MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

ALGUNAS OBSERVACIONES SOBRE EL SEMIGRUPO DE LAGUERRE

JOSÉ LUIS TORREA

ABSTRACT. We study boundedness properties of some classical operators in Harmonic Analysis in the context of the multidimensional Laguerre semigroup. We prove that Riesz transforms, and Littlewood-Paley g-functions are strong type p-p for $p > 1$ and weak type 1-1. We also obtain bounds independent of the dimension.

Durante el curso 1973–74, el profesor de problemas de Análisis Matemático II, de 2.º curso de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas en la Universidad de Zaragoza, fue Chicho. Yo era uno de los estudiantes de ese curso. Sin duda, una de las razones por la que mi especialización en Matemáticas acabó siendo Análisis, fue lo interesantes que eran aquellas clases.

Pero si en algún modo le debo el haberme transmitido el gusto por el Análisis, sería faltar a la verdad si no dijese que me transmitió su afán de, en sus propias palabras, «conectar el estudio de diversos aspectos de la teoría de Polinomios Ortogonales con problemas modernos desde el punto de vista del Análisis de Fourier», ver [Gd]. Según él decía, desde principios de los años ochenta, José Luis Rubio de Francia le empujaba en esta dirección y empezó a profundizar en el tema a partir del año 85. Esta idea, que Chicho siempre atribuyó a José Luis, pero que desde luego él convirtió en su línea fundamental de investigación, motivó que uno de los cursos del Seminario Avanzado en Teoría de aproximación celebrado en Laredo en Septiembre de 1992, fuera el que, impartido por el profesor W. Urbina, llevaba por título «Elementos de Análisis Armónico Gaussiano». Precisamente por lo mucho que yo le había oído hablar a Chicho de esta línea, decidí asistir a dicho curso. Fueron unos días inolvidables desde todos los puntos de vista. Los paseos por el puerto de Laredo hablando con Chicho sobre aquellos operadores que aparecían relacionados con los polinomios de Hermite son unos recuerdos muy agradables para mí. De hecho la esencia de el curso del Profesor Urbina era justamente la idea de José Luis y Chicho, desarrollar una maquinaria de Análisis Armónico sobre el operador diferencial de segundo orden respecto del cual los polinomios de Hermite son autofunciones. Chicho me contagió su entusiasmo y comencé a interesarme por aquellos problemas.

Desde entonces he dedicado una gran parte de mi actividad a seguir esa línea de investigación. Creo que un buen homenaje a Chicho es exponer como dicha línea, junto con ideas y fórmulas clásicas de polinomios ortogonales, pueden utilizarse para obtener resultados nuevos en el caso del operador diferencial de Laguerre. Los

2000 *Mathematics Subject Classification.* 42B15,42B20,42B25,42C10.
Key words and phrases. Laguerre semigroup, singular integrals.

resultados que presento aquí son fruto de un trabajo conjunto con C. Gutiérrez y A. Incognito, ver [GIT].

1. Descripción de los operadores

La referencia básica en esta sección es el tratado clásico de G. Szegő, [SZ].

Dado $\alpha > -1$, los polinomios de Laguerre de tipo α en una dimensión vienen dados por las fórmulas de Rodrigues

$$L_k^\alpha(y) = \frac{1}{k!} e^y y^{-\alpha} \frac{d^k}{dy^k}(e^{-y} y^{k+\alpha}).$$

Cada L_k^α es un polinomio de grado k y la familia de polinomios $\{L_k^\alpha\}_k$ es un sistema ortogonal completo en $L^2((0,\infty), \mu_\alpha(y)\,dy)$, donde $\mu_\alpha(y) = y^\alpha e^{-y}$, a lo largo de toda esta sección la referencia básica es el tratado de Szegő, [SZ]. El operador diferencial de Laguerre de tipo α es

$$\mathcal{L}_\alpha = y\frac{d^2}{dy^2} + (\alpha + 1 - y)\frac{d}{dy}. \tag{1.1}$$

Los polinomios de Laguerre verifican las siguientes propiedades

$$\sum_{k=0}^{N} L_k^\alpha(y) = L_N^{\alpha+1}(y), \quad \frac{d}{dy} L_k^\alpha(y) = -L_{k-1}^{\alpha+1}(y), \quad \mathcal{L}_\alpha L_k^\alpha(y) = -k\, L_k^\alpha(y). \tag{1.2}$$

