MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

MÉTODOS TIPO SECANTE Y SU APLICACIÓN A OPERADORES NO DIFERENCIABLES

MIGUEL A. HERNÁNDEZ Y M. JESÚS RUBIO

A nuestro amigo y compañero Chicho

Abstract. In this work we study a class of Secant-like iterations for solving nonlinear and non-differentiable equations in Banach spaces. We consider a condition for divided differences which generalizes those usual ones, i.e, Lipschitz continuous and Hölder continuous conditions. A semilocal convergence result is obtained. For that, we use a technique based on a new system of recurrence relations to obtain domains of existence and uniqueness of the solution. Finally, we apply the result obtained to a numerical example.

1. Introducción

En este trabajo consideramos operadores $F : \Omega \subseteq X \to Y$, donde Ω es un dominio abierto y convexo en el espacio de Banach X, siendo Y también un espacio de Banach. Entonces, nos planteamos aproximar una solución de la ecuación

$$F(x) = 0. \tag{1}$$

Uno de los métodos más utilizado para resolver ecuaciones no lineales es el conocido método de Newton [4]:

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n), \quad x_0 \in \Omega, \quad n \geq 0.$$

Sin embargo, si F no es diferenciable, este método no es aplicable, ya que requiere evaluar $F'(x_n)$ en cada paso. Una opción elegida, para solventar esta dificultad, ha sido considerar diferencias divididas. Recordemos que un operador lineal y acotado $[x, y; F] : \Omega \subseteq X \to Y$ se dice una diferencia dividida de primer orden para F en los puntos x e y ($x \neq y$) si cumple la siguiente igualdad:

$$[x, y; F](x - y) = F(x) - F(y). \tag{2}$$

Pues bien, este operador se ha utilizado para aproximar la primera derivada Fréchet de F. Así, utilizando esta noción, se ha estudiado el método de la Secante [3]:

$$x_{n+1} = x_n - [x_{n-1}, x_n; F]^{-1}F(x_n), \quad x_0,\ x_{-1} \in \Omega.$$

El método de la Secante es útil cuando F no es derivable o es difícil de calcular F', pero es más lento que el método de Newton. Recordemos que, mientras que el

2000 *Mathematics Subject Classification.* 47H17, 65J15.

Key words and phrases. The Secant method, recurrence relations, nondifferentiable operators.

método de Newton tiene convergencia cuadrática, el método de la Secante tiene R-order de convergencia $(1+\sqrt{5})/2$ (ver [5]).

Pues bien, en este trabajo, construimos una familia uniparamétrica de procesos iterativos de tipo Secante, dada por el siguiente algoritmo:

$$
\begin{cases} x_{-1},\ x_0 \in \Omega \\ y_n = \lambda x_n + (1-\lambda) x_{n-1}, \quad \lambda \in [0,1], \\ x_{n+1} = x_n - [y_n, x_n; F]^{-1} F(x_n). \end{cases} \tag{3}
$$

Estos métodos se pueden considerar como una generalización del método de la Secante, y mantienen la característica de no necesitar la evaluación de la primera derivada Fréchet del operador en su aplicación.

Observemos que (3) se reduce al método de la Secante si $\lambda = 0$ y al método de Newton si $\lambda = 1$, porque $x_n = y_n$ y en este caso es conocido [5] que, si F es diferenciable Fréchet, $[y_n, x_n; F] = F'(x_n)$.

En el caso real, para los métodos (3), es claro que cuanto más próximo esté x_n a y_n, más alta será la velocidad de convergencia. Por ello, considerar los procesos iterativos dados en (3) nos permitirá aproximarnos más rápidamente a la solución que el método de la Secante y la velocidad de convergencia se aproximará a la del método de Newton cuando λ se acerque a uno. Además, evitamos la computación de $F'(x_n)$ en cada paso.

