MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

POLIEDROS

JOSÉ IGNACIO EXTREMIANA ALDANA, LUIS JAVIER HERNÁNDEZ PARICIO
Y MARÍA TERESA RIVAS RODRÍGUEZ

Gracias, Chicho, te queremos

Abstract. In this paper we have tried to explore the presence of polyhedra in some areas of the human activity. Taking as started point a reflection about the platonic association of regular polyhedra to different cosmic elements, we have a look at the study and the use of polyhedra in art, science and technology. We emphasize some recent applications of polyhedral techniques to biological, chemical and physical processes. The symmetries, topological invariants and geometrical properties play an important role in phenomena such that the virus replication, the study of molecular structures and different properties of the substances.

1. Introducción

En este artículo intentamos poner de manifiesto la importancia de los Poliedros y la manera en la que aparecen en diversos campos que han tenido interés para el ser humano a lo largo de la historia. Hemos elegido este tema, en cierto modo ligado a nuestro campo de investigación, porque sabemos que le gustaba a Chicho. Precisamente, él fue quien sugirió el tema de los Cuerpos Platónicos para una sesión del Seminario de Actualización Permanente de Matemáticas «José Luis Rubio de Francia», que durante tantos años condujo.

Con el trabajo que aquí presentamos, versión reducida de otro más extenso que estamos preparando, nos gustaría contribuir, en la medida de nuestras posibilidades, a «acercar las Matemáticas a la sociedad», uno de los objetivos del Año Mundial de las Matemáticas y una idea en la que Chicho siempre insistía. Lamentamos que no haya podido leer el borrador que con toda seguridad le hubiésemos pasado para que lo criticara.

Por último, queremos manifestar nuestra gran admiración a su labor en la Universidad y nuestro inmenso cariño a quien fue uno de nuestros mejores amigos.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 51M20, 52B99, 57M25, 57N60, 57Q05.

Key words and phrases. Polyhedron, cellular complexes, platonic solids, symmetry, virus, capsid, nucleic acid, molecular structure, perovskite, fullerene, knots and links.

Los autores agradecen el apoyo financiero de la DGI, proyecto BFM2000-0961, y de la Universidad de La Rioja, proyecto API00/B15.

2. Cuerpos e ideas platónicas

En el lenguaje cotidiano se entiende que un polígono es una región del plano determinada por un número finito de segmentos. Estos segmentos se denominan lados o aristas y sus extremos vértices del polígono. El polígono se llama regular si todos sus lados son iguales y todos los ángulos determinados por las aristas en los vértices también son iguales. Se dice que el polígono es convexo si es una región convexa; es decir, que el segmento que une dos puntos cualesquiera de la región está contenido en ella. De modo análogo, pensando en el espacio tridimensional, se dice que un poliedro es un cuerpo sólido limitado por una superficie que consta de un número finito de polígonos no coplanarios a los que se denomina caras del poliedro. Se llama regular si sus caras son polígonos regulares iguales y se dice que es convexo si es una región convexa. De forma parecida puede pensarse en dimensiones sucesivamente mayores para obtener lo que comúnmente se llaman politopos, y en particular los politopos regulares y convexos, cuya existencia y número están bien determinados [4].

En este trabajo muchas veces la palabra poliedro o estructura poliedral se utilizará en un sentido más general para nombrar espacios construidos con piezas sencillas, de diversas dimensiones, llamadas celdas (copias topológicas de discos de la correspondiente dimensión). Se forman a partir de un espacio discreto de puntos (0-celdas), al que se le va pegando sucesivamente una colección (quizás vacía) de celdas, de dimensión cada vez mayor, por los bordes de éstas. Estas estructuras poliedrales o poliedros generales pueden tener un número finito o infinito de piezas y en este último caso ser su dimensión finita o infinita. Muchos de los objetos matemáticos que se estudian en Geometría, Topología y otras áreas tienen esta estructura. Entre los más sencillos se encuentran los polígonos y poliedros geométricos descritos al inicio de esta sección, que han sido utilizados y estudiados desde la antigüedad. Hace aproximadamente dos mil cuatrocientos años ya se conocía que únicamente existen cinco poliedros regulares convexos: el tetraedro (cuatro caras triangulares), el cubo o hexaedro (seis caras cuadradas), el octaedro (ocho caras triangulares), el dodecaedro (doce caras pentagonales) y el icosaedro (veinte caras triangulares). Véase la Figura 2.

Los restos arqueológicos más antiguos en los que aparecen figuras poliedrales, de los que tenemos noticia, son unas piedras talladas del neolítico (aproximadamente 2000 a. C.) encontradas en Escocia, véase la Figura 1. También se conservan un par de dados icosaédricos de la época de la dinastía de Tolomeo en el British Museum de Londres. Parece que este tipo de figuras geométricas ya tenían una utilidad lúdica como ocurre en la actualidad. Pensemos por ejemplo en los dados que se utilizan en juegos tan populares como el parchís o la oca que no son sino cubos; el dado del Scatergories es un icosaedro y en los juegos de rol se utilizan todo tipo de poliedros regulares.

En el libro XIII de los «Elementos», [12], de Euclides (300 a. C.) aparece la construcción de los cinco poliedros regulares; hay quien incluso sostiene que los

Figura 1. Piedras del Neolítico

Elementos no son sino una narración excelente de éstos. Se atribuye a Teeteto (417–369 a. C.), personaje que aparece en los Diálogos de Platón (400 a. C.) como símbolo de la inteligencia, la teoría de los cinco poliedros regulares.

A los cinco sólidos regulares se les llama Cuerpos Platónicos porque Platón en uno de sus diálogos más significativos, el «Timeo», en el que se explica la construcción del universo, establece una asociación entre ellos y los elementos fundamentales de los que éste está compuesto, que según sostenían los griegos estaba hecho con átomos de agua, aire, tierra y fuego.

Según lo que allí se expone, el mundo real es una copia imperfecta del mundo de las ideas hecha por el Demiurgo, ser inteligente y bueno al que le atrae la belleza y trata de recrearla. Este personaje crea en primer lugar el alma del mundo y la esfera celeste (lo hace dándole forma esférica, la más perfecta) en cuyo centro está la Tierra. Después se ocupa de la materia con la que está hecho el mundo; se compone de cuatro elementos: fuego, tierra, aire y agua, que han de tener la propiedad de ser «sólidos» (pues las cosas no solamente son planas sino que tienen profundidad) y han de ser capaces de recomponerse unos en otros. Puesto que han de ser sólidos, esto es, limitados por planos y un plano está compuesto por piezas sencillas (triángulos), el Demiurgo elige de éstos los más bellos: el triángulo rectángulo isósceles (con dos piernas —catetos— iguales) y el triángulo rectángulo escaleno (cojo) que posee la propiedad de tener la hipotenusa de doble longitud que uno de sus catetos. A partir de seis de estos últimos triángulos construye el triángulo equilátero y, con estas piezas, el tetraedro, el octaedro y el icosaedro. Con cuatro triángulos rectángulos isósceles construye el cuadrado y con seis de éstos el cubo.