Dados multiíndices α y k, con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\alpha_i > -1$, y $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_i \in \mathbb{N}$, los polinomios multidimensionales de Laguerre de tipo α se definen como

$$L_k^\alpha(y) = L_{k_1}^{\alpha_1}(y_1) \cdots L_{k_d}^{\alpha_d}(y_d), \quad y = (y_1, \dots, y_d) \in (0,\infty)^d$$

con $L_{k_i}^{\alpha_i}(\cdot)$ polinomio de Laguerre unidimensional de tipo α_i. El operador diferencial de Laguerre de tipo α en dimensión d es

$$\mathcal{L}_\alpha = \sum_{i=1}^{d} y_i \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + (\alpha + 1 - y_i)\frac{\partial}{\partial y_i}. \tag{1.3}$$

El operador $\mathcal{L}_\alpha$ es autoadjunto en $L^2((0,\infty)^d, \mu_\alpha(y)\,dy)$ donde

$$\mu_\alpha(y) = (y_1^{\alpha_1}, \dots, y_d^{\alpha_d}) e^{-(y_1 + \cdots + y_d)}.$$

Además se verifica

$$\mathcal{L}_\alpha L_k^\alpha(y) = -|k|\, L_k^\alpha(y), \tag{1.4}$$

con $|k| = k_1 + \cdots + k_d$.

Recordemos ahora la definición de los polinomios de Hermite. En una dimensión se definen mediante las fórmulas de Rodrigues como

$$H_k(x) = e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2}.$$

Dado un multiíndice $k = (k_1, \dots, k_n)$ con k_i entero no negativo, y $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, el polinomio multidimensional de Hermite de grado k se define como

$$H_k(x) = H_{k_1}(x_1) \cdots H_{k_n}(x_n).$$

Estos polinomios forman un sistema ortogonal completo en $L^2(\mathbb{R}^n, \gamma_n(x)\, dx)$, siendo $\gamma_n(x) = \frac{1}{\pi^{n/2}} e^{-|x|^2}$. Los polinomios de Hermite son las autofunciones del operador diferencial de segundo orden L_γ definido como

$$L_\gamma = \frac{1}{2}\,\Delta - x \cdot \nabla = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1.5}$$

se verifica

$$L_\gamma\, H_k(x) = -|k| H_k(x), \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{1.6}$$

$k = (k_1, \dots, k_n)$ con k_i enteros no negativos.

Existe una relación estrecha entre las familias de polinomios de Hermite y Laguerre. De hecho en una dimensión se verifica, ver [SZ], fórmula (5.6.1),

$$L_k^{-1/2}(x^2) = \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!} H_{2k}(x). \tag{1.7}$$

La prueba, ver [SZ], utiliza la ortogonalidad de los polinomios de Hermite y Laguerre. Esta prueba puede adaptarse a una situación más general y útil para nuestros propósitos y así puede probarse el siguiente lema, ver [GIT].

Lema 1.8. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha > -1$ tales que $\alpha = \frac{n}{2} - 1$. Un polinomio de Laguerre L_k^α de tipo α definido en $(0, \infty)$ verifica*

$$L_k^\alpha(|x|^2) = \sum_{|r|=k} a_r H_{2r}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad r = (r_1, \dots, r_n).$$

Si se pretende hacer un estudio de las ecuación $L_\gamma u = f$ o de la ecuación $\mathcal{L}_\alpha u = f$ que analice acotaciones «a priori», convergencia al dato inicial de ecuaciones del tipo $u_t = Lu$ e incluso un cálculo funcional de los operadores diferenciales, es claro que se deben considerar algunos de los operadores que aparecen en el Análisis Armónico clásico como operadores maximales, transformadas de Riesz, funciones cuadrado de tipo Littlewood-Paley y multiplicadores. La primera observación es la necesidad de una noción de gradiente asociado a los operadores diferenciales $\mathcal{L}_\alpha$ y L_γ definidos más arriba. En este contexto el gradiente debe satisfacer dos propiedades, ver [St1],

(i) Si $f \geq 0$ y $Lf = 0$ entonces $L(f^p) = p(p-1) f^{p-2} |\nabla f|^2$, para $1 \leq p < \infty$.

