MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

PERTURBACIONES DE SERIES DE FOURIER

MARIO PÉREZ Y FRANCISCO J. RUIZ

ABSTRACT. Let μ be a finite, positive measure on $[-1,1]$, $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ the polynomials orthonormal with respect to μ and $\{S_nf\}_{n\in\mathbb{N}}$ the associated Fourier series for each function f. The range of p for which S_nf converges to f for every $f\in L^p(\mu)$ has been determined only for particular measures. In this paper, we show how to obtain more general results by perturbing one of those measures.

Desde el año 1985, Chicho dirigía un grupo integrado por investigadores de las universidades de La Rioja y Zaragoza cuyo tema principal era el estudio de la convergencia de la serie de Fourier asociada a sistemas de polinomios ortogonales.

Desde aquel año, todos los jueves y viernes desde septiembre hasta junio, si no lo impedía alguna actividad académica en Logroño, nos reuníamos con él en el departamento de Matemáticas de Zaragoza para tratar ese problema.

Chicho ponía tanto entusiasmo en este trabajo que incluso un jueves, en que la noche anterior la había pasado en un hospital de Zaragoza porque le habían metido en la famosa «bañera» para destruirle unos cálculos renales, por la mañana temprano ya lo teníamos con nosotros y con litros y litros de agua hablando de nuestro tema matemático favorito.

En esta pequeña nota queremos honrar su memoria exponiendo algún resultado, pero sobre todo ideas que están sin publicar y que salieron de aquellas reuniones.

Esto lo haremos en el segundo párrafo. Aprovecharemos el primero para exponer el problema y, de paso, hacer un breve «survey» de las aportaciones del grupo en esta materia.

1. CONVERGENCIA EN NORMA DE LA SERIE DE FOURIER

Nos vamos a concentrar en el caso particular de una medida positiva y finita $d\mu$ soportada en el intervalo $[-1,1]$, aunque mucho de lo dicho a continuación puede servir en soportes más generales e incluso en la circunferencia unidad.

Sea pues $d\mu$ una medida en $[-1,1]$ y $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ el sistema de polinomios ortonormales que se obtienen aplicando el proceso de Gram-Schmidt al sistema linealmente independiente de las funciones $1,\ x,\ x^2,\dots$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 42C10, 47A55.

Key words and phrases. Fourier series, perturbation of operators, strong convergence, regular convergence, stable convergence.

La investigación de ambos autores está subvencionada por el proyecto BFM2000-0206-C04-03 de la DGI.

Dada una función $f \in L^1(d\mu)$, construimos su serie de Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n, \quad a_n = \int_{-1}^{1} f P_n \, d\mu.$$

Esta serie infinita es, en principio, formal y de lo que se trata es de concretar con rigor cómo se parece a la función f, o dicho con más exactitud, en qué sentido converge la serie. A nosotros nos preocupa principalmente la convergencia en la norma de $L^p(d\mu)$, que recibe el nombre de convergencia fuerte.

A este respecto, el primer hecho importante y el único que comparten todas las medidas $d\mu$ es consecuencia de la teoría de espacios de Hilbert y es el siguiente:

Si $f \in L^2(d\mu)$ y denotamos

$$S_N f = \sum_{n=1}^{N} a_n P_n,$$

entonces $S_N f \longrightarrow f$ en la norma de $L^2(d\mu)$.

Además $S_N f$ es la mejor aproximación polinómica a f en dicha norma, lo cual hace que la serie de Fourier tenga especial relevancia en teoría de aproximación.

¿Qué ocurre en $L^p(d\mu)$, cuando $p \neq 2$? Por lo que sabemos hasta la fecha, para resolver completamente el problema, es decir, dada una medida $d\mu$, conocer exactamente el rango de p's para los que la serie de Fourier $S_N f$ converge a f en $L^p(d\mu)$, se necesita conocer estimaciones precisas para los polinomios que están muy lejos de conocerse en el caso de una medida $d\mu$ arbitraria. Por esto el problema sólo se ha abordado en casos particulares.

