MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

LOS q-POLINOMIOS HIPERGEOMÉTRICOS

RENATO ÁLVAREZ-NODARSE

A Chicho por estar siempre ahí

ABSTRACT. It is well known that the q-polynomials of hypergeometric type are the polynomial solutions of a certain second order difference equation in a non-uniform lattice. In this short paper we present a modification of the proof of a Theorem by Atakishiyev, Rahman, and Suslov that characterizes the most general lattice.

1. INTRODUCCIÓN

Dentro de la familia de las funciones especiales, y en particular de los polinomios ortogonales, se encuentran los q-polinomios. Estos objetos matemáticos tienen un gran interés por sus distintas aplicaciones en diversas áreas de la física-matemática. Son importantes sus aplicaciones y su relación con la teoría de particiones [3], las fracciones continuas, series de Euler, funciones theta y elípticas, entre otras (ver e.g. [4, 5, 16]). A lo anterior hay que unirle su estrecha conexión con la teoría de representación de q-álgebras (ver [18, 25]), éstas últimas recientemente usadas para describir el espectro *rotacional y vibracional* de núcleos atómicos, moléculas, etc. (ver e.g. [15] y las referencias del mismo). Sus aplicaciones en física se han incrementado en la última década debido a la introducción de los q-osciladores cuánticos (ver e.g. [7, 8, 11, 12] y las referencias de los mismos), el q-análogo de la teoría cuántica del momento angular [22]–[24], y las q-ecuaciones de Schrödinger [20].

Es conocido que las familias de q-polinomios se pueden obtener a partir de una ecuación en diferencias en una red no uniforme [10, 21] del tipo $x(s) = c_1q^s + c_2q^{-s} + c_3$. La suficiencia de este resultado se debe a Nikiforov y Uvarov en dos preprints (en ruso) de 1983 y completada en la edición rusa (Hauka, 1985) de la monografía [21]. Años más tarde Atakishiyev, Rahman y Suslov [10] prueban que este resultado también es necesario. Nuestro principal objetivo en este breve trabajo es dar una prueba más simple de la necesidad que la propuesta en [10]. Finalmente, consideraremos algunos ejemplos representativos.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 33D45.

Key words and phrases. Basic orthogonal polynomials and functions.

Este trabajo fue parcialmente financiado por el M.E.C. a través del proyecto BFM2000-0206-C04-02 de la Dirección General de Investigación (DGI) y el proyecto FQM-0262 de la Junta de Andalucía.

2. La ecuación hipergeométrica en una red no uniforme

Comenzaremos considerando una discretización de la ecuación diferencial hipergeométrica

$$\tilde{\sigma}(x)y'' + \tilde{\tau}(x)y' + \lambda y = 0, \tag{1}$$

consistente en aproximar las derivadas y' e y'' de la siguiente forma:

$$y'(x) \sim \frac{1}{2}\left[\frac{y(x(s+h)) - y(x(s))}{x(s+h) - x(s)} + \frac{y(x(s)) - y(x(s-h))}{x(s) - x(s-h)}\right],$$

$$y''(x) \sim \frac{1}{x(s+\frac{h}{2}) - x(s-\frac{h}{2})}\left[\frac{y(x(s+h)) - y(x(s))}{x(s+h) - x(s)} - \frac{y(x(s)) - y(x(s-h))}{x(s) - x(s-h)}\right].$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (1), y haciendo el cambio lineal de la variable $s \to hs$ obtenemos la ecuación:

$$\begin{gathered}\tilde{\sigma}(x(s))\frac{\Delta}{\Delta x(s-\frac{1}{2})}\frac{\nabla y(x(s))}{\nabla x(s)} + \frac{\tilde{\tau}(x(s))}{2}\left[\frac{\Delta y(x(s))}{\Delta x(s)} + \frac{\nabla y(x(s))}{\nabla x(s)}\right] + \lambda y(x(s)) = 0,\\ \nabla f(s) = f(s) - f(s-1), \qquad \Delta f(s) = f(s+1) - f(s)\,,\end{gathered} \tag{2}$$

donde $\tilde{\sigma}(x(s))$ es un polinomio de grado, a lo sumo, 2 en $x(s)$ y $\tilde{\tau}(x(s))$, de grado 1 y λ es una constante. Se puede comprobar que (2) aproxima a la ecuación original (1) en la *red no uniforme* $x(s)$ hasta orden $O(h^2)$.

En adelante llamaremos *red*, a una función $x(s) \in \mathrm{C}^2(U)$, donde U es cierto dominio del plano complejo, tal que $x(s)$, $s = 0, 1, 2, \ldots$ define un conjunto de puntos de $\mathbb{C}$ en los cuales vamos a discretizar la ecuación (1) y asumiremos que $x(s)$ no es constante, es decir que $\Delta x(s) \neq 0$ para todo s. Además la distancia entre dos puntos $\Delta x(s) \equiv x(s+h) - x(s)$ no tiene que ser constante. Por comodidad consideraremos el caso $h = 1$. El caso de una red uniforme, es decir, cuando $\Delta x(s) = 1$ corresponde a la función $x(s) = s$.