(ii) Existe un operador, div, tal que si denotamos por μ a la medida que hace autoadjunto el operador L, entonces

$$\int_{(0,\infty)^d} \operatorname{div} F(z) f(z)\, d\mu(z) = -\int_{(0,\infty)^d} F(z) \nabla f(z)\, d\mu(z) \qquad \text{y} \qquad L = \operatorname{div} \circ \nabla,$$

para funciones f y F suficientemente buenas.

Es muy fácil comprobar que en el caso de los polinomios de Hermite el vector gradiente debe de ser

$$\nabla_\gamma f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

mientras que

$$\operatorname{div}_\gamma F(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x) - \sqrt{2}\, x_i F_i(x) \right).$$

Análogamente en el caso de Laguerre puede verificarse que

$$\nabla_\alpha f(x) = \left(\sqrt{y_1}\, \frac{\partial f}{\partial y_1}(y), \dots, \sqrt{y_d}\, \frac{\partial f}{\partial y_d}(y) \right)$$

y

$$\operatorname{div}_\alpha F(y) = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{y_i} \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_i}(y) + \Big(\frac{\alpha_i + 1/2}{y_i} - 1 \Big) F_i(y) \right).$$

Motivados por estas relaciones introducimos la siguiente notación

$$\delta_i f(x) = \sqrt{y_i}\, \frac{\partial f}{\partial y_i}(y), \quad i = 1, \dots, d, \tag{1.9}$$

es decir, en dimensión d tenemos $\nabla_\alpha = (\delta_1, \dots, \delta_d)$.

Estamos ya en condiciones de definir los operadores utilizando ideas de teoría espectral, ver [St1]. Si T_t es un semigrupo de difusión simétrico con generador infinitesimal el operador diferencial de segundo orden $-L$, entonces el semigrupo T_t puede expresarse como $T_t = e^{-tL}$. El primer operador que aparece de manera natural es el

Operador maximal del semigrupo, es decir, $T^* f(x) = \sup_{t>0} |T_t f(x)|$. Las fórmulas

$$e^{-t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{t^2}{4u}}\, du, \quad \text{y} \quad s^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-ts} t^a\, \frac{dt}{t}, \tag{1.10}$$

permiten definir el semigrupo subordinado de Poisson, las potencias del operador diferencial L y las transformadas de Riesz como sigue, ver [St1].

Operador maximal del semigrupo de Poisson subordinado. $P^* f(x) = \sup_{t>0} |P_t f(x)|$, donde P_t está definido mediante la fórmula de subordinación que aparece en (1.10) es decir

$$P_t f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} T_{t^2/4u} f(x)\, du.$$

Potenciales de Riesz. Nuevamente utilizando las fórmulas en (1.10) podemos definir para $a > 0$, $L^{-a} f(x) = \dfrac{1}{\Gamma(a)} \displaystyle\int_0^\infty s^{a-1} T_s f(x)\, ds.$

Transformadas de Riesz. Puede definirse el **vector transformada de Riesz** como

$$\mathcal{R} f(x) = \nabla(L^{-1/2})$$

donde el operador ∇ es el operador gradiente asociado al operador diferencial L y satisfaciendo las propiedades (i) y (ii) explicadas más arriba. Cada una de las componentes del vector anterior se llamará **transformada de Riesz**.

Por último pueden definirse las **funciones cuadrado de tipo Littlewood-Paley** como
(1.11)

$$g_o(f)(x) = \left(\int_0^\infty \left| t \frac{\partial}{\partial t} P_t f(x) \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}, \quad g_1(f)(x) = \left(\int_0^\infty |t \nabla P_t f(x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}.$$

Nosotros estamos interesados en los operadores anteriormente definidos en los casos $L = -L_\gamma$ y $L = -\mathcal{L}_\alpha$.

