}{(F, w_0)}.$$

Incrementamos la solicitación exterior y efectuamos algunas iteraciones de corrección (con $\lambda^{(k+1)}$ constante) hasta obtener el equilibrio.

Nota 2. Hemos presentado este apartado con las notaciones del problema primal. El trabajar con las variables duales no hace variar el resultado, si hacemos la hipótesis de que los desplazamientos w_0 y z son campos de Kirchhoff - Love y verifican:

$$Bw_0 = Bz = 0.$$

En este caso, cuando hacemos la proyección sobre el vector w_0, tenemos:

$$\alpha(Aw_0, w_0) + (Ay, w_0) + (\overline{B}\Lambda, w_0) = (L(\alpha w_0 + y), w_0)\ ,$$

pero

$$(\overline{B}\Lambda, w_0) = (\Lambda, Bw_0) = 0$$

y la relación (7) queda idéntica.

Ejemplos numéricos.

Uno de los ejemplos clásicos de inestabilidades es el de la lámina cilíndrica sometida a la acción de una fuerza puntual en el centro. Las condiciones de contorno son de apoyo simple en los lados rectos, quedando libres los lados curvos.

Aunque podríamos haber pilotado únicamente en desplazamiento, hemos utilizado una combinación de pilotajes en carga y en desplazamiento, con iteraciones de corrección en ambos casos. Cuando el primer valor propio (en valor absoluto) se acerca a cero, pilotamos en desplazamiento; en otro caso, imponemos la carga exterior. Las figuras 3 y 4 muestran, respectivamente, la curva de equilibrio y la evolución del valor propio. Podemos ver cómo nuestra curva aproxima muy bien la solución de referencia [4].

En relación con este problema, presentamos a continuación una tabla en la que mostramos los errores relativos entre nuestros resultados y los obtenidos por otros autores [8] que han utilizado distintos métodos para aproximar la solución. A la vista de los resultados, y puesto que los errores son, en su mayor parte, inferiores al 5%, podemos decir que nuestra aproximación es correcta.

−6.506	−7.207	−2.323
−4.583	−4.828	−2.323
−3.200	−2.760	−0.959
−4.293	−4.635	−2.547
−3.766	−3.471	−1.661
−3.488	−3.120	−0.968
−3.683	−3.156	−1.189
−2.552	−2.003	−0.603
−1.047	−0.687	0.224
−0.298		0.685
1.376		2.198
3.036		4.281
5.391		6.325
8.348		9.592

Tabla 1. Errores relativos (en %). Comparación con [8].

Un problema más complicado se presenta cuando disminuimos el espesor de la lámina. Por ejemplo, en la figura 4, la curva corresponde al problema anterior con la mitad de espesor. Dos nuevos puntos límite aparecen, esta vez con tangente vertical, lo que nos obliga a pasar del pilotaje en desplazamiento al pilotaje en carga en la rama descendente, y a pilotar de nuevo en desplazamiento antes de volver a ascender por la rama estable. Podemos ver que la curva de referencia está muy bien aproximada.

Conclusiones y perspectivas.

Hemos presentado un algoritmo que permite la simulación numérica de grandes desplazamientos de láminas delgadas. Los resultados obtenidos han sido satisfactorios. Además, debemos señalar que el código numérico está implementado con el fin de aprovechar al máximo las posibilidades de vectorización y paralelización de los nuevos ordenadores.

La técnica descrita es válida para la aproximación, solamente, de puntos límite. Si quisiéramos estudiar puntos de bifurcación, deberíamos implementar un método de tipo "longitud de arco" [4], [10], por ejemplo,

Por otra parte, hemos desarrollado paralelamente un algoritmo para la simulación numérica de pequeños desplazamientos de láminas elastoplásticas [9]. El acoplamiento de ambos (plasticidad en grandes desplazamientos) nos permitirá, en breve, la simulación de procesos industriales.

Bibliografía.

[1] Arregui, I.: Une technique eulérienne pour la simulation des coques minces en grands déplacements. Tesis, École Centrale de Paris (1994).