Vamos a considerar, en vez de la ecuación (2), la siguiente ecuación equivalente:

$$\begin{gathered}\sigma(s)\frac{\Delta}{\Delta x(s-\frac{1}{2})}\frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} + \tau(s)\frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} + \lambda y(s) = 0,\\ \sigma(s) = \tilde{\sigma}(x(s)) - \tfrac{1}{2}\tilde{\tau}(x(s))\Delta x(s-\tfrac{1}{2}), \quad \tau(s) = \tilde{\tau}(x(s)),\end{gathered} \tag{3}$$

donde por $y(s)$ denotaremos las soluciones de la ecuación anterior, o sea, $y(s) \equiv y(x(s))$. Obviamente τ es un polinomio de grado a lo sumo 1 en $x(s)$, no así σ que, en general, no es un polinomio en $x(s)$.

Por analogía con la ecuación (1), vamos a imponer que la ecuación anterior (3) satisfaga *la propiedad de hipergeometricidad*, consistente en que si y es una solución de (3), entonces sus *k-ésimas diferencias finitas generalizadas* y_k, definidas por $(y_0(s) \equiv y(s))$

$$y_k(s) \equiv y_k(x(s)) = \frac{\Delta}{\Delta x_{k-1}(s)}\frac{\Delta}{\Delta x_{k-2}(s)}\cdots\frac{\Delta}{\Delta x(s)}\;y(s) \equiv \Delta^{(k)}y(s), \tag{4}$$

donde $x_m(s) = x(s+\frac{m}{2})$, satisfacen una ecuación del mismo tipo [10, 21]. Para responder a esta cuestión aplicamos el operador $\frac{\Delta}{\Delta x(s)}$ a (3), obteniendo

$$\sigma(s)\frac{\Delta}{\Delta x_1(s-\frac{1}{2})}\frac{\nabla y_1(s)}{\nabla x_1(s)}+\tau_1(s)\frac{\Delta y_1(s)}{\Delta x_1(s)}+\mu_1 y_1(s)=0,$$

donde

$$\tau_1(s)=\frac{\Delta\sigma(s)}{\Delta x(s)}+\tau(s+1)\frac{\Delta x_1(s)}{\Delta x(s)},\qquad \mu_1=\lambda+\frac{\Delta\tau(s)}{\Delta x(s)}.$$

A continuación aplicamos el operador $\frac{\Delta}{\Delta x_1(s)}$, y así sucesivamente, obtenemos, por inducción que las $y_k(s)$ satisfacen la ecuación

$$\sigma(s)\frac{\Delta}{\Delta x_k(s-\frac{1}{2})}\frac{\nabla y_k(s)}{\nabla x_k(s)}+\tau_k(s)\frac{\Delta y_k(s)}{\Delta x_k(s)}+\mu_k y_k(s)=0,$$

$$\tau_k(s)=\frac{\Delta\sigma(s)}{\Delta x_{k-1}(s)}+\tau_{k-1}(s+1)\frac{\Delta x_k(s)}{\Delta x_{k-1}(s)},\quad \tau_0(s)=\tau(s), \tag{5}$$

$$\mu_k=\mu_{k-1}+\frac{\Delta\tau_{k-1}(s)}{\Delta x_{k-1}(s)},\quad \mu_0=\lambda.$$

De la ecuación anterior se deduce que

$$\begin{aligned}\mu_k&=\lambda+\sum_{m=0}^{k-1}\frac{\Delta\tau_m(s)}{\Delta x_m(s)},\\ \tau_k(s)&=\frac{\sigma(s+k)-\sigma(s)+\tau(s+k)\Delta x(s+k-\frac{1}{2})}{\Delta x_{k-1}(s)}.\end{aligned} \tag{6}$$

Para probar la primera basta notar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\mu_k-\mu_{k-1})=\mu_n-\mu_0=\mu_n-\lambda$. Para la segunda reescribimos la fórmula de $\tau_k(s)$ en (5) en la forma

$$\tau_k(s)\Delta x_k(s-\tfrac{1}{2})+\sigma(s)=\sigma(s+1)+\tau_{k-1}(s+1)\Delta x_{k-1}(s+1-\tfrac{1}{2}).$$

Denotando $\tau_k(s)\Delta x_k(s-\frac{1}{2})+\sigma(s)$ por $T(s,k)$, tenemos $T(s,k)=T(s+1,k-1)$, luego $T(s,k)=T(s+k,0)$, de donde se deduce el resultado.

Para que se cumpla la condición hipergeométrica la ecuación (5) ha de tener la misma estructura que (3). Más aún, para que (2) —y por tanto (3)— tenga soluciones polinómicas es necesario que $\tilde\tau(x(s))\equiv\tau(s)$ sea un polinomio de grado a lo sumo uno. En efecto, si $y(s)$ es un polinomio de grado 1 en $x(s)$, entonces $\Delta y(s)=\nabla y(s)=C$, C constante, y (2) se transforma en $C/2\,\tilde\tau(x(s))+\lambda y(s)=0$, por tanto $\tilde\tau(x(s))$ es un polinomios de grado a lo sumo 1. Si aplicamos el mismo razonamiento a la ecuación (5), tendremos que para que (5) tenga soluciones polinómicas en $x_k(s)$ —y por tanto podamos asegurar que tiene lugar la propiedad de hipergeometricidad— es necesario que $\tau_k(s)$ sea un polinomio en $x_k(s)$ de grado a lo sumo uno.