Incluimos a continuación extractos literales del «Timeo» según la traducción castellana [23]:

«*. . . Antes de la creación, por cierto, todo esto carecía de proporción y medida. Cuando dios se puso a ordenar el universo, primero dio forma y número al fuego, agua, tierra y aire, de los que, si bien había algunas huellas, se encontraban en el estado en que probablemente se halle todo cuando dios está ausente. Sea siempre esto lo que afirmamos en toda ocasión: que dios los compuso tan bellos y excelsos como era posible de aquello que no era así. Ahora, en verdad, debo intentar demostraros el orden y origen de cada uno de los elementos con un discurso poco habitual. . . En primer lugar, creo que para cualquiera está más allá de toda duda que fuego, tierra, agua y aire son cuerpos. Ahora bien, toda forma corporal tiene también profundidad.*

Y, además, es de toda necesidad que la superficie rodee la profundidad. La superficie de una cara plana está compuesta de triángulos. Todos los triángulos se desarrollan a partir de dos, cada uno con un ángulo recto y los otros agudos. Uno tiene a ambos lados una fracción de ángulo recto dividido por lados iguales, el otro partes desiguales de un ángulo recto atribuida a lados desiguales... suponemos que éste es el principio del fuego y de los otros cuerpos... Ciertamente, debemos explicar cuáles serían los cuatro cuerpos más perfectos, que, aunque disímiles entre sí, podrían nacer unos de otros cuando se desintegran. En efecto, si lo logramos, tendremos la verdad acerca del origen de la tierra y el fuego y de sus medios proporcionales. Pues no coincidiremos con nadie en que hay cuerpos visibles más bellos que éstos, de los que cada uno representa un género particular. Debemos, entonces, esforzarnos por componer estos cuatro géneros de cuerpos de extraordinaria belleza y decir que hemos captado su naturaleza suficientemente ...»

Debe haber cuatro elementos por el siguiente razonamiento: las cosas deben tener fuego, puesto que se ven, y tierra, puesto que son materiales; dos cosas necesitan de una tercera para poder ser unidas. Si el universo fuese plano bastaría con un tercer elemento, pero, como tiene profundidad, necesita de otro más para poder hacer esta unión. Así, para unir el fuego y la tierra se precisan otros dos: el aire y el agua. Analizando las propiedades de los elementos y la proporción en la que deben estar en la naturaleza, llega a la conclusión de que los átomos de fuego son tetraedros, los de tierra son cubos, los de aire octaedros y los de agua icosaedros. Queda una única combinación, el dodecaedro, que lo reserva para el universo. En la Figura 2 mostramos los dibujos de Kepler basados en esa asociación.

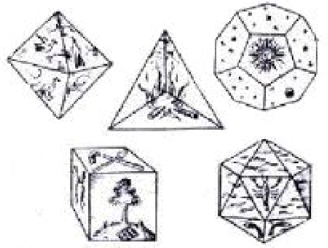


FIGURA 2. Elementos y cuerpos platónicos

En esencia, los integrantes más elementales son los triángulos rectángulos isósceles y los escalenos. Puesto que el fuego, el agua y el aire están integrados por escalenos, se pueden romper en sus escalenos y recombinarse entre sí de modo que se genera un ciclo de reacciones circular al no poderse crear una situación de equilibrio. De nuevo citamos palabras textuales de la traducción del «Timeo»:

«*... Debemos pensar que todas estas cosas son en verdad tan pequeñas que los elementos individuales de cada clase nos son invisibles por su pequeñez, pero cuando muchos se aglutinan, se pueden observar sus masas y, también, que en todas partes* *dios adecuó la cantidad, movimientos y otras características de manera proporcional y que todo lo hizo con la exactitud que permitió de buen grado y obediente la necesidad. A partir de todo aquello cuyos géneros hemos descrito antes, muy probablemente se daría lo siguiente. Cuando el fuego choca con la tierra y con su agudeza la disuelve, ésta se trasladaría, ya sea que se hubiera diluido en el mismo fuego o en una masa de aire o de agua, hasta que sus partes se reencontraran en algún lugar, se volvieran a unir unas con otras y se convirtieran en tierra —pues nunca pasarían a otra especie—, pero si el agua es partida por el fuego, o también por el aire, es posible que surjan un cuerpo de fuego y dos de aire. Cuando se disuelve una porción de aire, sus fragmentos darían lugar a dos cuerpos de fuego. A la inversa, cuando el fuego, rodeado por el aire o el agua o alguna tierra, poco entre muchos, se mueve entre sus portadores, lucha y, vencido, se quiebra; dos cuerpos de fuego se combinan en una figura de aire; mas cuando el aire es vencido y fragmentado, de dos partes y media se forjará una figura entera de agua.*»

Una mirada rápida sobre estas ideas platónicas quizás nos haga sonreír, pero una reflexión algo más profunda sobre ellas nos hace pensar cómo han influido a lo largo de la historia y hasta qué punto están vigentes en la actualidad. En nuestra opinión, contienen tres principios que han tenido y tienen gran importancia en el desarrollo de la ciencia: Unión entre ciencia y belleza, aplicación de objetos y reglas matemáticas conocidas a entidades o procesos desconocidos (asociación de los poliedros a entidades cósmicas) y construcción de la complejidad a partir de elementos simples.

En relación con el primer principio recogemos la frase de G. H. Hardy [16] referida a las matemáticas: «*Los diseños del matemático, como los del pintor o el poeta, han de ser bellos; las ideas, como los colores o las palabras, deben relacionarse de manera armoniosa. La belleza es la primera prueba: no hay lugar permanente en el mundo para las matemáticas feas.*»

La unión de ciencia y belleza, simbolizada en polígonos y poliedros, ha sido una constante en la obra de muchos científicos y artistas. Una muestra la tenemos en la construcción que Euclides hace del pentágono regular, en el que la diagonal y el lado están en proporción áurea $\tau : 1$, siendo $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ el número áureo o la divina proporción, llamado así por la belleza que genera en los objetos que lo contienen. Por ejemplo, aparece este número en el dodecaedro, en el icosaedro y en la sucesiva división de un rectángulo cuyos lados están en proporción áurea, que da lugar a un cuadrado y a otro rectángulo áureo. Uniendo mediante trozos de circunferencia los vértices opuestos de los cuadrados que se van obteniendo, aparece la espiral áurea, que es la característica de algunas de las más bellas caracolas.

Tanto en la pintura como en la escultura y en la arquitectura esta proporción se ha mantenido a lo largo de la historia como canon de belleza. Citaremos sólo algunos edificios enormemente singulares como el Partenón de la Acrópolis ateniense o la iglesia de Notre Dame de París en los que casi cualquier rectángulo que se puede distinguir en ellos es un rectángulo áureo. La fachada de la sede de las Naciones Unidas en Nueva York está formada por tres grandes rectángulos, cada uno de los cuales es áureo. Otros objetos de uso común, como las tarjetas postales o de crédito, también son rectángulos áureos.

En 1202, Leonardo da Pisa (apodado Fibonacci) encontró su célebre sucesión de enteros, $\{f_n\}: \ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$, en un estudio que realizaba sobre la cría de conejos. Esta sucesión está íntimamente ligada al número áureo, de tal forma que éste es el límite de la sucesión cuyos términos son los cocientes $\frac{f_{n+1}}{f_n}$. Los números de Fibonacci aparecen en estudios botánicos ligados a la filotaxia (disposición de las hojas) que presentan muchos árboles y frutos como la piña común, donde un cociente $\frac{f_n}{f_m}$ marca la rotación que interviene en el paso de una hoja a otra o de una lámina a otra. Así, la naturaleza, al igual que muchos artistas, parece servirse en algunas de sus creaciones de proporciones en las que interviene el número áureo ligado al pentágono regular. No es de extrañar que la figura formada por las diagonales de un pentágono regular (pentagrama) fuese elegida por los pitagóricos como el símbolo de su secta.