[2] Arregui, I.; Destuynder, Ph.; Salaün, M.: Continuous up-dating of a shell geometry in a nonlinear analysis and applications to buckling simulation, en Asymptotic Methods for Elastic Structures (P. G. Ciarlet, L. Trabucho, J. M. Viaño, eds.), pp. 41-54. Walter de Gruyter & Co., Berlín - Nueva York (1995).
[3] Bernadou, M.; Ciarlet, P.G.: Sur l'ellipticité du modèle linéaire de coques de W. T. Koiter. Lecture Notes in Applied Sciences en Engineering, vol. 34, pp. 89-136. Springer-Verlag, Berlín (1976).
[4] Crisfield, M.A.: An arc-length method including line-searches and accelerations, Int. J. Num. Meth. Engng., vol 19, pp. 1269-1289 (1983).
[5] Destuynder, Ph.: Modélisation des Coque Minces Élastiques. Masson, Paris (1990).
[6] Destuynder, Ph.; Salaün, M.: Une formulation variationelle mixte pour les problèmes généraux de coques minces, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 310, Série I, pp. 215-220 (1990).
[7] Koiter, W.T.: General theory of shell stability. Thin shell theory. New trends and applications, CISM Courses and Lectures, vol. 240, pp. 65-87. Springer-Verlag, Viena, Nueva York (1980).
[8] Mahé, M.; Sourisseau, J.C.; Ohayon, R.: Explicit thickness integration for three-dimensional shell elements applied to non-linear analysis, Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 36, pp. 1085-1114 (1993).
[9] Nurdin, D.: Développement et validation d'un algorithme de plasticité pour les coques minces. Proyecto de Ingeniero C.N.A.M. París (1994).
[10] Riks, E.: Some computational aspects of the stability analysis of non linear structures, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., vol. 47, pp. 219-259 (1984).
[11] Salaün, M.: Formulation mixte théorique et numérique d'un modèle de coque mince de W. T. Koiter. Tesis, École Centrale de Paris (1991).