Si imponemos ahora que $\tilde\sigma(x(s))$ sea un polinomio de grado a lo más 2 en $x(s)$, podemos comprobar que no para cualquier función función $x(s)$ que escojamos la ecuación (2) —o (3)— tiene soluciones polinómicas de tipo hipergeométrico en $x(s)$.

Un sencillo cálculo (ver e.g. [10, ecuación (1.61), pág. 191]) nos permite ver que, por ejemplo, para $x(s) = s^3$ lo anterior es falso. Ello nos indica que no para cualquier red tendremos familias de polinomios hipergeométricos.

Definición 2.1. *En aquellas redes donde $\tau_k(s)$ es un polinomio de grado a lo sumo uno en $x_k(s)$ la ecuación (3) se denomina* ecuación en diferencias de tipo hipergeométrico.

Obviamente la ecuación en diferencias de tipo hipergeométrico es tal que sus soluciones y cumplen la *propiedad de hipergeometricidad*, es decir, cumplen que las *k-ésimas diferencias finitas generalizadas y_k* satisfacen el mismo tipo de ecuación, en este caso (5). El próximo paso es, por tanto, encontrar la clase más amplia de funciones $x(s)$ para las cuales se cumple dicha propiedad de hipergeometricidad.

Teorema 2.1 ([10]). *El conjunto más amplio de funciones $x(s)$ para las cuales la ecuación (3) tiene como solución una familia de polinomios de tipo hipergeométrico viene dado por*

$$x(s) = c_1 q^s + c_2 q^{-s} + c_3, \tag{7}$$

donde $q \in \mathbb{C}$, y c_1, c_2, c_3 son constantes que pueden depender de q, e independientes de s.

Escogiendo las constantes c_1, c_2, c_3 como funciones de q de la forma adecuada, (7) se transforma, cuando $q \to 1$, en la familia de funciones (red cuadrática) [21] $x(s) = \tilde{c}_1 s^2 + \tilde{c}_2 s + \tilde{c}_3$, a la que pertenecen los polinomios de Racah y los duales de Hahn [21]. Comúnmente la red $x(s)$ se suele escribir en su forma simétrica [21]

$$x(s) = c_1 \left(q^s + q^{-s-\mu}\right) + c_3.$$

Para demostrar el teorema vamos a dar una prueba más simple de la siguiente proposición, que conduce directamente al teorema.

Proposición 2.1 ([10]). *Para que $\tau_k(s)$ sea un polinomio de grado a lo más 1 en $x_k(s)$ es necesario y suficiente que $x(s)$ satisfaga las siguientes dos ecuaciones:*

$$\frac{x(s+k) + x(s)}{2} = \alpha_k\, x_k\bigl(s\bigr) + \beta_k, \tag{8}$$

$$x(s+k) - x(s) = \gamma_k \Delta x_k(s - \tfrac{1}{2}), \tag{9}$$

para ciertas constantes α_k, β_k y γ_k. En particular para $k = 1$, (8) se convierte en

$$\frac{x(s+1) + x(s)}{2} = \alpha\, x\bigl(s + \tfrac{1}{2}\bigr) + \beta. \tag{10}$$

Demostración. Para probar la necesidad vamos a reescribir, siguiendo la idea original descrita en [10], la ecuación (6) en su forma equivalente

$$\begin{aligned}\tau_k(s)\Delta x_k(s - \tfrac{1}{2}) &= \sigma(s+k) - \sigma(s) + \tau(s+k)\Delta x(s+k-\tfrac{1}{2}) \\ &= \tilde{\sigma}(s+k) - \tilde{\sigma}(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{2}\Delta x(s - \tfrac{1}{2}) + \frac{\tilde{\tau}(s+k)}{2}\Delta x(s+k-\tfrac{1}{2})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\tilde{\sigma}''}{2}[x(s+k)+x(s)][x(s+k)-x(s)] + \tilde{\sigma}'(0)[x(s+k)-x(s)] \\
&\qquad + \frac{\tilde{\tau}'}{2}[x(s+k)\Delta x(s+k-\tfrac{1}{2}) + x(s)\Delta x(s-\tfrac{1}{2})] \\
&\qquad\qquad + \frac{\tilde{\tau}(0)}{2}[\Delta x(s+k-\tfrac{1}{2}) + \Delta x(s-\tfrac{1}{2})],
\end{aligned}
\tag{11}
$$

donde hemos usado la notación

$$
\tilde{\sigma}[x(s)] = \frac{\tilde{\sigma}''}{2}x^2(s) + \tilde{\sigma}'(0)x(s) + \tilde{\sigma}(0), \qquad \tilde{\tau}[x(s)] = \tilde{\tau}'x(s) + \tilde{\tau}(0),
\tag{12}
$$

para los polinomios $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\tau}$ de la ecuación (2), respectivamente. Es evidente que para que τ_k sea un polinomio de grado a lo más uno en $x_k(s)$ es necesario que el miembro derecho de la expresión (11) tenga como factor a $\Delta x_k(s-\frac{1}{2})$ cualquiera sea la elección de los polinomios $\tilde{\sigma}(s)$ y $\tilde{\tau}(s)$ no nulos.