Una muestra de la inclusión de figuras poliedrales en el arte podemos encontrarla en la obra del pintor y mosaicista florentino Paolo Ucello (1397–1475). En la Figura 3 puede verse un detalle del fresco titulado «El Diluvio», pintado por este artista en 1448, en el que aparece un joven luciendo un sombrero que es un toro poliedral. Esta misma figura del toro poliedral, junto con otras inspiradas en dibujos de Leonardo da Vinci de los que hablaremos enseguida, también aparecerá posteriormente en algunas de las bellísimas obras realizadas hacia el 1520 por Fra Giovanni da Verona. Se trata de unos maravillosos trabajos de marquetería obtenidos al unir pequeños trozos de madera de diferentes tonalidades (artesanía que aún se realiza en Italia). Véase la Figura 3.

FIGURA 3. Obras de P. Ucello y Fra Giovanni da Verona

Mención especial merece el pintor y matemático Piero della Francesca (1416–1492), considerado actualmente como uno de los primeros artistas del renacimiento cuya fascinación por los poliedros les condujo a estudiar y desarrollar propiedades de antiguos y nuevos sólidos. Uno de sus libros, «Libellus de quinque corpibus regularibus» (1480), conservado en la Biblioteca Vaticana, contiene la figura más antigua que conozcamos de un poliedro cuyas sesenta caras son pentágonos y hexágonos en la misma distribución que ahora se utiliza para construir balones de fútbol, véase la Figura 4. Más adelante resaltaremos la importancia de este poliedro concreto (uno de los denominados sólidos arquimedianos, al que Kepler [20] llamaría mucho más tarde icosaedro truncado porque puede obtenerse truncando un icosaedro en cada uno de sus vértices). Véase la Figura 5.

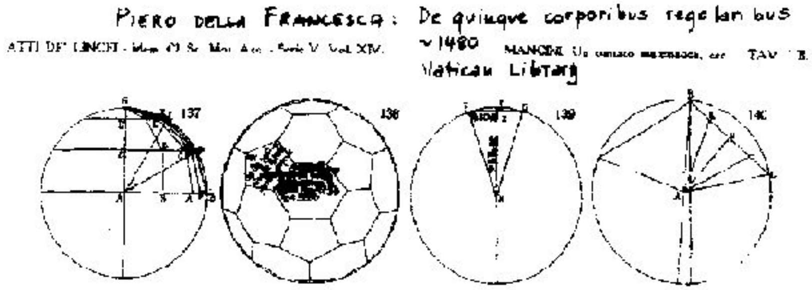


Figura 4. Dibujos de Piero della Francesca

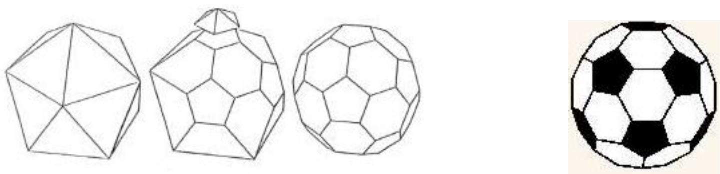


Figura 5. Truncando un icosaedro. Balón de fútbol

Parece que no sólo influido por los trabajos de Piero della Francesca, sino plagiándolos en parte, Fra Luca Pacioli (1445–1509) escribió un libro acerca de las maravillosas propiedades del número áureo titulado «De divina proportione», [22]. En este libro aparecen numerosas ilustraciones de poliedros con dibujos hechos por su amigo el gran artista Leonardo da Vinci (1452–1519). Es notable la atracción que sentía Leonardo por los poliedros, para los que construyó modelos de sus esqueletos, con tiras de madera como aristas, que dejaban huecos todo el interior del poliedro y las caras del mismo. Cuando un modelo así se observa en perspectiva con el ojo del observador muy pegado a una de las caras huecas, ésta aparece como un polígono grande que en su interior contiene el resto de las caras. Pintada esta configuración sobre un plano, es una buena representación en dos dimensiones del poliedro en cuestión, que se denomina diagrama de Schlegel del mismo. Los dibujos de Leonardo han sido una referencia y fuente de inspiración para numerosos artistas y científicos tanto de su época como posteriores. En la ilustración de la Figura 6 podemos contemplar el diseño de Leonardo de dos poliedros, uno de ellos el icosaedro truncado.

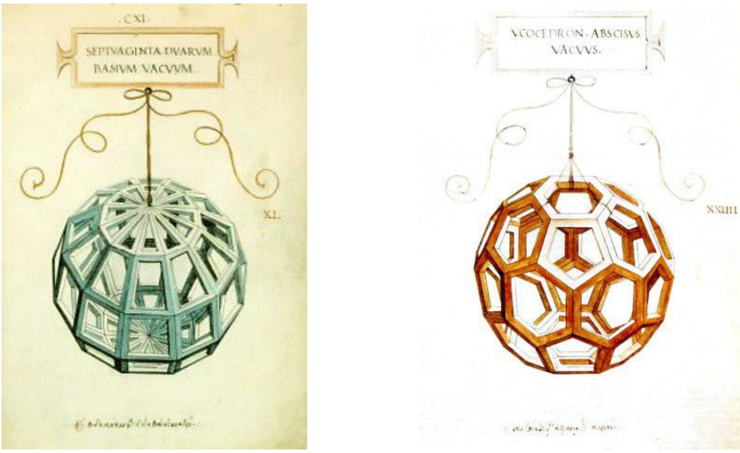


Figura 6. Dibujos de Leonardo da Vinci

Muchas de las obras artísticas más importantes del renacimiento son tratados de perspectiva, de geometría proyectiva, importante parte de la Geometría a cuyo desarrollo contribuyeron de manera notable grandes artistas. En algunas de estas obras aparecen especialmente dibujados o esculpidos algunos poliedros; como ejemplo hemos elegido el grabado «Melancolía» de Durero (1471–1528), una de las obras que a nuestro entender simboliza mejor la unión de belleza y ciencia, véase la Figura 7.

Otra admirable muestra del desarrollo de ciencia y arte se encuentra en la espléndida Alhambra de Granada. En las paredes de este monumento árabe del siglo XIII pueden apreciarse diseños de fascinante belleza que presentan cada uno de los diecisiete grupos de simetría planos. Su influencia en otras obras artísticas es notable y como ejemplo pueden verse los trabajos del holandés M. C. Escher (1898–1972), donde, a diferencia de los anteriores, aparecen dibujos de animales o de humanos pero subyace el mismo espíritu de creación a través de la simetría. En [11] pueden verse obras de este artista, muy vinculado a la geometría, en las que se observa tanto la influencia señalada como la de Leonardo para sus numerosas creaciones poliedrales, y la utilización también en su última etapa de modelos hiperbólicos.

Es bien conocida la utilización básica de figuras y estructuras poliedrales en obras de grandes artistas del siglo XX pertenecientes a diferentes movimientos artísticos, muchos de ellos enmarcados en el arte abstracto. Sugerimos al lector que observe algunas de las obras de Picasso, Dalí, Oteiza, etc. Hoy en día hay una corriente, muy ligada al mundo científico, cuyas obras representan figuras de poliedros o de sus deformaciones hasta conseguir creaciones bellas; numerosas referencias e ilustraciones de ellas pueden encontrarse en la página web de George Hart.