La convergencia del método de la Secante para aproximar la solución de (1) ha sido estudiada por otros autores ([1], [2], [5], [6]). La suposición básica es que las diferencias divididas sean Lipschitz o Hölder continuas. En este trabajo, para estudiar la convergencia de los procesos iterativos (3), nos proponemos generalizar esta condición, y así, sólo exigiremos que la diferencia dividida verifique

$$
\|[x, y; F] - [v, w; F]\| \leq \omega(\|x - v\|, \|y - w\|), \quad x, y, v, w \in \Omega, \tag{4}
$$

siendo $\omega : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continua y no decreciente en ambas componentes.

Es conocido [1] que, si para $x, y \in \Omega$ existe una diferencia dividida cumpliendo una condición de tipo Lipschitz o Hölder en Ω, entonces existe la derivada de Fréchet de F en Ω y satisface

$$
[x, x; F] = F'(x), \quad x \in \Omega.
$$

De igual manera, es fácil probar que dicha igualdad también se verifica con la condición (4) siempre que $\omega(0,0) = 0$. Sin embargo esta condición obligará a que el operador F sea diferenciable, situación que nosotros no contemplamos.

Estudiaremos la convergencia semilocal de (3) mediante una nueva técnica que utiliza relaciones de recurrencia. Queremos hacer notar, la inestimable ayuda que supuso para nosotros, la participación del profesor J. Javier Guadalupe (Chicho) en el desarrollo de este procedimiento.

Entonces, dadas las características consideradas, esta familia uniparamétrica nos permitirá solucionar el problema de aproximar una solución de (1) de forma reducida en cuanto al coste operacional, y efectiva en cuanto a la velocidad de convergencia.

Para finalizar el trabajo se hace un estudio práctico de esta familia uniparamétrica aplicando los resultados de convergencia obtenidos a un ejemplo numérico.

2. Estudio de la convergencia semilocal

Si contemplamos la situación en que el operador F no sea diferenciable, no exigiremos que la función ω verifique $\omega(0,0)=0$. Esto nos obligará a considerar $\lambda \in [0,1)$.

Nuestras condiciones iniciales serán

(I): $\|x_{-1}-x_0\| = \alpha$,
(II): existe ${L_0}^{-1} = [y_0, x_0; F]^{-1}$ tal que $\|{L_0}^{-1}\| \leq \beta$,
(III): $\|{L_0}^{-1}F(x_0)\| \leq \eta$,
(IV): $\|[x,y;F]-[v,w;F]\| \leq \omega(\|x-v\|, \|y-w\|)$, para $x,y,v,w \in \Omega$, siendo $\omega : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continua y no decreciente en ambas componentes.

Consideramos las notaciones siguientes:

$$a = \frac{\beta\omega\left(\lambda\eta+(1-\lambda)\alpha, \eta\right)}{1-\beta\omega(\lambda\eta+(1-\lambda)\alpha, \eta)}, \quad b(u) = \frac{\beta\omega\left((1-\lambda)\eta, \eta\right)}{1-\beta\omega(u+(1-\lambda)\alpha, u)};$$

entonces ya estamos en condiciones de obtener un resultado de convergencia semilocal válido para operadores no diferenciables.

Teorema 2.1. *Sean $x_0, x_{-1} \in \Omega$ y $\lambda \in [0,1)$. Suponemos que, para cada par de puntos distintos $x, y \in \Omega$, existe una diferencia dividida $[x,y;H] \in \mathcal{L}(X,Y)$. En las condiciones **(I)–(IV)**, suponemos que la ecuación*

$$u = \left(\frac{a}{1-b(u)}+1\right)\eta \tag{5}$$

tiene al menos una solución positiva, sea R la solución positiva más pequeña. Si $\beta\omega(R+(1-\lambda)\alpha, R) < 1$, $b(R) < 1$ y $\overline{B(x_0,R)} \subset \Omega$, la sucesión $\{x_n\}$ dada en (3) está bien definida y converge a una única solución x^* de $F(x)=0$. Además, la solución x^* y las iteraciones x_n pertenecen a $\overline{B(x_0,R)}$.

Demostración. Para simplificar la notación , denotaremos $[y_n, x_n; F] = L_n$ y $b(R) = b$. En primer lugar probaremos, por inducción, que la sucesión dada en (3) está bien definida, es decir, que en cada paso el operador diferencia dividida $[y_n, x_n; F]$ posee inverso y el punto obtenido x_{n+1} está en Ω.