Escojamos $\tilde{\sigma}(s)$ y $\tilde{\tau}(s)$ tales que $\tilde{\sigma}''=0$ y $\tilde{\tau}'=\tilde{\tau}(0)=0$ con $\tilde{\sigma}'(0)\neq 0$. Entonces, necesariamente tendremos

$$
\tau_k(s)\Delta x_k(s-\tfrac{1}{2}) = \tilde{\sigma}'(0)[x(s+k)-x(s)],
$$

de donde se deduce que la red debe satisfacer la ecuación

$$
x(s+k)-x(s) = \gamma_k(s)\Delta x_k(s-\tfrac{1}{2}),
$$

siendo $\gamma_k(s)$ un polinomio de grado a lo más 1 en $x_k(s)$ pues para esta elección de $\tilde{\sigma}(s)$ y $\tilde{\tau}(s)$ tenemos $\tau_k(s)=\tilde{\sigma}'(0)\gamma_k(s)$. Demostremos que $\gamma_k(s)$ no depende de s, o sea, es constante. Para ello regresemos a la expresión (11) y tomemos ahora $\tilde{\sigma}'=0$ y $\tilde{\tau}'=\tilde{\tau}(0)=0$ con $\tilde{\sigma}''\neq 0$. Usando la expresión anterior deducimos que

$$
\tau_k(s) = \frac{\tilde{\sigma}''}{2}[x(s+k)+x(s)]\gamma_k(s).
$$

Ahora bien, si $\operatorname{grado}\gamma_k = 1$, entonces $\tau_k(s)$ o bien es de grado mayor que uno o bien no es ni siquiera un polinomios pues obviamente $x(s+k)+x(s)$ no es una constante (si lo fuera, tomando $k=0$, deduciríamos que $x(s)$ es constante lo cual es una contradicción). Luego γ_k es constante. Puesto que γ_k es constante entonces necesariamente $x(s+k)+x(s)$ ha de ser un polinomio de grado a lo más 1 en $x_k(s)$ y por tanto tenemos

$$
\frac{x(s+k)+x(s)}{2} = \alpha_k\, x_k\big(s\big) + \beta_k,
$$

para ciertas constantes α_k y β_k. Luego las expresiones (8) y (9) se cumplen. Falta ahora probar que estas dos expresiones son las únicas condiciones necesarias con lo cual la proposición quedaría demostrada. Para ello observemos que para $k=1$ tenemos la fórmula (10). Es fácil comprobar que una solución particular de (10) es $x(s)=\frac{\beta}{1-\alpha}$ $(\alpha\neq 1)$. La solución general de la ecuación homogénea correspondiente la buscaremos de la forma $x(s)=r^s$. Sustituyendo dicha solución en (10) obtenemos la ecuación característica

$$
r - 2\alpha\, r^{\frac{1}{2}} + 1 = 0,
$$

que tiene dos soluciones r_1, r_2 ($\alpha \neq 1$) tales que $r_1 r_2 = 1$. Por lo que, denotando por q a una de dichas soluciones, por ejemplo r_1, entonces la otra será igual a $r_2 = q^{-1}$, y la solución general de (10) tendrá la forma

$$x(s) = c_1 q^s + c_2 q^{-s} + c_3. \tag{13}$$

Además, con la notación anterior es claro que $\alpha = (q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}})/2$. El caso $\alpha = 1$ nos conduce a la solución $x(s) = \tilde{c}_1 s^2 + \tilde{c}_2 s + \tilde{c}_3$ —en realidad una solución particular es $4\beta s^2$ y la general es $\tilde{c}_2 s + \tilde{c}_3$—. Esta última expresión es un caso particular de (13) y se puede obtener tomando el límite $q \to 1$ y escogiendo adecuadamente los valores c_1, c_2 y c_3 dependientes de q.

Si ahora usamos (13) junto a la expresión

$$\Delta x(s+a) = \kappa_q (c_1 q^{s+a+\frac{1}{2}} - c_2 q^{-s-a-\frac{1}{2}}), \qquad \kappa_q = q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}, \tag{14}$$

así como que $\gamma_k = \frac{\Delta(x(s+k)-x(s))}{\Delta x_k(s-\frac{1}{2})}$, $\alpha_k = \frac{\Delta(x(s+k)+x(s))}{\Delta x_k(s)}$ y $\beta_k = (1-\alpha_k)c_3$, obtenemos

$$\gamma_k = [k]_q = \frac{q^{\frac{k}{2}} - q^{-\frac{k}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}, \quad \alpha_k = \frac{q^{\frac{k}{2}} + q^{-\frac{k}{2}}}{2}, \quad \beta_k = -\frac{c_3}{2}(q^{\frac{k}{4}} - q^{-\frac{k}{4}})^2, \tag{15}$$

o, utilizando que $c_3 = \frac{\beta}{1-\alpha}$ con $\alpha = \alpha_1$, $\beta_k = \beta[\frac{k}{2}]_q^2[\frac{1}{2}]_q^{-2}$, donde $[x]_q$, denota a los *q-números*:

$$[x]_q \equiv \frac{q^{\frac{x}{2}} - q^{-\frac{x}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}, \qquad x \in \mathbb{C}. \tag{16}$$

Comprobemos que bajo estas condiciones τ_k es un polinomio de grado a lo más uno. Usando (8) y (9), (12) se transforma en

$$\begin{aligned}\tau_k(s)\Delta x_k(s-\tfrac{1}{2}) &= \tilde{\sigma}''\gamma_k[\alpha_k x_k(s) + \beta_k]\Delta x_k(s-\tfrac{1}{2}) \\ &\quad + \tilde{\sigma}'(0)\gamma_k \Delta x_k(s-\tfrac{1}{2}) + \frac{\tilde{\tau}'}{2}[x(s+k)\Delta x(s+k-\tfrac{1}{2}) + x(s)\Delta x(s-\tfrac{1}{2})] \\ &\quad + \frac{\tilde{\tau}(0)}{2}[\Delta x(s+k-\tfrac{1}{2}) + \Delta x(s-\tfrac{1}{2})].\end{aligned}$$