Gracias a trabajos de Máté, Nevai y Totik (ver [20]), se pueden obtener con cierta facilidad condiciones necesarias para que la serie de Fourier converja y como consecuencia no es difícil encontrar medidas para las que la serie de Fourier sólo converge para $p = 2$ (por ejemplo, la medida de Pollaczek, ver [29]).

Nos detenemos un momento para analizar someramente por qué las estimaciones de los polinomios resuelven el problema. Proviene de las siguientes consideraciones: S_N es un operador que viene dado por la integración contra un núcleo,

$$S_N f(x) = \int_{-1}^{1} K_N(x,y) f(y) \, d\mu(y), \quad K_N(x,y) = \sum_{n=0}^{N} p_n(x) p_n(y),$$

y las relaciones de ortogonalidad permiten expresiones más manejables del núcleo como la fórmula de Christoffel-Darboux (ver [28]),

$$K_N(x,y) = \gamma_n \frac{P_{n+1}(x) P_n(y) - P_n(x) P_{n+1}(y)}{x - y}.$$

Aunque exactamente esta fórmula no sirve para nuestro problema (hay que recurrir a alguna un poco más intrincada debida a Pollard [25]), sí que nos vale para indicar al lector que el operador suma parcial tiene gran relación con el operador transformada de Hilbert,

$$Hf(x) = \int_{-1}^{1} \frac{f(y)}{x - y} \, dy$$

y que la acotación de S_N en $L^p(d\mu)$ (si ésta es uniforme en N, por resultados básicos de análisis funcional, es equivalente a la convergencia de $S_N f$) se puede reducir a la acotación de H en espacios L^p con pesos en los que intervienen los polinomios.

Que H cumpla estas acotaciones es cuestión de tamaño; de que los pesos satisfagan unas adecuadas relaciones (ser de la clase A_p; véase el trabajo germinal de Muckenhoupt [24] o mejor, el libro de García-Cuerva y Rubio de Francia [6] para detalles) y esto se logra en último término si el tamaño de los polinomios y coeficientes asociados a ellos están controlados.

Esta idea es la única que se ha explotado y así, empezando por Pollard [25, 26, 27] que resolvió el problema para polinomios de Jacobi, se incorporaron a la solución completa otros polinomios: Jacobi (en otro rango, ver [21]), Hermite y Laguerre (ver [22, 23]) o Jacobi generalizados (ver [1]); todos ellos, como se ve, polinomios clásicos o cercanos, de los que se sabe mucho acerca de su comportamiento en cuanto a tamaño.

Por esta vía, nuestro grupo ha ido obteniendo resultados que extienden los anteriores en varios sentidos.

Primero, ha tratado la convergencia en $L^p(d\mu)$ para más clases de polinomios, como polinomios de la clase $\mathcal{H}$ (ver [13]), medidas clásicas modificadas por deltas de Dirac ([12, 10]) e incluso para otros sistemas de funciones especiales como sistemas de Bessel y Dini ([11, 9]), y funciones de Bessel ([4]).

Segundo, ha extendido la acotación uniforme en $L^p(d\mu)$ a acotaciones con pesos, es decir, acotación de $L^p(u\,d\mu)$ en $L^p(v\,d\mu)$, donde u, v son funciones medibles positivas, llamadas pesos en la literatura (ver [13, 8]).

Tercero, se ha estudiado el problema de la acotación en los extremos, tratando de obtener desigualdades de tipo débil y débil restringido. Explicaremos brevemente esta terminología: por dualidad e interpolación, el conjunto de p's para los que hay convergencia fuerte es un intervalo $I = (p_0, p_1)$, donde se cumple $p \in I$ si y solo si $p' \in I$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$). Cabe preguntarse qué ocurre en los extremos p_0 y p_1.