En el caso L_γ el semigrupo T_t es el semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck O_t dado por

$$O_t f(x) = (\pi(1 - e^{-2t}))^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|e^{-t}x - z|^2}{1 - e^{-2t}}} f(z)\, dz.$$

En este caso los operadores descritos arriba han sido estudiados en los últimos 20 años por diversos autores. La acotación en $L^p(d\gamma)$, del operador O^* se encuentra en [M], [St1] y [Sj], resultados para las transformadas de Riesz pueden consultarse en [M], [Gu], [Me], [P], [FGS], [Gt], [U]. Las funciones g de Littlewood-Paley fueron estudiadas en [PS] y [Gt]. Observemos que debido al conocimiento explícito del núcleo de O_t, los núcleos de los operadores anteriores pueden determinarse y de hecho su conocimiento es una pieza esencial en las demostraciones analíticas.

El semigrupo de Laguerre M_t^α es también conocido y puede escribirse como

$$M_t^\alpha f(y) = \int_{(0,\infty)^d} \prod_{i=1}^d \frac{(-e^{-t} x_i z_i)^{-\alpha_i/2}}{1 - e^{-t}} \times \exp\left(\frac{-e^{-t}(y_i + z_i)}{1 - e^{-t}} \right) J_{\alpha_i}\left(\frac{2\sqrt{-e^{-t} x_i z_i}}{1 - e^{-t}} \right) f(z) z^\alpha e^{-z}\, dz,$$

donde J_{α_i} denota la función de Bessel habitual, ver [SZ]. La complejidad de esta expresión hace que los resultados en el caso de Laguerre sean mucho menos completos que en el caso de Hermite, sin embargo la fórmula clásica (1.7) puede utilizarse de manera simple y sistemática para la obtención de resultados en este caso supuestos conocidos algunos resultados para el caso de Hermite. En el rango $1 < p < \infty$, la acotación de $L^p((0,\infty)^d, \mu_\alpha\, dx)$ en sí mismo del operador maximal del semigrupo M_t se deduce de un resultado general de E. Stein, ver [St1]. En una dimensión la acotación de tipo débil $(1,1)$ se debe a Muckenhoupt [M], y para dimensión superior (finita) el resultado se debe a U. Dinger, ver [D].

2. Lemas de paso

Como hemos dicho en la sección anterior el propósito de esta pequeña nota es utilizar la fórmula clásica (1.7) para obtener teoremas de paso de resultados sobre los operadores definidos en el caso de Hermite a resultados sobre los operadores definidos en el caso de Laguerre. De hecho este método es utilizado en parte en el trabajo [D] sobre el operador maximal. Nosotros creemos que la teoría espectral permite una sistematización del método.

Los dos sencillos lemas siguientes constituyen la parte técnica que permitirá el paso. Sea $(n_1, \dots, n_d)$ un multiíndice con n_i enteros positivos. Definimos las variables $x^i = (x^i_1, \dots, x^i_{n_i})$, $i = 1, \dots, d$, y la transformación cuadrática

$$\phi(x^1, \dots, x^d) = (|x^1|^2, \dots, |x^d|^2). \tag{2.12}$$

Una sencilla utilización del teorema de Fubini junto con integración en coordenadas polares prueba el siguiente Lema, ver [GIT].

Lema 2.13. *Sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ con $\alpha_i = \frac{n_i}{2} - 1$ y $n_i \in \mathbb{N}$. Sea $f(y_1, \dots, y_d)$ una función definida para $y = (y_1, \dots, y_d) \in (0, \infty)^d$. La fórmula*

$$\left(2^{-d} \prod_{i=1}^{d} \text{área}(S_{n_i-1})\right) \int_{(0,\infty)^d} f(y)\mu_\alpha(y)\, dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{|n|}} f(\phi(x^1, \dots, x^d)) e^{-(|x^1|^2 + \cdots + |x^d|^2)}\, dx^1 \dots dx^d, \quad |n| = \sum_{i=1}^{d} n_i,$$

es válida.

Utilizando este Lema podemos enunciar y demostrar el siguiente lema que pone de manifiesto como transferir resultados conocidos con respecto a la medida gaussiana a resultados con respecto a las medidas μ_α para algunos α's.

Lema 2.14. *Sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ con $\alpha_i = \frac{n_i}{2} - 1$ y $n_i \in \mathbb{N}$. Supongamos que T y T' son operadores lineales definidos sobre polinomios y tales que*

$$(Tf)(\phi(x)) = T'(f \circ \phi)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^{|n|}.$$

Sean B_1 y B_2 espacios de Banach.