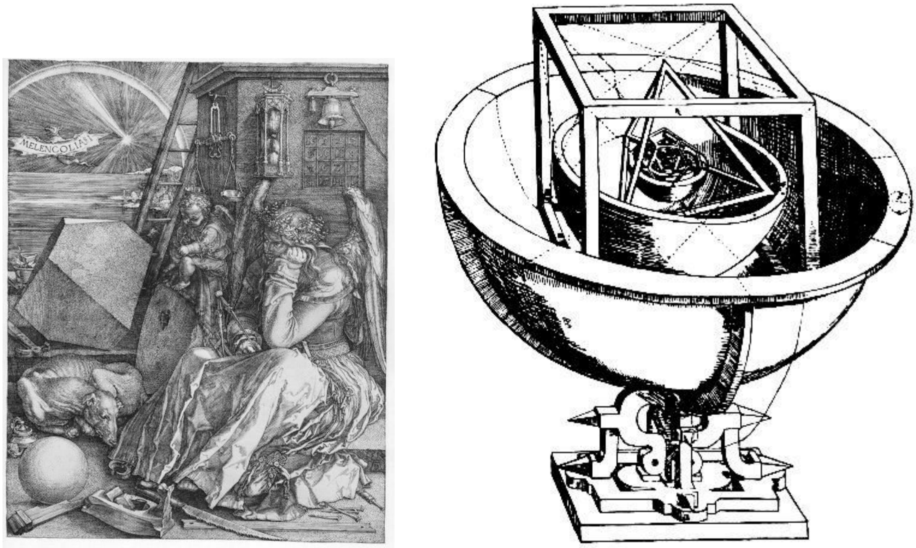


Figura 7. Melancolía de Durero y modelo cósmico de Kepler

Otra de las ideas platónicas, la asociación de sólidos a entidades cósmicas, sigue presente en investigadores posteriores al ocuparse de la estructura del universo. Así, por ejemplo, la encontramos en los trabajos del gran astrónomo J. Kepler (1571–1630), quien, además de enunciar las tres leyes del movimiento planetario, sistematizó matemáticamente y desarrolló todo lo que se conocía en su época sobre poliedros. En un folleto de 1596 titulado «El misterio cósmico», Kepler, hombre profundamente religioso a pesar de que llegó a ser excomulgado en 1612, escribe:

«*... Antes de ser creado el universo, no existían los números excepto la Trinidad que es Dios mismo... Dado que la línea y el plano no implican ningún número, entonces reina la infinidad. Consideremos por lo tanto a los sólidos. Primero debemos eliminar a los sólidos irregulares dado que sólo estamos interesados en la creación ordenada; quedan por lo tanto seis cuerpos: la esfera y los cinco poliedros regulares. A la esfera corresponde el cielo exterior, mientras que el mundo dinámico está representado por los sólidos de cara plana, de los cuales existen cinco, los cuales a la vez (cuando son vistos como límite) determinan seis cosas diferentes: los seis planetas que giran alrededor del sol. Éste es el motivo por el cual sólo hay seis planetas ...*»

Más adelante asigna cada cuerpo platónico a un planeta con el siguiente argumento:

«*... los sólidos regulares se dividen en dos grupos: tres en uno y dos en otro. Al grupo mayor pertenecen primero el cubo, segundo la pirámide, y finalmente el dodecaedro. Al segundo grupo pertenecen primero el octaedro y segundo el icosaedro. Lo mencionado explica por qué la parte más importante del universo, que es la Tierra —donde la imagen de Dios se refleja en el hombre—, separa a los dos grupos. Por* *consiguiente, como posteriormente procedo a demostrar, los sólidos del primer grupo deben hallarse fuera de la órbita de la Tierra, mientras que los del segundo grupo deben encontrarse dentro... por lo tanto, asigno el cubo a Saturno, el tetraedro a Júpiter, el dodecaedro a Marte, el icosaedro a Venus y el octaedro a Mercurio».*

Para reforzar su teoría, Kepler creó un modelo impresionante del universo, inspirado en los modelos vaciados de Leonardo, que muestra un cubo con un tetraedro inscrito en él, un dodecaedro inscrito en el tetraedro, un icosaedro inscrito en el dodecaedro, y finalmente un octaedro inscrito en el icosaedro; todos ellos separados por esferas. Este modelo ilustrado en la Figura 7 explicaba matemáticamente su teoría cosmológica, que inicialmente procedía de la teoría copernicana de órbitas circulares.

Cabe preguntarse cómo habría modificado Kepler su visión del universo de haber sido descubiertos durante su vida el resto de planetas que hoy conocemos, pero lo que sí es cierto es que basándose en las numerosas observaciones de T. Brahe (del que fue ayudante), ampliándolas, construyendo nuevos modelos cósmicos poliedrales, estudiando sistemáticamente propiedades de los poliedros conocidos y descubriendo nuevos y trabajando duramente en lo que él denominó su «guerra con Marte» (determinación de la órbita), Kepler descubrió las tres leyes fundamentales del movimiento de los planetas. I. Newton (1642–1727) mostraría un siglo más tarde en sus «Principia Mathematica» que estas tres leyes pueden ser deducidas matemáticamente, mediante métodos exclusivamente geométricos, de la ley de la gravitación.

Si en los trabajos de Kepler la idea básica es utilizar la ciencia para una mejor comprensión del universo, convencido de que Dios lo ha creado de acuerdo con un plan matemático, el propio Newton consideraba su obra como una explicación de las profecías del profeta Daniel. Con impulsos religiosos similares o diferentes, o sin ellos, lo cierto es que los científicos, siguiendo la pauta marcada por la asociación de poliedros a entidades cósmicas, continúan intentando explicar la forma del universo utilizando modelos, conceptos y teorías previamente desarrollados en Matemáticas.

La tercera idea que deseamos resaltar a partir de la asociación platónica, y que quizás sea la que más profundamente ha influido en el desarrollo de la ciencia es el pensamiento de que, sin entrar en otras consideraciones éticas, espirituales o morales, la materia, los seres orgánicos o vivos o los que son producto de nuestra imaginación están hechos de piezas elementales básicas que especialmente combinadas producen entes de una complejidad mucho mayor.

Este proceso es el que parece seguirse no sólo en la fabricación industrial o en la construcción de edificios, sino también en la creación celular de los seres vivos y a un nivel más profundo en la composición molecular y atómica, hasta el punto de que hoy en día muchos científicos sostienen que el universo está construido a partir de doce partículas elementales sobre las que actúan cuatro fuerzas fundamentales.

Por otra parte, este proceso de construcción a partir de elementos simples se aplica en ocasiones al análisis de la estructura del lenguaje o del pensamiento o en técnicas de aprendizaje y se encuentra en la base del desarrollo actual de la inteligencia artificial.

No es extraño, por tanto, que en la aproximación al estudio de la «realidad» conocida o desconocida, infinita o infinitesimal, en su posible diseño o modificación, las «estructuras poliedrales» aparezcan no sólo en campos meramente científicos o técnicos, sino también cuando se desean aplicar herramientas tecnológicas a otros ámbitos. En la siguiente sección, aunque sólo sea una pequeña muestra, exponemos algunos ejemplos de esta presencia poliedral en diversos campos.

3. Poliedros, Ciencia y Tecnología

Es evidente que las estructuras poliedrales están presentes en la naturaleza. Todos estamos familiarizados con la forma poligonal de las telarañas, con la estructura hexagonal de los paneles de abejas o la estructura poligonal que conforma la superficie de las alas y ojos de algunos insectos. También los granos de polen y las semillas de ciertas plantas tienen formas poliedrales basadas fundamentalmente en pentágonos y hexágonos, y llama la atención la belleza de seres como los radiolarios (cuyo esqueleto contribuye a la formación de sedimentos marinos) proporcionada por sus formas poliedrales, en algunos casos estrelladas, que en muchas ocasiones van encajándose para formar colonias de gran estabilidad.