De las hipótesis iniciales se sigue que x_1 está bien definido y $\|x_1-x_0\| \leq \eta < R$. Por tanto, $x_1 \in B(x_0,R) \subseteq \Omega$.

Utilizando **(IV)** y que ω es no decreciente en ambas componentes, resulta

$$\begin{aligned}\|I-{L_0}^{-1}L_1\| &\leq \|{L_0}^{-1}\|\ \|L_0-L_1\| \leq \|{L_0}^{-1}\|\omega(\|y_1-y_0\|, \|x_1-x_0\|)\\ &\leq \|{L_0}^{-1}\|\omega(\lambda\|x_1-x_0\|+(1-\lambda)\|x_0-x_{-1}\|, \|x_1-x_0\|)\\ &\leq \beta\omega(\lambda\eta+(1-\lambda)\alpha, \eta) \leq \beta\omega(R+(1-\lambda)\alpha, R) < 1,\end{aligned}$$

y por el lema de Banach existe ${L_1}^{-1}$ y

$$\|{L_1}^{-1}\| \leq \frac{\beta}{1-\beta\omega(\lambda\eta+(1-\lambda)\alpha, \eta)}.$$

Por (2) y (3), obtenemos

$$F(x_1) = F(x_0) - [x_0, x_1; F](x_0-x_1) = \left(L_0 - [x_0, x_1; F]\right)(x_0-x_1).$$

Entonces, por **(IV)**, se tiene

$$\|F(x_1)\| \leq \|[x_0, x_1; F] - L_0\| \; \|x_1 - x_0\| \leq \omega\left(\|x_0 - y_0\|, \|x_1 - x_0\|\right) \|x_1 - x_0\|$$
$$\leq \omega\left((1-\lambda)\alpha, \eta\right) \|x_1 - x_0\| \leq \omega\left(R + (1-\lambda)\alpha, R\right) \|x_1 - x_0\|.$$

Como x_2 está bien definido, por estarlo $F(x_1)$ y ${L_1}^{-1}$, se sigue

$$(6) \quad \|x_2 - x_1\| \leq \|{L_1}^{-1}\| \; \|F(x_1)\| \leq \frac{\beta\omega\left((1-\lambda)\alpha, \eta\right)}{1 - \beta\omega((1-\lambda)\alpha, \eta)} \|x_1 - x_0\| = a\|x_1 - x_0\|.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que R satisface (5),

$$(7) \quad \|x_2 - x_0\| \leq \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\|$$
$$\leq \left[\frac{\beta\omega\left((1-\lambda)\alpha, \eta\right)}{1 - \beta\omega((1-\lambda)\alpha, \eta)} + 1\right] \|x_1 - x_0\| \leq (a+1)\eta < R,$$

luego, $x_2 \in B(x_0, R) \in \Omega$.

Análogamente a lo realizado en el paso anterior, tenemos que

$$\|I - {L_0}^{-1} L_2\| \leq \|{L_0}^{-1}\| \; \|L_0 - L_2\| \leq \beta\omega(\|y_2 - y_0\|, \|x_2 - x_0\|)$$
$$\leq \beta\omega(\|y_2 - x_0\| + \|x_0 - y_0\|, \|x_2 - x_0\|) \leq \beta\omega(R + (1-\lambda)\alpha, R) < 1,$$

y por tanto, obtenemos

$$\|{L_2}^{-1}\| \leq \frac{\beta}{1 - \beta\omega(R + (1-\lambda)\alpha, R)}.$$

Tomando normas en la igualdad

$$F(x_2) = F(x_1) - [x_1, x_2; F](x_1 - x_2) = \left(L_1 - [x_1, x_2; F]\right)(x_1 - x_2),$$

se tiene

$$\|F(x_2)\| \leq \|[x_1, x_2; F] - L_1\| \; \|x_2 - x_1\|$$
$$\leq \omega\left((1-\lambda)\|x_1 - x_0\|, \|x_2 - x_1\|\right) \|x_2 - x_1\| \leq \omega\left((1-\lambda)\eta, \eta\right) \|x_2 - x_1\|.$$