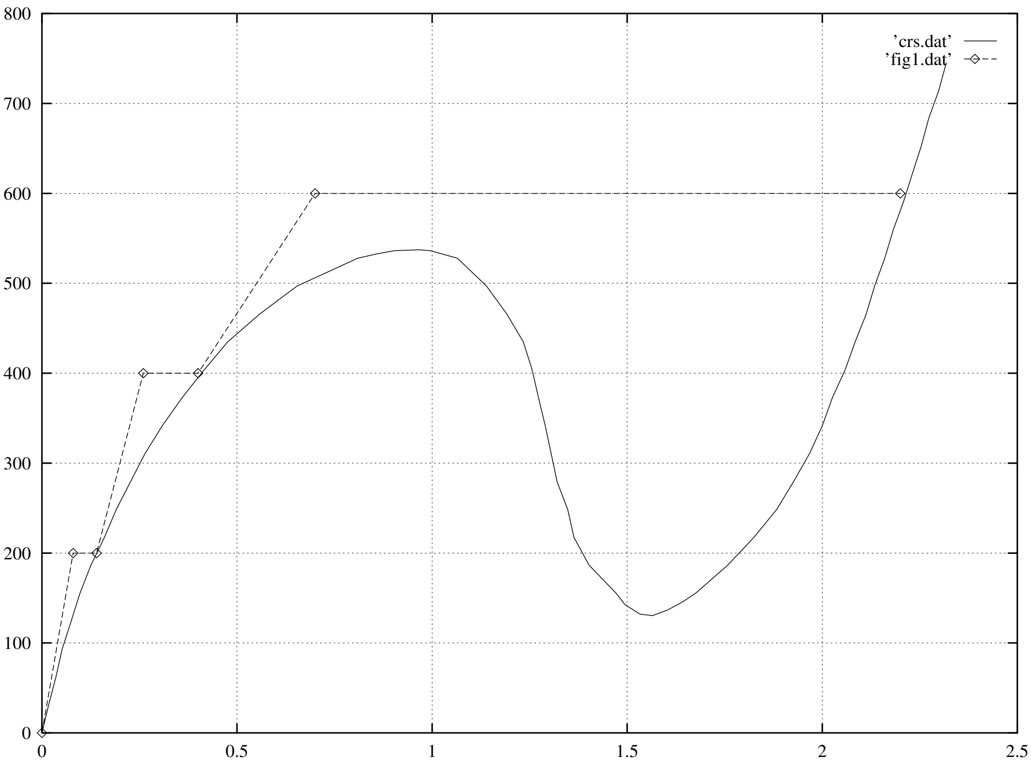

Figura 1. Lámina cilíndrica bajo fuerza puntual. Curva de equilibrio.

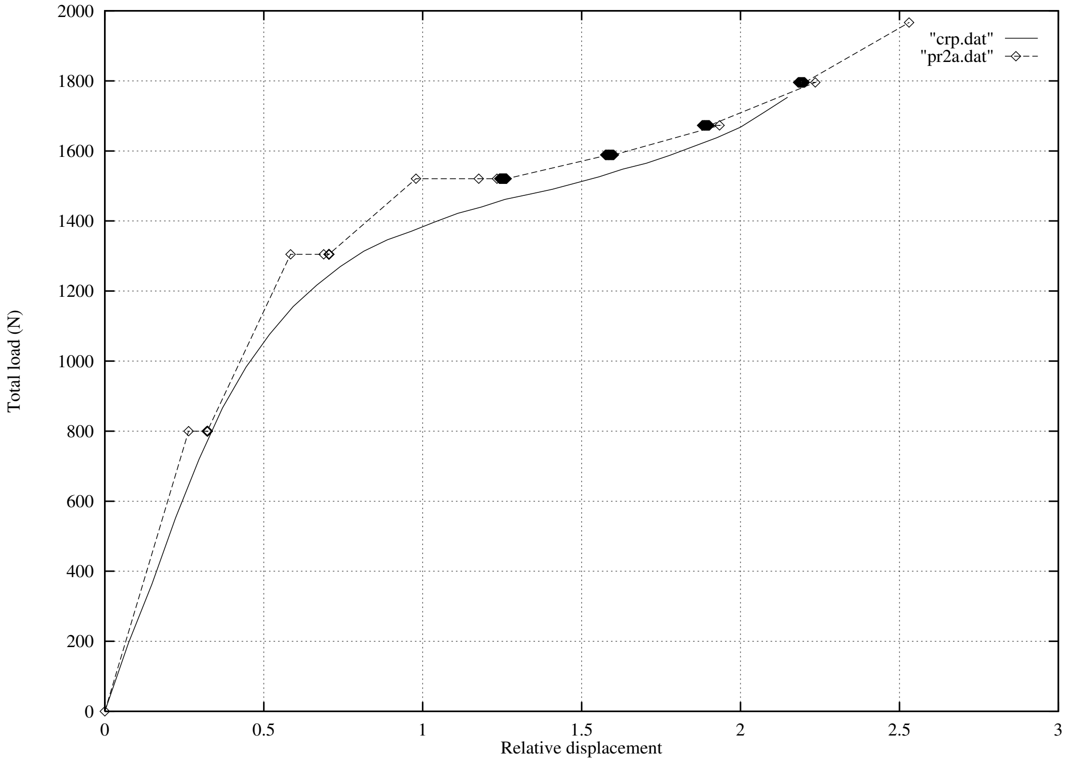

Figura 2. Cilindro empotrado bajo presión uniforme. Curva de equilibrio. Iteraciones de corrección.