Quizás no tan explícitamente, pero sí de un modo muy fuerte, donde aparece una conexión con los poliedros es en el campo de la virología, objeto de estudio de numerosos grupos de investigación en la actualidad y en el que vamos a centrarnos a continuación.

Los virus son microorganismos formados por asociaciones organizadas de macromoléculas, sólo visibles con microscopio electrónico debido a su pequeño tamaño (entre 10 y 300 nanómetros), que se caracterizan por poseer solamente un tipo de ácido nucleico, ADN o ARN, pero no ambos como ocurre en formas superiores de vida. El ácido nucleico que contiene el material genético está protegido por una capa proteica que se llama cápside, la cual está compuesta de numerosas subunidades proteicas sujetas a ciertas simetrías que determinan que la cápside adquiera una estructura poliedral, que varía de unos virus a otros, lo suficientemente eficaz como para formar un sello capaz de envolver al ácido. Ésta es la composición esencial de todos los virus, aunque algunos más complejos poseen otra envoltura exterior que contiene lípidos y azúcares ligados a las proteínas de la cápside (virus envueltos). La Figura 8 muestra a la izquierda la imagen de un virus envuelto (herpesvirus), en la que puede apreciarse difusamente la forma poliedral de la cápside que vemos con mayor detalle en la imagen de la derecha.

Por sí mismo, un virus (o más precisamente una partícula viral completa: cápside conteniendo al ácido —virion—) puede considerarse como un complejo bioquímico inerte. Depende enteramente de factores externos para poder moverse y no puede replicarse fuera de una célula viva. Cuando ha invadido una célula, el ácido nucleico del virus, que porta la información genética (genoma), dirige la maquinaria de la célula para sintetizar completamente nuevas partículas virales idénticas a la progenitora.

El estudio de los virus como ciencia es relativamente joven, con avances muy rápidos a partir de los años cincuenta en paralelo con los de la biogenética y biología molecular. Hoy en día la clasificación de los virus se hace atendiendo esencialmente a estos dos aspectos: la naturaleza de su material genético y la simetría y composición de su cápside.

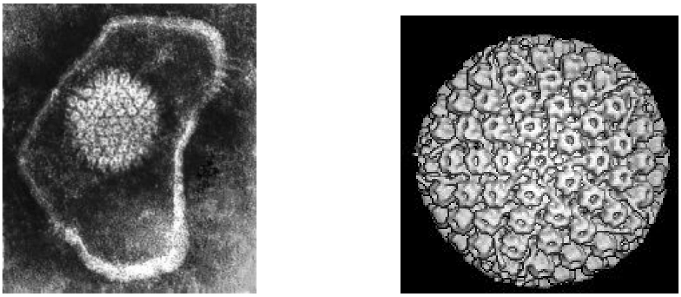


FIGURA 8. Virus herpes

Las complejas uniones de macromoléculas en el sello de un virus son maravillosas miniaturas de arquitectura molecular y los requerimientos específicos de cada virus dan como resultado una fascinante diversidad de organización y diseño geométrico en la estructura poliedral asociada. La teoría sobre la construcción de la estructura poliedral de los virus fue iniciada en 1956 por Crick y Watson y estaba basada en algunas consideraciones teóricas y un número no muy grande de evidencias experimentales posibles en aquella época; posteriormente su teoría, en términos generales, sería ampliamente confirmada y universalmente aceptada. Esencialmente, consistía en señalar que la cápside del virus adquiere una estructura poliedral que está determinada por el propio virus y que la forma más económica y «razonable» de que el genoma codifique la construcción de la cápside es que para ello utilice el mismo tipo de moléculas una y otra vez (teoría de las subunidades idénticas). Además, estas subunidades deberían empaquetarse siguiendo unas reglas de simetría geométrica de manera que conformaran un sello estable.

En principio pensaron que siempre se empaquetaban siguiendo una simetría icosaedral 5:3:2 (recordemos que el icosaedro está compuesto por veinte triángulos equiláteros y tiene seis ejes de simetría rotacional de 5 hojas que pasan por los vértices, diez ejes de 3 hojas en el centro de los triángulos y quince ejes de 2 hojas en el centro de las aristas) y señalaron que el número de subunidades debería ser un múltiplo de sesenta y que ninguna debería coincidir con un eje.

Con la introducción de las técnicas de coloreado en el microscopio electrónico (Brenner y Horne, 1959) se descubrió la forma de muchas partículas virales y se acordaron los nombres de «cápside», «capsómero» y «virion» (propuestos por Lwoff, Anderson y Jacob, 1959) para denominar respectivamente al sello proteico, a las unidades morfológicas comprendidas en él y a la partícula viral completa. Casi todas las partículas virales analizadas presentaban simetría icosaedral, pero el número de las unidades morfológicas (abultamientos que presenta la cápside) no era en general un múltiplo de sesenta y además estaban localizadas en los ejes de simetría. La aparente paradoja estructural que se presentó (los capsómeros no eran las subunidades estructurales de las que hablaban Crick y Watson) desapareció posteriormente y se fundamentó en trabajos de Horne y Wildy (1961) y de Caspar y Klug (1962), que en términos generales ratificaban la primitiva teoría de Crick y Watson, a partir de los cuales se unificó la terminología y el análisis de la estructura poliedral de los virus. Así, las «unidades de estructura» son las más pequeñas unidades de construcción de la cápside funcionalmente equivalentes y los «capsómeros» son las unidades morfológicas que pueden apreciarse en la superficie de la partícula viral y están formadas por distintas agrupaciones de unidades de estructura. El hecho de que las subunidades proteicas no se distribuyan aleatoriamente sino que se adhieran formando capsómeros es debido a que se maximizan las interacciones moleculares que estabilizan la partícula. La unión entre las subunidades adheridas en cada capsómero es más fuerte que la que se da entre unos capsómeros y otros (esto hace que puedan aislarse más fácilmente los capsómeros para posibles estudios funcionales o estructurales).

Aunque algunos presentan una estructura algo más compleja, la mayor parte de los virus corresponden a dos grupos morfológicos diferenciados: Los de simetría helicoidal y los de simetría icosaedral.

En los que presentan simetría helicoidal se observa que tienen una forma tubular hueca y en el hueco es donde se sitúa el ácido. Pero la disposición de las subunidades proteicas en la pared tubular (a excepción de los extremos) no es cilíndrica sino que van conformando una hélice (espiral) que puede ser levógira o dextrógira, cuyos radios circulares y número de unidades por giro de la hélice varía de unos virus a otros.

Los virus con simetría icosaedral (por lo que se conoce hasta la fecha, la preferida por la mayoría) tienen forma esférica y presentan siempre $60T$ subunidades de estructura formando la cápside. Se dice que T es el número de la triangulación, y toma valores de la serie $1, 3, 4, 7, 9, 12, 13, \ldots$, obtenida a partir de la fórmula $T = Pf^2$, donde f es cualquier entero positivo y P cualquier número de la serie $1, 3, 7, 13, 19, 21, \ldots$ $(= h^2 + hk + k^2$, para enteros positivos h y k coprimos). La morfología de la cápside pueden presentarse como $60T$ monómeros o presentarse como $30T$ dímeros, $20T$ trímeros o conformando $10(T-1)$ hexámeros y exactamente 12 pentámeros.