Ahora bien, $\Delta x(s+k-\frac{1}{2}) + \Delta x(s-\frac{1}{2}) = \alpha_k \Delta x_k(s-\frac{1}{2})$, y

$$x(s+k)\Delta x(s+k-\tfrac{1}{2}) + x(s)\Delta x(s-\tfrac{1}{2}) = [2\alpha_{2k}x_k(s) - 2(\alpha_{2k}-\alpha_k)c_3]\Delta x_k(s-\tfrac{1}{2}),$$

de donde se deduce fácilmente que $\tau_k(s)$ es un polinomio de grado a lo más uno en $x_k(s)$.

Para probar la suficiencia seguiremos la idea original de Nikiforov y Uvarov publicada solamente en la versión rusa de [21] y los preprints originales de Nikiforov y Uvarov —en [21] se da una prueba distinta.

Ante todo, nótese que si la red es tal que se cumple

$$\frac{\Delta p_n[x(s)]}{\Delta x(s)} = q_{n-1}[x(s+\tfrac{1}{2})] \quad \text{y} \quad \frac{p_n[x(s+1)] + p_n[x(s)]}{2} = r_n[x(s+\tfrac{1}{2})], \tag{17}$$

siendo $p_n[x(s)]$ un polinomio de grado n en $x(s)$, y $q_{n-1}[x(s+\frac{1}{2})]$ y $r_n[x(s+\frac{1}{2})]$ sendos polinomios de grado n y $n-e$, respectivamente, en $x(s+\frac{1}{2})$. Entonces

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)}+\frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)}\right]=\tilde{q}_{n-1}[x(s)], \qquad \frac{\Delta}{\Delta x(s-\frac{1}{2})}\frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)}=\tilde{r}_{n-2}[x(s)]. \tag{18}$$

Si ahora recordamos que $\tilde{\sigma}(x(s))$ y $\tilde{\tau}(x(s))$ son polinomios en $x(s)$ de grado a lo sumo 2 y 1 respectivamente, concluimos que nuestra ecuación admite soluciones polinómicas puesto que entonces los operadores

$$\frac{\Delta}{\Delta x(s)}+\frac{\nabla}{\nabla x(s)} \quad \text{y} \quad \frac{\Delta}{\Delta x(s-\frac{1}{2})}\frac{\nabla}{\nabla x(s)}$$

transforman un polinomio de grado n en $x(s)$ en otros polinomios en $x(s)$ de grado $n-1$ y $n-2$, respectivamente. Notemos ahora que

$$\begin{aligned}\frac{x^n(s+1)-x^n(s)}{x(s+1)-x(s)} &= \frac{x(s+1)+x(s)}{2}\frac{x^{n-1}(s+1)-x^{n-1}(s)}{x(s+1)-x(s)}\\ &\quad+\frac{x^{n-1}(s+1)+x^{n-1}(s)}{2},\\ \frac{x^n(s+1)+x^n(s)}{2} &= \frac{x(s+1)+x(s)}{2}\frac{x^{n-1}(s+1)+x^{n-1}(s)}{2}\\ &\quad+\frac{1}{4}[x(s+1)-x(s)]^2\,\frac{x^{n-1}(s+1)-x^{n-1}(s)}{x(s+1)-x(s)}.\end{aligned}$$

Utilizando las dos identidades anteriores podemos comprobar, mediante inducción, que si la red $x(s)$ satisface la ecuación en diferencias (10), donde α, β son constantes arbitrarias, entonces (17) tienen lugar siempre y cuando $[x(s+1)-x(s)]^2$ sea un polinomio de grado a lo sumo 2 en $x\big(s+\frac{1}{2}\big)$. Un cálculo directo nos confirma que $[x(s+1)-x(s)]^2$: es un polinomio de grado a lo más 2 en $x\big(s+\frac{1}{2}\big)$ para la red (7)

$$[x(s+1)-x(s)]^2=\kappa_q^2x_1(s)^2+3c_3\kappa_q^2(x(s)-c_3)+4c_1c_2+c_3^2, \quad \kappa_q=q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}.$$

La suficiencia está demostrada y con ella nuestra proposición. □

Un corolario inmediato de lo anterior es la siguiente expresión para τ_k:

$$\begin{aligned}\tau_k(s)=\tilde{\tau}_k'x_k(s)+\tilde{\tau}_k(0) &= \left([2k]_q\frac{\tilde{\sigma}''}{2}+\alpha_{2k}\tilde{\tau}'\right)x_k(s)\\ &\quad+2[k]_q\beta_k\frac{\tilde{\sigma}''}{2}+[k]_q\tilde{\sigma}'(0)+\alpha_k\tilde{\tau}(0)+\tilde{\tau}'(0)(\alpha_k-\alpha_{2k})\frac{\beta}{1-\alpha}.\end{aligned} \tag{19}$$