(i) *Si $1 < p < \infty$ y T' es acotado de*

$$L^p_{B_1}(\mathbb{R}^{|n|}, e^{-(|x^1|^2 + \cdots + |x^d|^2)}) \quad \text{en} \quad L^p_{B_2}(\mathbb{R}^{|n|}, e^{-(|x^1|^2 + \cdots + |x^d|^2)})$$

entonces T es acotado de $L^p_{B_1}((0,\infty)^d, \mu_\alpha)$ en $L^p_{B_2}((0,\infty)^d, \mu_\alpha)$.

(ii) *Si T' es acotado de*

$$L^1_{B_1}(\mathbb{R}^{|n|}, e^{-(|x^1|^2 + \cdots + |x^d|^2)}) \quad \text{en} \quad L^{1,\infty}_{B_2}(\mathbb{R}^{|n|}, e^{-(|x^1|^2 + \cdots + |x^d|^2)})$$

entonces T es acotado de $L^1_{B_1}((0,\infty)^d, \mu_\alpha)$ en $L^{1,\infty}_{B_2}((0,\infty)^d, \mu_\alpha)$.

Además, en ambos casos la norma como operador de T está acotada por la norma como operador de T'.

Demostración. Sólo demostraremos aquí el punto (ii). Sea

$$E_\lambda = \{y \in (0,\infty)^d : \|Tf(y)\|_{B_2} > \lambda\}.$$

Utilizando el lema anterior tenemos que

$$\mu_\alpha(E_\lambda) = \int_{(0,\infty)^d} \chi_{E_\lambda}(y)\mu_\alpha\, dy$$
$$= \left(2^{-d} \prod_{i=1}^{d} \text{área}(S_{n_i-1})\right)^{-1} \int_{\mathbb{R}^{|n|}} \chi_{E_\lambda}(\phi(x^1, \dots, x^d)) e^{-(|x^1|^2 + \cdots + |x^d|^2)}\, dx^1 \dots dx^d$$

$$= \left(2^{-d} \prod_{i=1}^{d} \text{área}(S_{n_i - 1}) \right)^{-1} \int_{\mathbb{R}^{|n|}} \chi_{F_\lambda}(x^1, \ldots, x^d) e^{-(|x^1|^2 + \cdots + |x^d|^2)} \, dx^1 \ldots dx^d$$

donde $F_\lambda = \{(x^1, \ldots, x^d) \in \mathbb{R}^{|n|} : \|T'(f \circ \phi)(x^1, \ldots, x^d)\|_{B_2} > \lambda\}$. Utilizando que T' es de tipo débil $(1,1)$ y nuevamente el lema anterior tenemos

$$\begin{aligned}
\mu_\alpha(E_\lambda) &= \left(2^{-d} \prod_{i=1}^{d} \text{área}(S_{n_i - 1}) \right)^{-1} \gamma_{|n|}(F_\lambda) \\
&\leq \left(2^{-d} \prod_{i=1}^{d} \text{área}(S_{n_i - 1}) \right)^{-1} \frac{\|T'\|}{\lambda} \|f(\phi(x^1, \ldots, x^d))\|_{L^1_{B_1}(\mathbb{R}^{|n|}, \gamma_{|n|})} \\
&= \frac{\|T'\|}{\lambda} \left(2^{-d} \prod_{i=1}^{d} \text{área}(S_{n_i - 1}) \right)^{-1} \left(2^{-d} \prod_{i=1}^{d} \text{área}(S_{n_i - 1}) \right) \|f(\cdot)\|_{L^1_{B_1}(\mathbb{R}^{|n|}, \mu_\alpha)} \\
&= \frac{\|T'\|}{\lambda} \|f(\cdot)\|_{L^1_{B_1}(\mathbb{R}^{|n|}, \mu_\alpha)}.
\end{aligned}$$