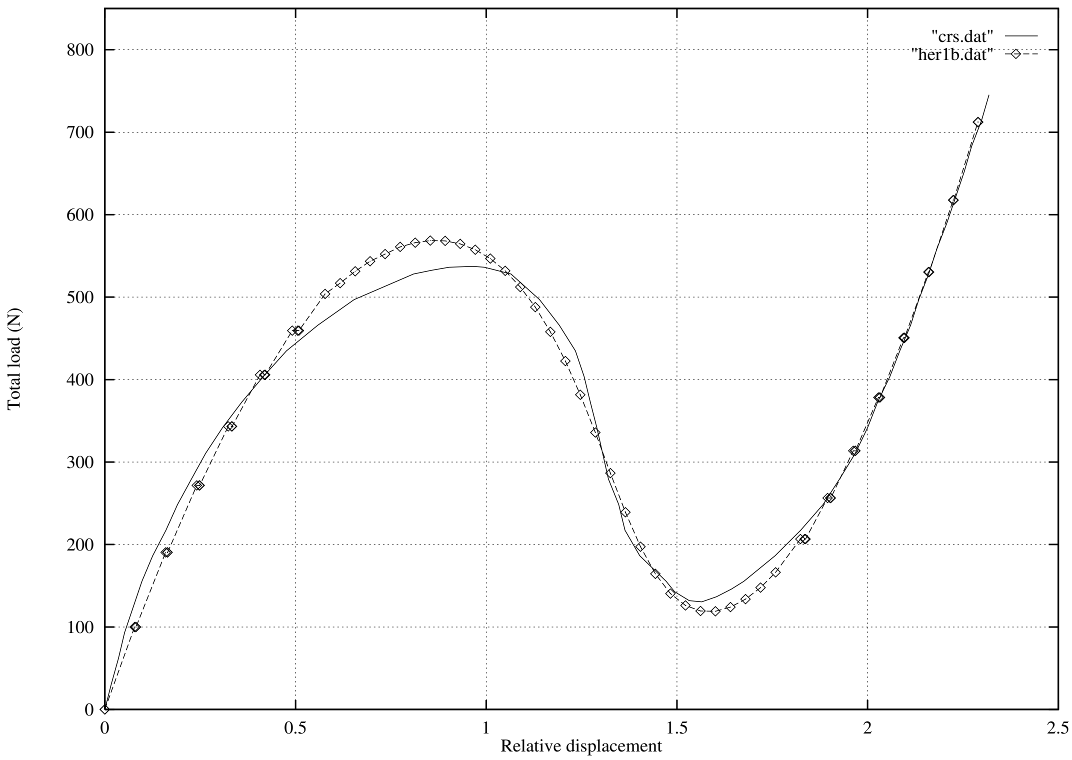

Figura 3. Cilindro bajo carga puntual. Curva de equilibrio (pilotaje en carga / desplazamiento).