En particular tendremos que $\tilde{\tau}_k'=[2k]_q\frac{\tilde{\sigma}''}{2}+\alpha_{2k}\tilde{\tau}'$. Luego, usando (6), se deduce que

$$\mu_k=\lambda+[k]_q\left\{\left(\frac{q^{\frac{1}{2}(k-1)}+q^{-\frac{1}{2}(k-1)}}{2}\right)\tilde{\tau}'+[k-1]_q\frac{\tilde{\sigma}''}{2}\right\}, \tag{20}$$

donde $\tilde{\sigma}''$ y $\tilde{\tau}'$ son los coeficientes del desarrollo en potencias de $x(s)$ de los polinomios $\tilde{\sigma}(x(s))$ y $\tilde{\tau}(x(s))$, respectivamente (ver (12)). Si ahora usamos (17), deducimos que, si y es un polinomio de grado n en $x(s)$, entonces y_1 es de grado $n-1$ en $x_1(s)$, y así sucesivamente hasta llegar a que $y_n = C \neq 0$. Luego, de (5) se deduce que μ_n es cero y se tiene, por tanto, la siguiente expresión para λ en el caso de las soluciones polinómicas

$$\lambda_n = -[n]_q \left\{ \left(\frac{q^{\frac{1}{2}(n-1)} + q^{-\frac{1}{2}(n-1)}}{2} \right) \tilde{\tau}' + [n-1]_q \frac{\tilde{\sigma}''}{2} \right\}. \tag{21}$$

3. Algunas propiedades de los q-polinomios hipergeométricos

A partir de la ecuación de tipo hipergeométrico (2) o (3) se pueden obtener muchas propiedades interesantes de las soluciones de la misma, en particular una fórmula de tipo Rodrigues [21]

$$\begin{aligned} P_n(s)_q &= \frac{B_n}{\rho(s)} \nabla^{(n)} \left(\rho(s+n) \prod_{m=1}^{k} \sigma(s+m) \right), \\ \nabla^{(n)} &= \frac{\nabla}{\nabla x_1(s)} \frac{\nabla}{\nabla x_2(s)} \cdots \frac{\nabla}{\nabla x_n(s)}, \end{aligned} \tag{22}$$

donde $\rho(s)$ es una solución de la ecuación de tipo Pearson

$$\frac{\Delta}{\Delta x(s-\frac{1}{2})} [\sigma(s)\rho(s)] = \tau(s)\rho(s).$$

A partir de la fórmula de Rodrigues se deduce fácilmente [10, 21] la siguiente expresión explícita para las soluciones polinómicas de la ecuación (3):

$$\begin{aligned} P_n(s)_q = B_n \sum_{m=0}^{n} & \frac{[n]_q!(-1)^{m+n}}{[m]_q![n-m]_q!} \frac{\nabla x(s+m-\frac{n-1}{2})}{\prod\limits_{l=0}^{n} \nabla x(s+\frac{m-l+1}{2})} \\ & \times \prod_{l=0}^{n-m-1} [\sigma(s-l)] \prod_{l=0}^{m-1} [\sigma(s+l) + \tau(s+l)\Delta x(s+l-\tfrac{1}{2})]. \end{aligned} \tag{23}$$

En el caso más general cuando $\sigma(s) = q^{-2s} p_4(q^s)$, siendo p_4 un polinomio en q^s de grado 4, cuyas cuatro raíces son diferentes, y que denotaremos por q^{s_i}, $i = 1, 2, 3, 4$, es decir,

$$\sigma(s) = C q^{-2s} \prod_{i=1}^{4} (q^s - q^{s_i}), \qquad C = \text{const.} \neq 0, \tag{24}$$

la expresión anterior (23) se expresa mediante una *serie hipergeométrica básica* ${}_4\phi_3$ [10, 21]

$$P_n(s)_q = D_n \; {}_4\phi_3 \left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{2\mu+n-1+\sum_{i=1}^{4} s_i}, q^{s_1-s}, q^{s_1+s+\mu} \\ q^{s_1+s_2+\mu}, q^{s_1+s_3+\mu}, q^{s_1+s_4+\mu} \end{matrix} \middle| \, q \, , \, q \right), \tag{25}$$

con $q^\mu = c_1/c_2$, y

$$D_n = B_n \left(\frac{-C}{c_1 q^\mu \kappa_q}\right)^n q^{-n(s_1+3(n-1)/4)} \\ \times (q^{s_1+s_2+\mu};q)_n (q^{s_1+s_3+\mu};q)_n (q^{s_1+s_4+\mu};q)_n.$$

A partir de (25) es fácil comprobar que $P_n(s)_q$ es un polinomio de grado exactamente n. Para ello basta notar que $C(s_1,\mu) = q^{-\frac{\mu}{2}}(q^{s_1+l+\frac{\mu}{2}} + q^{-s_1-l-\frac{\mu}{2}})$,

$$(q^{s_1-s};q)_k (q^{s_1+s+\mu};q)_k = (-1)^k q^{k(s_1+\mu+\frac{k-1}{2})} \prod_{l=0}^{k-1} \left(\frac{x(s)-c_3}{c_1} - C(s_1,\mu)\right).$$

Además, el coeficiente principal a_n de $P_n(s)_q = a_n\, x^n(x) + \cdots$ se expresa por

$$a_n = B_n \left(\frac{-C}{c_1^2 \kappa_q}\right)^n q^{-3n(n+1)/4)} (q^{s_1+s_2+s_3+s_4+n+2\mu-1};q)_n\,.$$