El ejemplo patrón de la serie de Fourier trigonométrica nos dice que allí, $p_0 = 1$, se cumple la desigualdad de Kolmogorov

$$\big|\{x \in [-\pi, \pi] : |S_N f(x)| > \lambda\}\big| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1(-\pi,\pi)}, \quad (\lambda > 0),$$

donde C es una constante independiente de λ y f. Con lenguaje de análisis funcional, la desigualdad nos está diciendo que los operadores S_N están uniformemente acotados de $L^1(-\pi, \pi)$ en el espacio de Lorentz $L^{1,\infty}(-\pi, \pi)$ (véase [17] para una definición precisa de toda la gama de espacios $L^{p,q}(d\mu)$).

Para polinomios ortogonales fue Chanillo [2] el primero en advertir que, en el caso de Legendre (aquí $I = (\frac{4}{3}, 4)$), aunque no se da la análoga acotación débil de $L^{4/3}(d\mu)$ en $L^{\frac{4}{3},\infty}(d\mu)$, sí se da algo más débil todavía, acotación de $L^{\frac{4}{3},1}(d\mu)$ en $L^{\frac{4}{3},\infty}(d\mu)$. A esta última se le llama acotación débil restringida.

Nuestro grupo ha investigado lo que ocurre para la mayoría de los sistemas con los que hemos tratado y los resultados pueden verse en [14, 15, 12, 11].

Por último, hemos investigado problemas relacionados como convergencia de las series de Fourier en casi todo punto ([9, 4]) o el estudio de la conmutación de las series de Fourier con operadores de multiplicación ([7, 16]), problema éste conectado con las acotaciones con pesos.

Pero volvamos a nuestro problema de la convergencia fuerte. Para una medida arbitraria $d\mu$ están muy lejos de conocerse estimaciones precisas sobre el tamaño de los polinomios que permitan el estudio vía la transformada de Hilbert y el problema, en general, se presenta muy difícil, como coinciden en afirmar los matemáticos especializados en esta materia. Si acaso, podemos aspirar a ir incorporando casos particulares poco a poco.

Variamos de estrategia y proponemos lo siguiente: tratar de obtener información de los casos conocidos. Para explicarnos mejor, sea uno de estos casos conocidos, el asociado a una medida $d\mu$. Modificamos la medida mediante un peso $d\mu_1(x) = w(x)\, d\mu(x)$, y nos preguntamos para qué modificaciones por w podemos obtener información de la nueva serie de Fourier a partir de la antigua.

Así también nuestra cuestión se encuadra en la teoría de perturbaciones para operadores lineales en la que la pregunta es: ¿cómo cambian las propiedades espectrales de un operador cuando se hace en éste un pequeño cambio?

En nuestro caso, queremos saber cómo está relacionada la serie de Fourier nueva con la antigua. El problema será abordable si podemos obtener una buena fórmula que relacione las dos series de Fourier. El principal antecedente lo tenemos en el trabajo de Coifman y Murray [5]. Allí se logra con éxito esta relación entre las series de Fourier (veremos los detalles en el párrafo siguiente) y se logra demostrar que si la modificación por w es «pequeña», entonces la serie de Fourier varía poco. La precisión de este hecho la da la noción de espacio de holomorfía y en su desarrollo se necesitan acotaciones para conmutadores de la serie de Fourier con funciones de BMO. En [5] se trabaja en $L^2(d\mu)$ y este hecho parece crucial en determinados puntos. De la lectura de este trabajo es de donde surgieron las ideas que expondremos en el párrafo 2 que tratan de extender la forma de trabajar en [5] al contexto no hilbertiano de $L^p(d\mu)$.

Por último diremos que el problema también está muy relacionado con flujos de Toda. Al lector interesado, aparte de la consulta de [5], le recomendamos el artículo de Laeng [19].

2. Perturbaciones de series de Fourier

En este punto, tenemos que introducir algunas notaciones. Seguimos teniendo una medida fija de partida $d\mu$ en el intervalo $[-1,1]$, $\{P_n\}$ son los polinomios ortogonales respecto de $d\mu$, $K_n(x,y)$ es el núcleo y S_n es la correspondiente serie de Fourier.