Entonces se sigue

(8)

$$\|x_3 - x_2\| \leq \|{L_2}^{-1}\| \; \|F(x_2)\| \leq \frac{\beta\omega((1-\lambda)\eta, \eta)}{1 - \beta\omega(R + (1-\lambda)\alpha, R)} \|x_2 - x_1\| = b\|x_2 - x_1\|.$$

En consecuencia, por (5), (6), (7) y (8), se tiene

$$\|x_3 - x_0\| \leq \|x_3 - x_2\| + \|x_2 - x_0\| \leq b\|x_2 - x_1\| + \|x_2 - x_0\|$$
$$\leq (ba + a + 1)\|x_1 - x_0\| \leq (ba + a + 1)\eta < R.$$

Por tanto, $x_3 \in B(x_0, R)$.

Probaremos, por inducción sobre n, las siguientes relaciones para $n \geq 2$:

(i_n): $\exists\, {L_n}^{-1} = [y_n, x_n; F]^{-1}$ tal que $\|{L_n}^{-1}\| \leq \dfrac{\beta}{1 - \beta\omega(R + (1-\lambda)\alpha, R)}$.

(ii_n): $\|x_{n+1} - x_n\| \leq b\|x_n - x_{n-1}\| \leq \cdots \leq b^{n-1}\|x_2 - x_1\| \leq \eta$.

Suponiendo que los operadores lineales L_j son inversibles y $x_{j+1} \in B(x_0, R) \subseteq \Omega$ para todo $j = 1, \ldots, n-1$, obtenemos

$$\begin{aligned}\|I - {L_0}^{-1} L_n\| &\le \|{L_0}^{-1}\| \, \|L_0 - L_n\| \le \beta\omega(\|y_n - y_0\|, \|x_n - x_0\|) \\ &\le \beta\omega(\|y_n - x_0\| + \|x_0 - y_0\|, \|x_n - x_0\|) \le \beta\omega(R + (1-\lambda)\alpha, R) < 1,\end{aligned}$$

y por tanto,

$$\|{L_n}^{-1}\| \le \frac{\beta}{1 - \beta\omega(R + (1-\lambda)\alpha, R)}.$$

De (3) y de la definición de diferencia dividida (2), podemos escribir

$$F(x_n) = F(x_{n-1}) - [x_{n-1}, x_n; F](x_{n-1} - x_n) = (L_{n-1} - [x_{n-1}, x_n; F])\,(x_{n-1} - x_n).$$

Tomando normas en la igualdad anterior, por **(IV)** se tiene

$$\begin{aligned}\|F(x_n)\| &\le \|[x_{n-1}, x_n; F] - L_{n-1}\| \, \|x_n - x_{n-1}\| \\ &\le \omega\left((1-\lambda)\|x_{n-1} - x_{n-2}\|, \|x_n - x_{n-1}\|\right) \|x_n - x_{n-1}\| \\ &\le \omega\left((1-\lambda)\eta, \eta\right) \|x_n - x_{n-1}\|.\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_n\| &\le \|{L_n}^{-1}\| \, \|F(x_n)\| \le \frac{\beta\omega\left((1-\lambda)\eta, \eta\right)}{1 - \beta\omega(R + (1-\lambda)\alpha, R)} \|x_n - x_{n-1}\| \\ &= b\|x_n - x_{n-1}\| \le b^{n-1}\|x_2 - x_1\| < \eta.\end{aligned}$$

Por tanto, de (5) y *(ii)*, se sigue

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_0\| &\le \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - x_{n-1}\| + \cdots + \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \\ &\le \left[b^{n-1} + b^{n-2} + \cdots + 1\right] \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \le \left[\frac{1 - b^n}{1 - b} a + 1\right] \|x_1 - x_0\| \\ &< \left[\frac{a}{1-b} + 1\right] \eta = R.\end{aligned}$$

Luego, $x_{n+1} \in B(x_0, R) \in \Omega$ y la inducción está completa.