Es importante destacar que para la red general (7) se tiene la propiedad de simetría $x(s) = x(-s-\mu)$, y por tanto (3) nos conduce a

$$\tilde\sigma(x(s)) = \frac{\sigma(-s-\mu)+\sigma(s)}{2}, \quad \tilde\tau(x(s)) = \frac{\sigma(-s-\mu)-\sigma(s)}{\Delta x(s-\frac{1}{2})}. \tag{26}$$

Esto permite reescribir la ecuación en diferencias (3) de la siguiente forma

$$[\sigma(s)+\tau(s)\Delta x(s-\tfrac{1}{2})]\frac{\Delta P_n(s)_q}{\Delta x(s)} - \sigma(s)\frac{\nabla P_n(s)_q}{\nabla x(s)} + \lambda_n \Delta x(s-\tfrac{1}{2}) P_n(s)_q = 0\,. \tag{27}$$

Nótese que $\sigma(-s-\mu) = \sigma(s)+\tau(s)\Delta x(s-\frac{1}{2})$. Usando la definición (24) e igualando los coeficientes de las potencias de mayor orden en q^s en la ecuación (27) obtenemos una expresión muy útil para λ_n, equivalente a (21)

$$\lambda_n = -\frac{C q^{(2\mu+s_1+s_2+s_3+s_4)/2}}{c_1^2(q)} [n]_q \left[2\mu+n-1+\sum_{i=1}^4 s_i\right]_q . \tag{28}$$

En general las soluciones polinómicas de la ecuación (3) no tienen por que constituir familias ortogonales. No obstante, si se imponen ciertas condiciones de frontera éstas constituyen familias ortogonales respecto a la función ρ solución de la ecuación de tipo Pearson. Para más detalle véase [10, 13, 21].

4. Ejemplos

Para concluir este trabajo consideremos algunos ejemplos.

Polinomios de Askey-Wilson. Sean $x(s) = \frac{1}{2}(q^s + q^{-s})$, $q^s = e^{i\theta}$, $\mu = 0$, $a = q^{s_1}$, $b = q^{s_2}$, $c = q^{s_3}$ y $d = q^{s_4}$. Escojamos las constantes A y B_n en (25) de la forma

$$C = -q^{\frac{1}{2}}(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})^2, \qquad B_n = 2^{-n}(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})^{-n} q^{\frac{n(3n-5)}{4}}.$$

Entonces (25) nos da

$$p_n(x(s),a,b,c,d)=\frac{(ab;q)_n(ac;q)_n(ad;q)_n}{a^n} \times {}_4\phi_3\left(\begin{array}{c} q^{-n},q^{n-1}abcd,a\,e^{-i\theta},a\,e^{i\theta} \\ ab,ac,ad \end{array}\,\middle|\, q\,,\,q\right), \tag{29}$$

y son los q-análogos de los polinomios introducidos por Askey y Wilson (ver [9, 10, 14]). Además, son solución de la ecuación en diferencias (27) con

$$\sigma(s)=-q^{-2s+\frac{1}{2}}(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}})^2(q^s-a)(q^s-b)(q^s-c)(q^s-d),$$

y

$$\lambda_n=4q^{-n+1}(1-q^n)(1-abcdq^{n-1}).$$

Los polinomios q-clásicos. A partir de la fórmula (25) tomando el límite $q^{-\mu}\to 0$, se obtienen los polinomios q-clásicos [19] (un estudio usando el punto de vista descrito aquí se puede encontrar en [1]) que corresponden a la red exponencial $x(s)=c_1q^s+c_3$. En este caso se tiene [21]

$$\begin{aligned} \sigma(s)&=\bar{A}(q^{s-s_1}-1)(q^{s-s_2}-1),\\ \sigma(s)+\tau(s)\Delta x(s-\tfrac{1}{2})&=\bar{A}(q^{s-\bar{s}_1}-1)(q^{s-\bar{s}_2}-1). \end{aligned} \tag{30}$$

y, la representación (25) se transforma en

$$P_n(s)_q=D_n\,{}_3\phi_2\left(\begin{array}{c} q^{-n},q^{s_1+s_2-\bar{s}_1-\bar{s}_2+n-1},q^{s-\bar{s}_1} \\ q^{s_1-\bar{s}_1},q^{s_2-\bar{s}_1} \end{array}\,\middle|\, q\,,\,q\right), \tag{31}$$

y

$$\lambda_n=-\frac{\bar{A}}{c_1^2}q^{-\frac{1}{2}(s_1+s_2+\bar{s}_1+\bar{s}_2)}[n]_q[s_1+s_2-\bar{s}_1-\bar{s}_2+n-1]_q.$$

Si escogemos los parámetros $q^{s_1}=0$, $q^{s_2}=c/a$, $q^{-\bar{s}_1}=aq$, $q^{-\bar{s}_2}=abq/c$, y $\bar{A}=-c/aq^{-\frac{1}{2}}$, obtenemos los q-polinomios grandes de Jacobi (B_n se escoge para que sean mónicos) introducidos por W. Hahn en 1949

$$p_n(x;a,b,c;q)=\frac{(aq;q)_n(cq;q)_n}{(abq^{n+1};q)_n}\,{}_3\phi_2\left(\begin{array}{c} q^{-n},abq^{n+1},x \\ aq,cq \end{array}\,\middle|\, q;q\right),$$

que son solución de la ecuación en diferencias (27), con

$$\lambda_n=-\frac{(1-q^{-n})(1-abq^{n+1})}{(1-q)^2}.$$

El resto de las familias conocidas de q-polinomios se puede obtener a partir de las fórmulas (25) y (31), tomando límites apropiados. De esta forma, por ejemplo, se obtuvieron en [2] dos familias clásicas que no habían sido estudiadas con anterioridad.