Modificamos la medida por un peso $w(x)$, y tenemos una nueva medida $d\mu_1 = w\, d\mu$. Sean $\{Q_n\}$ los polinomios ortogonales respecto de $d\mu_1$, $K'_n(x,y)$ el nuevo núcleo y S'_n la nueva serie de Fourier, es decir,

$$S'_n f(x) = \int_{-1}^{1} K'_n(x,y) f(y) w(y)\, d\mu(y), \quad K'_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} Q_k(x) Q_k(y).$$

Para trabajar en el mismo espacio de medida, consideramos las funciones

$$F_n(x) = Q_n(x) w^{1/2}(x)$$

que no son polinomios, pero son ortogonales respecto de $d\mu$. Llamemos T_n a la serie de Fourier respecto de este sistema y $T_n(x,y)$ al núcleo. Esto es,

$$T_n f(x) = \int_{-1}^{1} T_n(x,y) f(y)\, d\mu(y), \quad T_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} F_k(x) F_k(y).$$

La relación entre T_n y S_n' es la siguiente

$$T_n(x,y) = K_n'(x,y) w^{1/2}(x) w^{1/2}(y),$$

$$T_n f(x) = w^{1/2}(x) \int_{-1}^{1} K_n'(x,y) f(y) w^{-1/2}(y) w(y)\, d\mu(y) = w^{1/2}(x) S_n'(f w^{-1/2})(x).$$

Así, observamos que las posibles acotaciones en espacios L^p con pesos para T_n y S_n' están relacionadas por la fórmula anterior. A la hora de buscar información sobre las nuevas series de Fourier, nosotros optaremos por el estudio de T_n.

Si modificamos por el peso w^{-1} y hacemos una construcción similar, a los operadores análogos a los T_n los denotaremos $\tilde{T}_n$.

El propósito es relacionar la serie de Fourier T_n con la primitiva S_n.

Llamemos Π_n al espacio de los polinomios de grado menor o igual que n. Del simple hecho

$$T_n(g) = g, \quad \forall g \in w^{1/2}\Pi_n$$

se deduce que, si definimos

$$L_n(f) = w^{1/2} S_n(f w^{-1/2}), \quad L_n^*(f) = w^{-1/2} S_n(f w^{1/2}),$$

entonces

$$T_n(L_n(f)) = L_n(f). \tag{1}$$

Pero también es fácil obtener la relación

$$T_n(L_n^*(f)) = T_n(f). \tag{2}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
T_n(L_n^*(f))(x) &= \int_{-1}^{1} w^{-1/2}(y) \left(\int_{-1}^{1} f(z) w^{1/2}(z) K_n(y,z)\, d\mu(z) \right) T_n(x,y)\, d\mu(y) \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} w^{-1/2}(y) T_n(x,y) K_n(y,z)\, d\mu(y) \right) f(z) w^{1/2}(z)\, d\mu(z) \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} w^{1/2}(x) K_n'(x,y) K_n(y,z)\, d\mu(y) \right) f(z) w^{1/2}(z)\, d\mu(z) \\
&= \int_{-1}^{1} w^{1/2}(x) K_n'(x,z) f(z) w^{1/2}(z)\, d\mu(z) \\
&= \int_{-1}^{1} T_n(x,z) f(z)\, d\mu(z) = T_n f(x).
\end{aligned}$$

Aquí hemos usado el teorema de Fubini y la propiedad reproductora del núcleo K_n, aunque en realidad se puede mirar desde un punto de vista más abstracto y (2) se deduce de que T_n son proyecciones autoadjuntas sobre el subespacio $w^{1/2}\Pi_n$, y L_n son proyecciones sobre este mismo subespacio en el espacio de Hilbert $L^2(d\mu)$.

Sumando y restando las igualdades (1) y (2) obtenemos

$$T_n(I + L_n - L_n^*) = L_n, \tag{3}$$

$$T_n(-I + L_n + L_n^*) = L_n. \tag{4}$$

Si los operadores que aparecen entre paréntesis en (3) o (4) fueran inversibles, ya tendríamos un modo de obtener T_n a partir de L_n.