Actualmente existen técnicas de simulación que permiten reconstruir en un ordenador la forma de muchos virus. Estas imágenes virtuales facilitan el estudio geométrico de su estructura y con ello el análisis de diferentes propiedades del virus investigado. En algunas de las direcciones electrónicas que incluimos al final del trabajo existe una buena colección de imágenes de virus donde pueden observarse diferentes estructuras poliedrales, todas ellas de una enorme belleza. En la Figura 9 aparecen imágenes de dos partículas que corresponden a unas de las primeras enfermedades virales estudiadas; a la izquierda la del virus de la fiebre aftosa —Löffler, 1898— (que presenta simetría icosaedral) y a la derecha la del virus del mosaico del tabaco —A. Mayer, 1886— (que presenta simetría helicoidal). Como curiosidad, incluimos en la Figura 10 la imagen de un virus icosaedral $T = 1$ (satellite tobacco necrosis virus) cuya forma es similar a la de una de las piedras talladas del neolítico de las que se presentaba una imagen en la sección 2.

Para evaluar la importancia que tiene la determinación de la estructura poliedral de los virus hay que tener en cuenta que éstos, debido a su proceso de reproducción, están obligados a ser parásitos intracelulares; necesitan una célula hospedadora

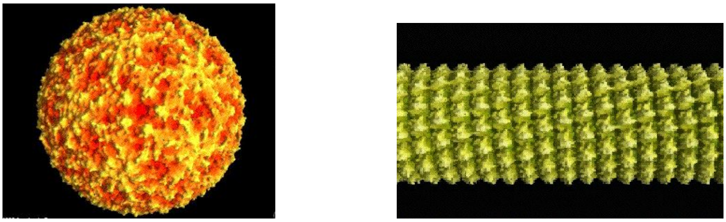


Figura 9. Fiebre aftosa y mosaico del tabaco

donde replicar su ácido nucleico y tomar la maquinaria sintética para reproducirse completamente y transmitirse a otras células. En este proceso, donde el metabolismo del organismo afectado se perturba, la cápside o poliedro proteico del virus protege a éste del exterior, pero a la vez es una parte fundamental que el organismo invadido reconoce para crear anticuerpos. Además, la morfología de la cápside con protuberancias y hendiduras, que se corresponden con la estructura poliedral, determina las zonas de mayor o menor accesibilidad para los anticuerpos que el sistema inmunológico del receptor puede crear.

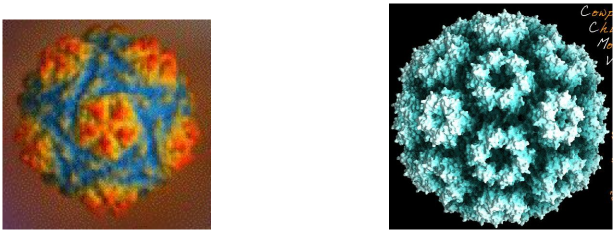


Figura 10. Virus: STNV, CCMV

En la Figura 10 aparece a la derecha la imagen de un virus denominado con las siglas CCMV (Cowpea Chlorotic Mottle Virus) al que corresponden las imágenes que mostraremos a continuación. Lo hemos elegido porque su estructura poliedral es exactamente un icosaedro truncado y puede apreciarse bien en la mencionada figura, que muestra la forma global de la partícula viral. Comentaremos muy esquemáticamente cómo se genera la estructura de este virus concreto como ejemplo que puede ilustrar lo que ocurre en general. La cápside del CCVM consta de 180 subunidades proteicas que tienen una composición química idéntica pero la proteína que las forma no adopta la misma conformación geométrica. Se distinguen de tres tipos: A, B y C. Precisamente la diferente conformación de estos tipos de subunidades determina la manera en la que se van a enlazar unas con otras para formar el sello protector del ácido. Matemáticamente, la unidad generadora de la estructura poliedral sería el trímero ABC, que se esquematiza como un triángulo dividido en tres regiones equivalentes A, B y C, coloreadas en gris oscuro o azul, gris o rojo y gris claro o verde respectivamente. Véase la Figura 11.

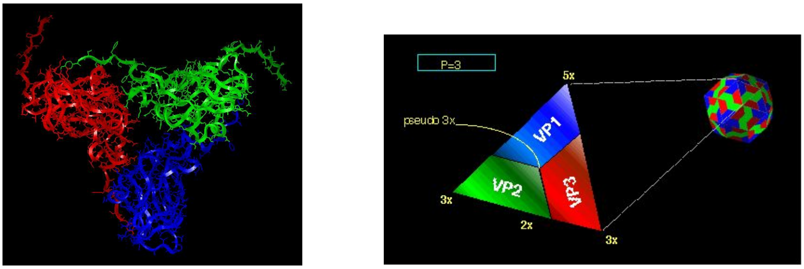


Figura 11. Trímero

A partir de esta unidad geométrica triangular puede obtenerse la estructura poliedral más básica del virus, que presenta simetría icosaedral, como se observa en la Figura 12. Ahora bien, si tenemos en cuenta la disposición de las diferentes subunidades A, B, C en esta triangulación básica, podemos notar que se forman doce pentámeros, cada uno con cinco subunidades A, y veinte hexámeros, cada uno con tres subunidades B alternándose con tres subunidades C. Véanse las Figuras 12, 13.

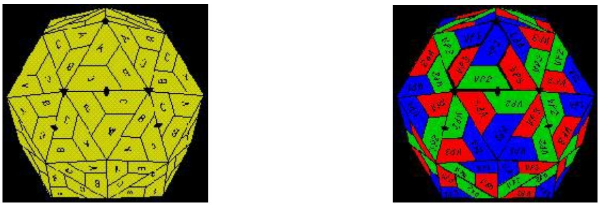


Figura 12. Estructura geométrica básica

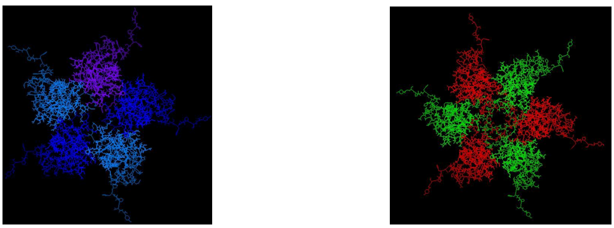
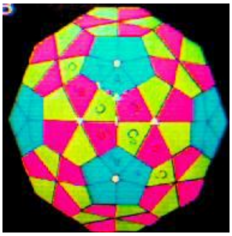


Figura 13. Pentámeros y hexámeros

Aparece de este modo una estructura poliedral más fina, en el sentido de que describe más exactamente la conformación final de la cápside viral a partir de las subunidades elementales. En la Figura 14 se ve a la izquierda el esquema del poliedro final (icosaedro truncado) y a la derecha la silueta de éste sobre la imagen del virus.

Muchos de los trabajos sobre virus que hemos analizado contienen, cuando es posible, la representación de la unidad geométrica estructural y el tipo de simetría



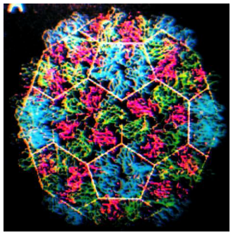
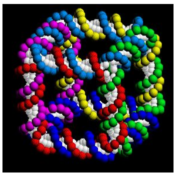


Figura 14. Pentámeros y hexámeros

que experimenta para formar el sello (mapa topográfico); esto determina la disposición de las subunidades proteicas y con ello la forma poliedral final del virus. Por otra parte, el ácido envuelto por la cápside de los virus, que se presenta como una madeja filamentosa de una o más hebras, es susceptible de ser estudiado con técnicas topológico-geométricas, fundamentalmente teoría de nudos. Véase la Figura 15. Existen actualmente trabajos en este sentido encaminados al análisis de los anudamientos o enlaces topológicos que presenta un ácido viral (u otro tipo de ácido genético) y sus posibles modificaciones en fenómenos de replicación o en experimentos de manipulación genética. Así, en el estudio matemático de los virus se suelen considerar dos estructuras poliedrales: la externa (poliedro de la cápside) y la interna (grafo del ácido) que pueden ser analizadas geométrica y topológicamente.