Agradecimientos

Quisiera agradecer al Dr. N. M. Atakishiyev (Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México) sus comentarios y críticas.

Referencias

[1] R. Álvarez-Nodarse y J. Arvesú, On the q-polynomials in the exponential lattice $x(s) = c_1 q^s + c_3$, *Integral Transform. Spec. Funct.* **8** (1999), 299–324.

[2] R. Álvarez-Nodarse y J. C. Medem, q-Classical polynomials and the q-Askey and Nikiforov-Uvarov Tableaus, *J. Comput. Appl. Math.* **135** (2001), 197–223.

[3] G. E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Cambridge Univ. Press, 1985.

[4] G. E. Andrews, *q-Series: their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics, and computer algebra*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics **66**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.

[5] G. E. Andrews, R. Askey y R. Roy, *Special functions*, Cambridge Univ. Press, 1999.

[6] R. Askey, N. M. Atakishiyev y S. K. Suslov, An analog of the Fourier transformation for a q-harmonic oscillator, en *Symmetries in science, VI* (Bregenz, 1992), Plenum, Nueva York (1993), 57–63.

[7] R. Askey y S. K. Suslov, The q-harmonic oscillator and an analogue of the Charlier polynomials, *J. Phys. A.* **26** (1993), L693–L698.

[8] R. Askey y S. K. Suslov, The q-harmonic oscillator and the Al-Salam and Carlitz polynomials, *Lett. Math. Phys.* **29** (1993), 123–132.

[9] R. Askey y R. Wilson, Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials, *Mem. Amer. Math. Soc.* **319**, Providence, RI, 1985.

[10] N. M. Atakishiyev, M. Rahman y S. K. Suslov, On the classical orthogonal polynomials, *Constr. Approx.* **11** (1995), 181–226.

[11] N. M. Atakishiyev y S. K. Suslov, Difference analogs of the harmonic oscillator, *Theoret. and Math. Phys.* **85** (1991), 442–444.

[12] N. M. Atakishiyev y S. K. Suslov, A realization of the q-harmonic oscillator, *Theoret. and Math. Phys.* **87** (1991), 1055–1062.

[13] N. M. Atakishiyev y S. K. Suslov, Continuous orthogonality property for some classical polynomials of a discrete variable, *Rev. Mexicana Fís.* **34** (1988), 541–563.

[14] N. M. Atakishiyev y S. K. Suslov, On the Askey-Wilson polynomials, *Constr. Approx.* **8** (1992), 1363–369.

[15] D. Bonatsov y C. Daskaloyannis, Quantum groups and their applications in nuclear physics, *Progress in Particle and Nuclear Physics* **43** (1999), 537–618.

[16] N. J. Fine, *Basic hypergeometric series and applications*, Mathematical Surveys and Monographs **27**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.

[17] G. Gasper y M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, Cambridge Univ. Press, 1990.

[18] T. H. Koornwinder, Orthogonal polynomials in connection with quantum groups, en *Orthogonal polynomials* (Columbus, OH, 1989, P. Nevai, ed.), NATO ASI Ser. C, Math. Phys. Sci. **294**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1990), 257–292.

[19] J. C. Medem, R. Álvarez-Nodarse y F. Marcellán, On the q-polynomials: A distributional study, *J. Comput. Appl. Math.* **135** (2001), 157–196.

[20] J. A. Minahan, The q-Schrödinger equation, *Mod. Phys. Lett. A* **5** (1990), 2625–2632.

[21] A. F. Nikiforov, S. K. Suslov y V. B. Uvarov, *Classical orthogonal polynomials of a discrete variable*, Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag, Berlín, 1991. (Edición en ruso: Nauka, Moscú, 1985.)

[22] Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoy y Yu. I. Kharitonov, Method of projection operators and the q-analog of the quantum theory of angular momentum. Clebsch-Gordon coefficients and irreducible tensor operators, *Soviet J. Nuclear Phys.* **53** (1991), 593–605.

[23] Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoy y Yu. I. Kharitonov, Projection-operator method and the q-analog of the quamtum theory of angular momentum. Racah coefficients, $3j$ and $6j$ symbols, and their symmetry properties, *Soviet J. Nuclear Phys.* **53** (1991), 1069–1086.

[24] Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoy y Yu. I. Kharitonov, Tree technique and irreducible tensor operators for the $SU_q(2)$ quantum algebra: $9j$ symbols, *Soviet J. Nuclear Phys.* **55** (1992), 1599–1604.

[25] N. Ja. Vilenkin y A. U. Klimyk, *Representation of Lie groups and special functions*, Vol. 2, 3, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992/93.

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla, Apdo. 1160, 41080 Sevilla, Spain

Correo electrónico: `ran@cica.es`

URL: `http://merlin.us.es/~renato/`

———: Instituto Carlos I de Física Teórica y Computacional, Universidad de Granada, 18071 Granada, Spain