En el espacio $L^2(d\mu)$ que $(I + L_n - L_n^*)$ son inversibles es un notable, aunque sencillo, resultado que se debe a Kerzman y Stein (ver [18]). Entonces, si no nos salimos de L^2,

$$T_n = L_n(I + L_n - L_n^*)^{-1}.$$

Este hecho es utilizado con éxito por Coifman y Murray en [5], tratando con problemas de dependencia analítica.

Nosotros nos fijamos en que las acotaciones en espacios L^p para los operadores L_n y L_n^* son equivalentes a acotaciones en L^p con pesos para los operadores S_n; de éstas, disponemos de abundante información y así, de la fórmula (3) se pueden deducir consecuencias como la siguiente:

Para mayor facilidad pensemos que $d\mu(x) = dx$, con lo que P_n son los polinomios de Legendre.

Si el peso es de la forma $w = \exp(b)$, donde b es una función del espacio BMO (espacio de las funciones de oscilación media acotada, muy popular en análisis de Fourier, ver [6]), se sabe que entonces el peso w está en una clase A_p con $p \neq 2$.

Entonces, podemos deducir que los operadores L_n están uniformemente acotados en ese L^p, pues para los polinomios de Legendre se satisfacen las desigualdades con peso que necesitaríamos. Pero no sólo eso, sino que si la norma de b en BMO es suficientemente pequeña, el tamaño A_p del peso w es suficientemente pequeño y, podríamos asegurar por técnicas conocidas que, uniformemente en n,

$$\|L_n - L_n^*\| \leq \alpha < 1, \tag{5}$$

donde la norma es la de operadores de L^p en L^p. Entonces, los operadores $I + L_n - L_n^*$ son inversibles con inversos

$$(I + L_n - L_n^*)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (L_n - L_n^*)^{(k}$$

ya que la serie, por la condición (5) converge en la norma de los operadores de L^p en L^p. Y, además, estarán uniformemente acotados.

Por tanto, de (3),

$$T_n = L_n(I + L_n - L_n^*)^{-1}$$

son operadores uniformemente acotados en L^p.

Lo interesante de este pequeño resultado es que, para un sistema ortonormal respecto de un peso poco conocido (un $w \in A_p$), hemos obtenido convergencia de la serie de Fourier para $p \neq 2$.

Sin embargo, el problema es que tenemos que considerar constantes A_p “suficientemente pequeñas”, sin poder precisar con mucha exactitud este hecho. Lo que nos gustaría es que, sin tantas limitaciones y como punto de partida para abordar nuestro problema, los operadores $(I + L_n - L_n^*)$ fueran siempre inversibles.

En este sentido, nos parece más interesante la fórmula (4) porque aquí, y esto no parece haber sido notado anteriormente, sí que somos capaces de demostrar que los operadores $(-I + L_n + L_n^*)$ son siempre inversibles.

En efecto, vamos a probar que

$$\exists(-I + L_n + L_n^*)^{-1} = -I + T_n + \tilde{T}_n.$$

Si cambiamos el papel de w por w^{-1}, las relaciones (1) y (2) se transforman en

$$\tilde{T}_n(L_n^*) = L_n^*, \quad \tilde{T}_n(L_n) = \tilde{T}_n,$$

y usándolas junto con las propias (1) y (2) se obtiene claramente que

$$(-I + T_n + \tilde{T}_n)(-I + L_n + L_n^*) = I.$$

Pero también

$$\begin{aligned}&(-I + L_n + L_n^*)(-I + T_n + \tilde{T}_n)\\ &= I - T_n - \tilde{T}_n - L_n + L_n(T_n) + L_n(\tilde{T}_n) - L_n^* + L_n^*(T_n) + L_n^*(\tilde{T}_n) = I\end{aligned}$$

porque, por las propiedades reproductoras de los núcleos,

$$L_n(T_n) = T_n, \quad L_n^*(\tilde{T}_n) = \tilde{T}_n$$

y

$$L_n(\tilde{T}_n) = L_n, \quad L_n^*(T_n) = L_n^*.$$

Con estos nuevos datos, el problema que nos ocupa tiene nombre en teoría de operadores: es un problema de convergencia *estable* de operadores.