□

3. Resultados fundamentales

Proposición 3.15. *Sea $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ con $\alpha_i = \frac{n_i}{2} - 1$ y $n_i \in \mathbb{N}$. Denotemos por $\{O_t\}$ (respectivamente $\{M_t^\alpha\}$) el semigrupo asociado al operador $L_{\gamma_{|n|}}$ (respectivamente $\mathcal{L}_\alpha$). Sea $f(y_1, \ldots, y_d)$ un polinomio definido para $y = (y_1, \ldots, y_d) \in (0, \infty)^d$. Entonces*

$$M_t^\alpha f \circ \phi(x) = O_{t/2}(f \circ \phi)(x), \quad x \in \mathbb{R}^{|n|}, \quad n = (n_1, \ldots, n_d).$$

Demostración. Sea L_k^α un polinomio de Laguerre de tipo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, con $k = (k_1, \ldots, k_d)$. Dado el polinomio de Laguerre unidimensional $L_{k_i}^{\alpha_i}(z)$, consideremos $L_{k_i}^{\alpha_i}(|x_i|^2)$. Utilizando (1.4), (1.6) y (1.7), tenemos

$$\begin{aligned}
(M_t^\alpha L_k^\alpha)(\phi(x^1, \ldots, x^d)) &= e^{-|k|t} L_k^\alpha(\phi(x^1, \ldots, x^d)) = \prod_{i=1}^{d} e^{-k_i t} L_{k_i}^{\alpha_i}(|x^i|^2) \\
&= \prod_{i=1}^{d} e^{-k_i t} \left(\sum_{|r|=k_i} a_r^i H_{2r}(x^i) \right) = \prod_{i=1}^{d} \left(\sum_{|r|=k_i} a_r^i e^{-k_i t} H_{2r}(x_i) \right) \\
&= \prod_{i=1}^{d} \left(\sum_{|r|=ki} a_r^i (O_{t/2} H_{2r})(x^i) \right) = \prod_{i=1}^{d} O_{t/2} \left(\sum_{|r|=k_i} a_r^i H_{2r} \right)(x^i) \\
&= \prod_{i=1}^{d} O_{t/2}(L_{k_i}^{\alpha_i} \circ \phi_i)(x^i) = O_{t/2} \left(\prod_{i=1}^{d} L_{k_i}^{\alpha_i} \circ \phi \right)(x) \\
&= O_{t/2}(L_k^\alpha \circ \phi)(x).
\end{aligned}$$

Aquí hemos denotado $\phi_i(x^i) = |x^i|^2$ y por $H_\beta(x^i)$ un polinomio de Hermite multidimensional de grado β en las variables $x_1^i, \ldots, x_{n_i}^i$. □

Denotemos por P_t^α, $\mathcal{R}^\alpha$, g_0^α y g_1^α a los semigrupos de Poisson, vector transformada de Riesz y funciones g asociados al operador $\mathcal{L}_\alpha$, y por P_t^γ, $\mathcal{R}^\gamma$, g_0^γ y g_1^γ a los asociados a L_γ. El siguiente resultado es una fácil consecuencia de la Proposición 3.15

Proposición 3.16. *Sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ con $\alpha_i = \frac{n_i}{2} - 1$, $n_i \in \mathbb{N}$. Sea $f(y_1, \dots, y_d)$, $(y_1, \dots, y_d) \in (0, \infty)^d$, un polinomio. Entonces, para $x \in \mathbb{R}^n$, $n = (n_1, \dots, n_d)$, se tiene*

(i) $(P_t^\alpha f)(\phi(x)) = P^\gamma_{t/\sqrt{2}}(f \circ \phi)(x)$.

(ii) *Para cada $m \in \mathbb{N}$,*

$$\partial_u^m P_u^\alpha f(\phi(x))|_{u=t} = \frac{1}{2^{m/2}} \partial_u^m P_u^\gamma (f \circ \phi)(x)|_{u=t/\sqrt{2}}.$$

(iii) *Dado $a > 0$, se verifica $(-\mathcal{L}_\alpha)^{-a} f(\phi(x)) = 2^a (-L)^{-a} (f \circ \phi)(x)$.*

(iv) $\|\mathcal{R}_\alpha f(\phi(x))\|_{\ell_2^d} = 2^{-1/2} \|\mathcal{R}_\gamma (f \circ \phi)(x)\|_{\ell_2^{|n|}}$.

(v) $g_i^\alpha f(\phi(x)) = 2^{-1/2} g_i^\gamma (f \circ \phi)(x), \quad i = 0, 1.$

Finalmente enunciamos el teorema consecuencia de la proposición anterior.