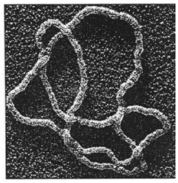


Figura 15. Anudamientos del ADN

La difusión de los virus en la naturaleza es enorme. Si tenemos en cuenta que numerosas enfermedades del hombre (desde el resfriado común y la gripe hasta ciertas meningitis, hepatitis, sida, algunos cánceres, etc) son causados por virus y que lo mismo ocurre con los animales y las plantas, no es extraño que Peter B. Medawar, Premio Nobel de Medicina en 1960, definiera de modo rápido a los virus así: «Una mala noticia envuelta en proteínas». Esta definición, avalada a diario en cualquier consulta médica o en los medios de comunicación, recoge el aspecto negativo que en general tienen los virus y motiva el interés por su conocimiento completo con vistas al control y curación de enfermedades causadas por ellos; pero no aborda sin embargo el aspecto positivo que en ciertos ámbitos tienen. Por ejemplo, la gran cantidad de colorido que desde el siglo XVI ofrecieron los tulipanes holandeses se debió a una enfermedad vírica; y, en otro sentido, el hecho de que numerosas enfermedades virales afecten a insectos (un número grande de ellas se recoge precisamente bajo el nombre genérico de «poliedrosis») de forma muy selectiva, o, que para algunas actúen como vector de transmisión, está abriendo el campo para su utilización como agentes naturales de control biológico. Es tan amplia la influencia de los virus que justifica que este campo de investigación sea uno de los más interesantes y pujantes en la actualidad y que en él aparezcan estudios relativos a la estructura poliedral asociada a los virus analizados, pieza importante para su conocimiento. Además estos trabajos involucran a disciplinas tan diversas como matemáticas, informática, biología, química, medicina, veterinaria, ecología, ciencias agrícolas y forestales o economía.

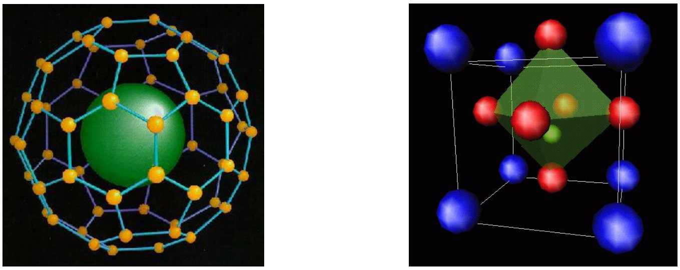


Figura 16. Fullereno C60 y perovskita ABX3

En la naturaleza aparecen también estructuras poliedrales (algunas de las cuales son poliedros regulares) como cristales de diversas sustancias. Por ejemplo, el cubo aparece en los cristales de sal común, el tetraedro en los del sodio sulfantimoniato, el octaedro en los del alumbre de cromo, y el dodecaedro (no del todo regular) en los de la pirita. Es por ello que los poliedros se han utilizado siempre en temas cristalográficos relacionados fundamentalmente con la geología y la química.

Hoy en día, además de lo señalado anteriormente en el caso de los virus, muchas investigaciones abordan el estudio de estructuras poliedrales que aparecen en los campos de la biología y química moleculares y de la física nuclear. Las propiedades de estas estructuras poliedrales están relacionadas con las de los materiales analizados. Por ejemplo, la dureza y las propiedades magnéticas, aislantes o conductoras están directamente relacionadas con la estructura poliedral de las moléculas y substancias consideradas. Y en el análisis de las posibles estructuras poliedrales asociadas a los materiales, los invariantes algebraicos y geométricos pueden clarificar algunas propiedades químicas o físicas de éstos.

Empezaremos analizando, en el campo de la química, las estructuras poliedrales más sencillas. Una de las más simples es la de grafo, es decir, un poliedro o complejo celular unidimensional. Su uso es frecuente en el estudio del fenómenos moleculares; por ejemplo, se puede asociar un vértice con cada átomo y una arista con cada enlace (no importando la clase de enlace considerado). Con esta estructura, cada molécula estable determina un grafo conexo. Es fácil comprender la estrecha relación que existe entre la familia de los grafos finitos y conexos, módulo isomorfismo, y las posibles estructuras moleculares. En el caso en el que la estabilidad se alcance con un gran número de átomos, el uso de grafos infinitos puede modelar mejor la estructura poliedral de la substancia analizada.

Sin embargo, es posible asociar a cada molécula o substancia estructuras poliedrales más complejas. Por ejemplo, cada elemento químico determina un subconjunto de vértices; o bien un tipo de enlaces, digamos enlaces covalentes dobles, determina unas aristas que definen un subpoliedro. Por otro lado, a algunos ciclos generados por sucesiones alternadas de átomos y enlaces que finalicen en el átomo inicial de la sucesión, se les pueden asociar caras de dimensión dos. También se pueden asociar caras mediante otros criterios; por ejemplo, considerando átomos de un mismo elemento próximos entre sí que sean coplanarios y que determinen un polígono convexo. Del mismo modo, existen partes de una molécula o de una substancia que tienen una estructura fija, la cual determina un grupo funcional al que a su vez se le puede asociar un subpoliedro.

Una vez establecidos los criterios para asociar una estructura poliedral a una molécula o a una substancia, se tiene que algunas de las propiedades quedan reflejadas en la estructura poliedral asociada y, en general, ésta puede ser más compleja que un solo poliedro y contener subpoliedros asociados con grupos funcionales determinados. En muchas ocasiones la estructura poliedral correspondiente está inmersa en el espacio euclídeo, lo que permite, estudiando sus grupos de simetría, analizar diversas cuestiones como por ejemplo la estructura de los empaquetados de los átomos y moléculas. La disposición ordenada de cationes y aniones está relacionada con las propiedades magnéticas de la substancia considerada. La disposición de los enlaces en varias capas planas o en redes espaciales tiene que ver con la dureza del material considerado.

Otro aspecto interesante es el de la isomería, es decir, aquellos fenómenos asociados con substancias que tienen esencialmente los mismos componentes pero éstos admiten distintas disposiciones geométricas, lo que puede originar diferentes propiedades. Por ejemplo, dos núcleos con igual masa y número atómico pueden presentar distintas propiedades, a causa de una estructuración diferente de sus componentes.

Actualmente existen herramientas que permiten desvelar la estructura poliedral de muchas substancias. Se dispone de diferentes tipos de rayos, aceleradores, microscopios electrónicos, reactores nucleares y otras técnicas de tipo físico o químico.

De modo general señalaremos que en la estructura poliedral intervienen decisivamente el tamaño de los átomos y de los cationes y aniones y el tipo y capacidad de enlace que tengan los elementos que forman la substancia a analizar. Además, a veces es interesante tener en cuenta que el tamaño y tipo de enlaces puede ser modificado por la temperatura, presión u otros factores que afecten al material considerado.