Definición 1 ([3, p. 130])**.** Sean U, U_n, $n = 1, 2, \ldots$, operadores acotados en un espacio de Banach X. Se dice que (U_n) converge a U establemente ($U_n \xrightarrow{s} U$) si:

(i) $U_n \longrightarrow U$ puntualmente, y
(ii) $\exists M > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tales que para $n > N$, U_n^{-1} son operadores acotados en X y $\|U_n^{-1}\| \le M$.

Nuestro conocimiento sobre la convergencia de distintas series de Fourier en espacios L^p con pesos y las ideas anteriormente expuestas nos permiten mostrar ejemplos de convergencia estable.

Teorema. *Cuando*

$$d\mu(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \, dx, \ \alpha > -1, \ \beta > -1$$

y el peso es de la forma

$$w(x) = (1-x)^a (1+x)^b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

entonces los operadores $U_n = -I + L_n + L_n^*$ *convergen a* I *establemente, si se satisfacen las condiciones*

$$\left|(\alpha+1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)\right| < \operatorname{mín}\left\{\frac{1}{4}, \frac{\alpha+1}{2}\right\} - \frac{|a|}{2}$$

(y la equivalente sustituyendo a, α *por* b, β*).*

Demostración. El punto clave es que, como puede verse en [8], la serie de Fourier S_n correspondiente a $d\mu$ satisface la acotación con pesos

$$\|uS_n(u^{-1}f)\|_{L^p(d\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(d\mu)}$$

donde $u(x) = (1-x)^A(1+x)^B$ siempre que $1 < p < \infty$ y

$$\left| A + (\alpha+1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) \right| < \text{mín}\left\{\frac{1}{4}, \frac{\alpha+1}{2}\right\}$$

(y la equivalente sustituyendo A, α por B, β).

Como consecuencia, si se cumplen las hipótesis del teorema, los operadores T_n, $\tilde{T}_n$, L_n y L_n^* están acotados en $L^p(d\mu)$, dado que estas acotaciones equivalen a correspondientes acotaciones con peso para los operadores S_n' y S_n. $\square$

Este resultado se podría extender sin mayor dificultad a polinomios de Jacobi generalizados.

Sin embargo, nos parece más interesante hacer notar el hecho de que por aquí se pueda abrir una nueva vía para el estudio de la convergencia de la serie de Fourier en casos más generales. Es decir, si para una medida μ y un peso $w(x)$, la sucesión $-I + L_n + L_n^*$ converge establemente (a I) en $L^p(d\mu)$, entonces por (4) los operadores T_n estarán uniformemente acotados y la correspondiente serie de Fourier será convergente.

En este caso, nos parece oportuno recordar que la convergencia estable se puede caracterizar en términos aparentemente más sencillos.

Definición 2 ([3, p. 130])**.** Sean U, U_n, $n = 1, 2, \dots$, operadores acotados en un espacio de Banach X. Se dice que (U_n) converge a U regularmente ($U_n \xrightarrow{r} U$) si:

(i) $U_n \longrightarrow U$ puntualmente, y
(ii) $\forall \{x_n\} \subset X$ acotada tal que $U_n x_n \longrightarrow y$ para alguna subsucesión, existe a su vez una subsucesión tal que $x_n \longrightarrow x$ y $Ux = y$.

En nuestro caso, es sencillo deducir que la convergencia estable de $-I + L_n + L_n^*$ a I es equivalente a la convergencia regular (ver [3, Proposition 3.17]).

Referencias

[1] V. M. Badkov, Convergence in the mean and almost everywhere of Fourier series in polynomials orthogonal on an interval, *Math. USSR Sb.* **24** (1974), 223–256.
[2] S. Chanillo, On the weak behaviour of partial sums of Legendre series, *Trans. Amer. Math. Soc.* **268** (1981), 367–376.
[3] F. Chatelin, *Spectral approximation of linear operators*, Academic Press, 1983, Nueva York.
[4] Ó. Ciaurri, J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Mean and almost everywhere convergence of Fourier-Neumann series, *J. Math. Anal. Appl.* **236** (1999), 125–147.
[5] R. R. Coifman y M. A. M. Murray, Uniform analyticity of orthogonal projections, *Trans. Amer. Math. Soc.* **312** (1989), 779–817.
[6] J. García-Cuerva y J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland, Amsterdam, 1985.
[7] J. J. Guadalupe, M. Pérez y F. J. Ruiz, Estimates for commutators of orthogonal Fourier series, *J. London Math. Soc.* **54** (1996), 311–322.
[8] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Weighted L^p-boundedness of Fourier series with respect to generalized Jacobi weights, *Publ. Mat.* **35** (1991), 449–459.