En segundo lugar probaremos que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Para $m \ge 1$ y $n \ge 1$ se tiene

$$\begin{aligned}\|x_{n+m} - x_n\| &\le \|x_{n+m} - x_{n+m-1}\| + \|x_{n+m-1} - x_{n+m-2}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\le \left[b^{m-1} + b^{m-2} + \cdots + 1\right] \|x_{n+1} - x_n\| \le \frac{1 - b^m}{1 - b} \|x_{n+1} - x_n\| \\ &< \frac{1}{1-b} b^{n-1} \|x_2 - x_1\|.\end{aligned}$$

En consecuencia, $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy y converge a $x^* \in \overline{B(x_0, R)}$.

Por último, veamos que x^* es una raíz de F. Como

$$\|F(x_n)\| \le \omega\left((1-\lambda)\eta, \eta\right) \|x_n - x_{n-1}\|,$$

y $\|x_n - x_{n-1}\| \to 0$ cuando $n \to \infty$, se tiene $F(x^*) = 0$.

Para probar la unicidad, suponemos que existe otra solución $y^* \in \overline{B(x_0,R)}$ y consideramos el operador $A=[y^*,x^*;H]$. Como $A(y^*-x^*)=F(y^*)-F(x^*)$, si el operador A es inversible, entonces $x^*=y^*$. Pero,

$$\begin{aligned}\|{L_0}^{-1}A-I\| &\le \|{L_0}^{-1}\|\ \|A-L_0\| \le \|{L_0}^{-1}\|\|[y^*,x^*;H]-[y_0,x_0;H]\|\\ &\le \beta\omega\left(\|y^*-y_0\|,\|x^*-x_0\|\right)\le \beta\omega\left(\|y^*-x_0\|+\|x_0-y_0\|,\|x^*-x_0\|\right)\\ &\le \beta\omega\left(R+(1-\lambda)\alpha,R\right)<1\end{aligned}$$

y por tanto, existe el operador A^{-1}. □

3. Ejemplo Numérico

Ahora, aplicamos el resultado de convergencia semilocal obtenido al siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^2-y+1+\frac{1}{9}|x-1|=0,\\ y^2+x-7+\frac{1}{9}|y|=0.\end{cases} \tag{9}$$

Sea el operador $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dado por $F=(F_1,F_2)$. Para $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ tomamos $F_1(x_1,x_2)={x_1}^2-x_2+1+\frac{1}{9}|x_1-1|$, $F_2(x_1,x_2)={x_2}^2+x_1-7+\frac{1}{9}|x_2|$.

Asimismo, consideramos la norma $\|x\|=\|x\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le 2}|x_i|$ en $\mathbb{R}^2$, y la correspondiente norma matricial para $A\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$:

$$\|A\|=\max_{1\le i\le 2}\sum_{j=1}^{2}|a_{ij}|.$$

Por otra parte, para $v,w\in\mathbb{R}^2$, tomamos $[v,w;F]\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ como

$$[v,w;F]_{i1}=\frac{F_i(v_1,w_2)-F_i(w_1,w_2)}{v_1-w_1},\ [v,w;F]_{i2}=\frac{F_i(v_1,v_2)-F_i(v_1,w_2)}{v_2-w_2},\ i=1,2.$$

Por tanto

$$[v,w;F]=\begin{pmatrix}\frac{v_1^2-w_1^2}{v_1-w_1} & -1\\ 1 & \frac{v_2^2-w_2^2}{v_2-w_2}\end{pmatrix}+\frac{1}{9}\begin{pmatrix}\frac{|v_1-1|-|w_1-1|}{v_1-w_1} & 0\\ 0 & \frac{|v_2|-|w_2|}{v_2-w_2}\end{pmatrix}$$

y

$$\|[x,y;F]-[v,w;F]\|\le\|x-v\|+\|y-w\|+\frac{2}{9}.$$

A la vista de esta desigualdad y de **(IV)**, consideramos la función

$$\omega(u_1,u_2)=u_1+u_2+\frac{2}{9}.$$

En primer lugar, aplicamos el método de la Secante, tomando ($\lambda=0$) en (3) para aproximar la solución de $F(x)=0$.