Teorema 3.17. *Sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ con $\alpha_i = \frac{n_i}{2} - 1$, $n_i \in \mathbb{N}$. Las transformadas de Riesz $\mathcal{L}_\alpha$, y las funciones de Littlewood-Paley g_i^α, $i = 0, 1$, están acotadas de $L^p((0, \infty)^d, \mu_\alpha(x)\, dx)$, $1 < p < \infty$, y de tipo débil $(1, 1)$. Además, si $1 < p < \infty$ las constantes de acotación son independientes de la dimensión d.*

Demostración. En el caso de Hermite, las transformadas de Riesz y la función g de Littlewood-Paley son acotadas en $L^p(\gamma(x)\, dx)$ con constantes independientes de la dimensión, ver [Gu], [Me], [P], [Gt]. El tipo débil $(1, 1)$ de las transformadas de Riesz en el caso de Hermite puede verse en [FGS], el resultado correspondiente para las funciones g se encuentra en [Sc]. La prueba del teorema se sigue entonces de la Proposición anterior y el Lemma 2.14. □

Referencias

[D] U. Dinger, Weak type $(1, 1)$ estimates of the maximal functional for the Laguerre semigroup in finite dimensions, *Rev. Mat. Iberoamericana* **8** (1992), 93–120.

[FGS] E. Fabes, C. Gutiérrez y R. Scotto, Weak-type estimates for the Riesz transforms associated with the gaussian measure, *Rev. Mat. Iberoamericana* **10** (1994), 229–281.

[FSU] L. Forzani, R. Scotto y W. Urbina, The area function, the g^k functions and the Riesz potentials for the gaussian measure γ, prepublicación.

[Gd] J. J. Guadalupe, *Memoria de investigación*, Universidad de La Rioja, enero 1994.

[Gu] R. Gundy, *Some topics in probability and analysis*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. **70**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.

[Gt] C. E. Gutiérrez, On the Riesz transforms for Gaussian measures, *J. Funct. Anal.* **120** (1994), 107–134.

[GIT] C. E. Gutiérrez, A. Incognito y J. L. Torrea, Riesz transforms, g-functions, and multipliers for the Laguerre semigroup, *Houston J. Math.* (por aparecer).

[GST] C. E. Gutiérrez, C. Segovia y J. L. Torrea, On higher Riesz transforms for Gaussian measures, *Journal Fourier Anal. Appl.* **6** (1996), 583–596.

[HVT] E. Harboure, J. L. Torrea y B. Viviani, On the search for weighted inequalities for operators related to the Ornstein-Uhlenbeck semigroup, *Math. Ann.* **318** (2000), 341–353.

[Me] P. A. Meyer, Transformations de Riesz pour le lois Gaussienes, *Lecture Notes in Math.* **1059**, Springer, Berlín (1984), 179–193.

[M] B. Muckenhoupt, Poisson Integrals for Hermite and Laguerre expansions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **139** (1969), 231–242.

[PS] S. Pérez y F. Soria, Operators associated with the Ornstein-Uhlenbeck semigroup, *J. London Math. Soc.* **61** (2000), 857–871.

[P] G. Pisier, Riesz transforms: a simpler analytic proof of P.-A. Meyer's inequality, *Lecture Notes in Math.* **1321**, Springer, Berlín (1988), 485–501.

[Sc] R. Scotto, *Weak type estimates for singular integrals operators associated with the Ornstein-Uhlenbesk process*, Ph. D. Thesis, University of Minnesota, 1993.

[Sj] P. Sjögren, On the maximal function for the Mehler kernel, en *Harmonic Analysis* (Cortona, 1982), *Lecture Notes in Math.* **992**, Springer, Berlín (1983), 73–82.

[St1] E. M. Stein, Topics in Harmonic Analysis related to the Littlewood-Paley theory, *Annals of Math. Studies* **63**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.

[SZ] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **23**, Amer. Math. Soc., 1939.

[U] W. Urbina, On singular integrals with respect to the Gaussian measure, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **17** (1990), 531–567.

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de Madrid, 28049 Madrid, Spain

Correo electrónico: `joseluis.torrea@uam.es`