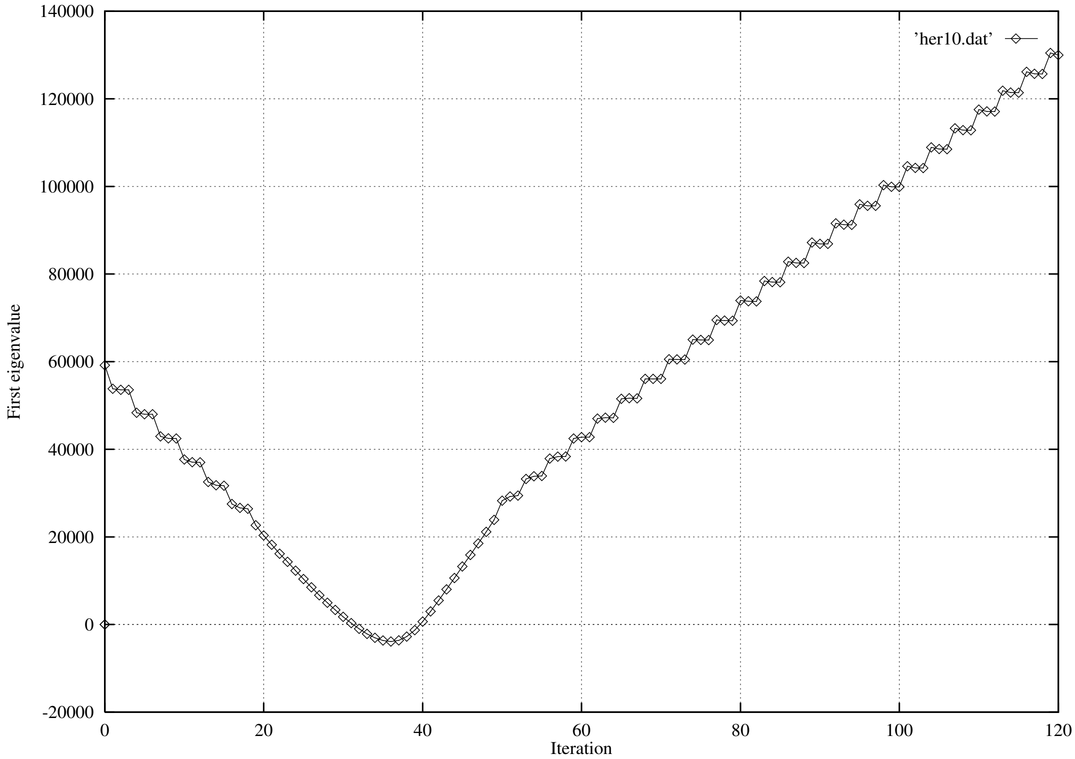

Figura 4. Cilindro bajo carga puntual. Evolución del primer valor propio.

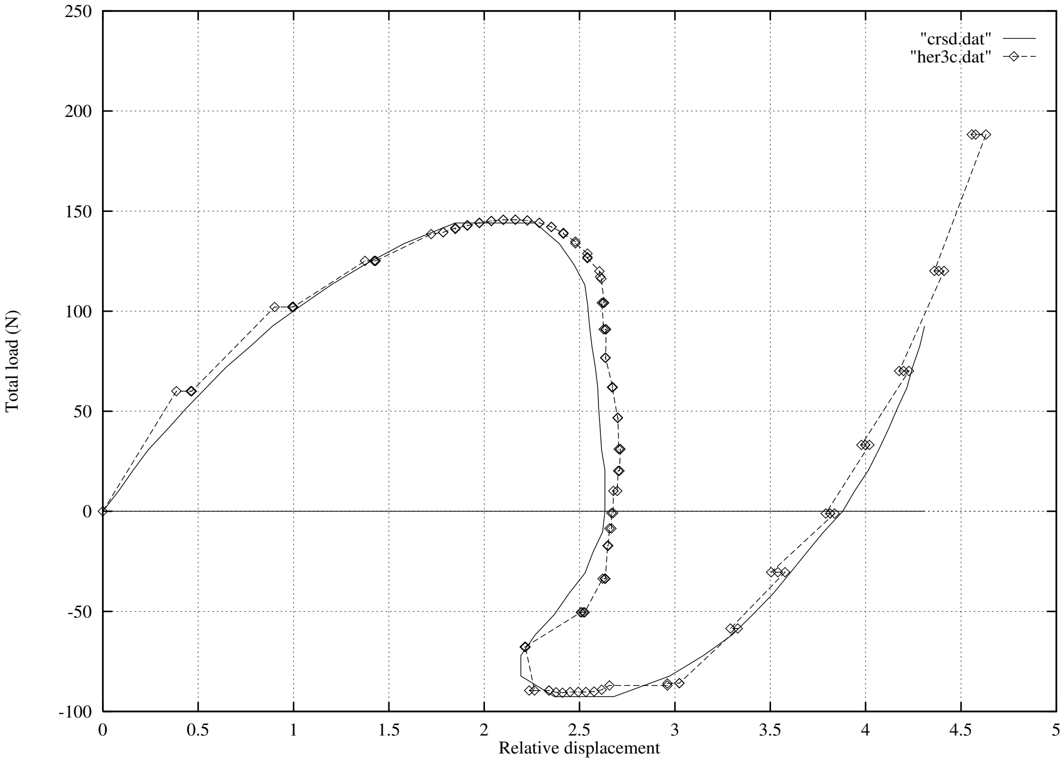

Figura 5.Cilindro bajo carga puntual (pequeño espesor). Curva de equlibrio.