Elegimos $z_{-1}=(0.9,1.1)$ y $z_0=(1,1)$; después de tres iteraciones obtenemos

$$z_2=(1.06867,2.18207)\quad \text{y}\quad z_3=(1.14038,2.34476).$$

Entonces, considerando $x_{-1}=z_2$ y $x_0=z_3$, resulta:

$$\alpha=0.162691,\quad \beta=0.479385,\quad \eta=0.0199155,\quad a=0.240801.$$

En este caso, la ecuación (5) tiene como solución $R = 0.0256167$; además,

$$\beta\omega(R + (1-\lambda)\alpha, R) = 0.209082 < 1$$

y $b(R) = 0.158834 < 1$. Por tanto, se cumplen las hipótesis del teorema 2.1, lo cual nos asegura la existencia de una única solución de la ecuación $F(x) = 0$ en $\overline{B(x_0, R)}$.

En segundo lugar, tomando $\lambda = 0.99$ en (3), se cumplen las condiciones de convergencia un paso antes, considerando $x_{-1} = z_1$ y $x_0 = z_2$:

$$z_1 = (1.55676, 3.05109), \qquad z_2 = (1.22744, 2.42526),$$

ya que,

$$\alpha = 0.625827, \quad \beta = 0.433589, \quad \eta = 0.066004, \quad a = 0.184859,$$

$$R = 0.0803703, \quad \beta\omega(R + (1-\lambda)\alpha, R) = 0.168762 < 1, \quad b(R) = 0.150689 < 1.$$

Finalmente, obtenemos la solución aproximada x^* del sistema (9):

$$x^* = (1.15936, 2.36182).$$

En la Tabla 1 se muestran las acotaciones $\|x^* - x_n\|$ para las iteraciones x_n generadas por los métodos (3) para distintos valores de λ. Como se puede observar, cuanto mayor es λ, mayor es la velocidad de convergencia de los procesos (3).

TABLA 1. Estimaciones de los errores para diferentes valores de λ en (3)

n	$\lambda = 0$	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.75$	$\lambda = 0.99$
1	6.04841×10^{-1}	6.25523×10^{-1}	6.46627×10^{-1}	6.68166×10^{-1}	6.89267×10^{-1}
2	1.79753×10^{-1}	1.08581×10^{-1}	4.51011×10^{-2}	3.66444×10^{-2}	6.80791×10^{-2}
3	1.8976×10^{-2}	7.86512×10^{-3}	2.47721×10^{-3}	1.80847×10^{-3}	2.07502×10^{-3}
4	9.39474×10^{-4}	1.47586×10^{-4}	1.12474×10^{-5}	7.20012×10^{-6}	2.18935×10^{-6}
5	7.42629×10^{-6}	3.56366×10^{-7}	2.46324×10^{-9}	1.24707×10^{-9}	1.89109×10^{-11}
6	2.64814×10^{-9}	1.53042×10^{-11}	2.88658×10^{-15}	8.88178×10^{-16}	0.0

REFERENCIAS

[1] I. K. Argyros, On the secant method, *Publ. Math. Debrecen* **43** (1993), 223–238.

[2] J. E. Dennis, Toward a unified convergence theory for Newton-Like methods, en *Nonlinear Functional Anal. and Appl.* (Proc. Advanced Sem., Math. Res. Center, Univ. of Wisconsin, Madison, Wis., 1970), Academic Press, Nueva York (1971), 425–472.

[3] M. A. Hernández y M. J. Rubio, A new type of recurrence relations for the secant method, *Int. J. Comput. Math.* **2** (1999), 477–490.

[4] L. V. Kantorovich y G. P. Akilov, *Funcional analysis*, Pergamon Press, Nueva York, 1982.

[5] F. A. Potra y V. Ptak, *Nondiscrete induction and iterative processes*, Pitman Publ., Nueva York, 1984.

[6] W. C. Rheinboldt, A unified convergence theory for a class of iterative processes, *SIAM J. Numer. Anal.* **5** (1968), 42–63.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, CALLE LUIS DE ULLOA S/N, 26004 LOGROÑO, SPAIN

Correo electrónico: `mahernan@dmc.unirioja.es, mjesus.rubio@dmc.unirioja.es`