[9] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Two notes on convergence and divergence a.e. of Fourier series with respect to some orthogonal systems, *Proc. Amer. Math. Soc.* **116** (1992), 457–464.

[10] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Asymptotic behaviour of orthogonal polynomials relative to measures with mass points, *Mathematika* **40** (1993), 331–344.

[11] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Mean and weak convergence of Fourier-Bessel series, *J. Math. Anal. Appl.* **173** (1993), 370–389.

[12] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Weighted norm inequalities for polynomial expansions associated to some measures with mass points, *Constr. Approx.* **12** (1996), 341–360.

[13] J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Mean and weak convergence of some orthogonal Fourier expansions by using A_p theory, en *Orthogonal Polynomials and Their Applications* (Proc. Int. Congr., Laredo/España 1987, J. Vinuesa, ed.), *Lect. Notes Pure Appl. Math.* **117**, Dekker, Nueva York (1989), 161–169.

[14] J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Weak behaviour of Fourier-Jacobi series, *J. Approx. Theory* **61** (1990), 222–238.

[15] J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Weighted weak behaviour of Fourier-Jacobi series, *Math. Nachr.* **158** (1992), 161–174.

[16] J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Commutators and analytic dependence of Fourier-Bessel series on $(0,\infty)$, *Canad. Math. Bull.* **42** (1999), 198–208.

[17] R. Hunt, On $L(p,q)$ spaces, *Enseign. Math.* **12** (1966), 249–276.

[18] N. Kerzman y E. M. Stein, The Szegő kernel in terms of Cauchy-Fantappiè kernels, *Duke Math. J.* **45** (1978), 197–224.

[19] E. Laeng, Analytic dependence of orthogonal polynomials, *Rev. Mat. Iberoamericana* **7** (1991), 287–312.

[20] A. Máté, P. Nevai y V. Totik, Necessary conditions for weighted mean convergence of Fourier series in orthogonal polynomials, *J. Approx. Theory* **46** (1986), 314–322.

[21] B. Muckenhoupt, Mean convergence of Jacobi series, *Proc. Amer. Math. Soc.* **23** (1969), 306–310.

[22] B. Muckenhoupt, Mean convergence of Hermite and Laguerre series. I, *Trans. Amer. Math. Soc.* **147** (1970), 419–431.

[23] B. Muckenhoupt, Mean convergence of Hermite and Laguerre series. II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **147** (1970), 433–460.

[24] B. Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, *Trans. Amer. Math. Soc.* **165** (1972), 207–226.

[25] H. Pollard, The mean convergence of orthogonal series. I, *Trans. Amer. Math. Soc.* **62** (1947), 387–403.

[26] H. Pollard, The mean convergence of orthogonal series. II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **63** (1948), 355–367.

[27] H. Pollard, The mean convergence of orthogonal series. III, *Duke Math. J.* **16** (1949), 189–191.

[28] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4.ª edición, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.

[29] J. L. Varona, *Convergencia en L^p con pesos de la serie de Fourier respecto de algunos sistemas ortogonales*, Tesis Doctoral, Sem. Mat. García de Galdeano, sec. 2, núm. **22**, Zaragoza, 1989.

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, Edificio de Matemáticas, Ciudad Universitaria s/n, 50009 Zaragoza, Spain

Correo electrónico: `mperez@posta.unizar.es`

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, Edificio de Matemáticas, Ciudad Universitaria s/n, 50009 Zaragoza, Spain

Correo electrónico: `fjruiz@posta.unizar.es`