Por ejemplo, el grupo de las perovskitas tiene fórmula general ABX3, donde A y B son cationes y X es un anión (generalmente oxígeno), véase la Figura 16. Los cationes de tipo A ocupan los vértices de una teselación cúbica del 3-espacio euclídeo. Los baricentros de estos cubos están ocupados por cationes de tipo B. Obsérvese que cuando el número N de cationes B es muy elevado, puesto que cada vértice es compartido por ocho cubos, se tiene que el número de cationes de tipo A es $N\frac{8}{8}$. Considerando que el cubo tiene seis caras y cada cara es compartida por dos cubos, el número de caras será de $N\frac{6}{2}$. Esta disposición de los vértices y caras de la teselación cúbica es totalmente coherente con la fórmula general de la perovskita $N(A\frac{8}{8}BX\frac{6}{2})$. Cuando los radios de los cationes y los aniones lo permiten, los aniones X se sitúan en los centros de las caras; de este modo, en cada cubo éstos expanden un octaedro cuyos vértices son de tipo X, de modo que en su interior está contenido un catión B.

Son muy interesantes los siguientes fenómenos determinados por las leyes naturales de los empaquetamientos. Si los cationes de tipo A son de radio grande, no es posible que los planos que contienen cationes de este tipo contengan simultáneamente aniones de tipo X; se producen entonces traslaciones horizontales y verticales que desplazan los aniones de los centros de las caras, generándose planos alternados de cationes y aniones que determinan una polarización magnética de la perovskita analizada. Una substancia magnéticamente estable sometida a un cambio de temperatura puede cambiar sus propiedades magnéticas si se producen estos desplazamientos de los aniones que abandonan los centros de las caras. En cambio, cuando los cationes de tipo A son pequeños, el octaedro interno puede girar un poco, lo que permite alcanzar un equilibrio magnético.

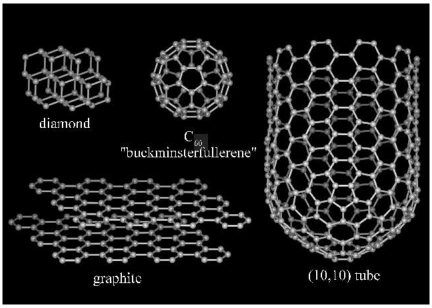


Figura 17. Fullerenos

Una reciente rama de la química, especialmente rica en investigación y en la que el uso de técnicas poliedrales es muy amplio, es la de los fullerenos. Este campo se inició con el descubrimiento en 1985 de la molécula C60, que fue bautizada con el nombre de buckminsterfullereno, y abreviadamente se le llama fullereno, en honor del arquitecto R. B. Fuller. Véase la Figura 16. Esta molécula consiste en 60 átomos de carbono unidos mediante doce pentágonos y veinte hexágonos. Su forma es la misma que la de un balón de fútbol y aproximadamente su tamaño es al del balón como el de éste es al de la Tierra; en este caso la estructura poliedral es muy simple, en el sentido de que consta de un solo poliedro que es un icosaedro truncado.

La molécula C60, llamada por muchos «la más bella molécula», fue descubierta por los investigadores H. W. Kroto, R. E. Smalley y R. F. Curl en 1985 cuando hacían estudios sobre la composición química de las estrellas. Al analizar las imágenes obtenidas por los telescopios de los observatorios astronómicos, ellos sospechaban, al igual que otros científicos, que tal composición tenía que ver con largas cadenas de moléculas de carbono. En lugar de obtenerlas por simulación mediante experimentos con técnicas convencionales, los investigadores señalados decidieron pasar un haz de láser sobre el vapor de carbono; al hacerlo, no sólo aparecieron las cadenas de moléculas que esperaban, sino que observaron que éstas tenían una forma poliédrica totalmente inesperada, como la de un balón de fútbol. Así se descubrió el C60. Estas moléculas de C60 se condensan en una forma nueva de carbono sólido, una forma cristalina de carbono puro diferente de los conocidos diamante o grafito.

Aunque inicialmente el C60 sólo podía producirse en muy pequeñas cantidades, lo cual restringía su uso para otros experimentos, W. Krätschen, L. Lamb, K. Fostiropoulos y D. Huffman descubrieron en 1990 el modo de producirlo en mucha mayor cantidad, lo que abrió nuevas posibilidades para las investigaciones experimentales.

El descubrimiento del C60, hecho por el cual sus descubridores recibieron el Premio Nobel de Química en 1996, ha sido el inicio de un periodo de gran actividad en la química de los llamados fullerenos (compuestos de moléculas de carbono formadas con diferente número de átomos que generan estructuras poliedrales con caras pentagonales, hexagonales o incluso heptagonales). Posteriormente también se han sintetizado otros muchos fullerenos: C70, C76, C78, C82, C84, etc. Muchos trabajos se centran en los fullerenos debido a que al añadirles ciertos átomos alcalinos se obtienen compuestos superconductores eléctricos.

Actualmente hay abierto un nuevo campo de investigación que permite el estudio de los posibles fullerenos a través de herramientas matemáticas tales como la teoría de grafos, poliedros, topología algebraica, teoría de grupos y geometría diferencial; en este sentido, existe una importante relación entre la clase de superficies orientadas y conexas regulares con caras pentagonales, hexagonales y heptagonales, módulo isomorfismos poliedrales, y los posibles compuestos de carbono puro del tipo anterior.

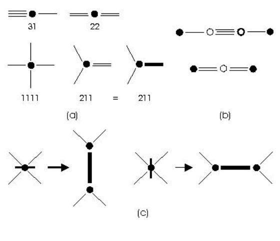


FIGURA 18. Posibles enlaces del carbono

Del carácter tetravalente del carbono C resultan cuatro posibles situaciones de un vértice que denotaremos por 31, 22, 211 y 1111 (Figura 18). Es habitual asociar a cada compuesto puro de carbono un grafo de modo que los carbonos se corresponden con los vértices y los enlaces con las aristas. La situación 31 se puede obtener considerando grafos lineales o en forma de circunferencia en los que se van alternado el enlace triple y el enlace sencillo. El enlace 22 también genera cadenas lineales o circulares en las que alternan átomo y doble enlace. En la mayoría de los fullerenos todos los enlaces son del tipo 211; en consecuencia, sus grafos asociados tienen la propiedad de que cada vértice incide con tres aristas (grafos 3-regulares). No obstante, a cada fullereno se le pueden asociar estructuras poliedrales más complejas; es frecuente añadir una cara por cada grupo de vértices y aristas que determinan un polígono plano convexo. De este modo, cada compuesto del carbono con enlaces de tipo 211 tiene asociada una superficie. Estas superficies se pueden agrupar por capas o a través de empaquetamientos.

En los grafos 3-regulares se pueden distinguir los enlaces dobles coloreando la familia de aristas que se corresponden con los mismos. También es frecuente utilizar la relación que existe entre grafos 3-regulares y grafos 4-regulares. Nótese que si en un grafo 3-regular con aristas coloreadas, se deforma cada arista coloreada a un punto, se obtiene un grafo 4-regular. Recíprocamente, si a un grafo 4-regular le aplicamos un proceso de bifurcación en cada vértice como se señala en la Figura 18 se obtiene un grafo 3-regular con aristas coloreadas.

Es interesante señalar que a cada grafo 3-regular se le puede asociar su grupo de isometrías y, si se tienen aristas coloreadas (enlaces dobles), tomar entonces el subgrupo de aquéllas que las preservan. De este modo a cada grafo con aristas coloreadas le hemos asociado una pareja de grupos. Observemos que si en el mismo grafo 3-regular cambiamos de familia de aristas coloreadas (es decir, consideramos dos isómeros) puede suceder que el subgrupo asociado sea distinto. Sin embargo, existen ejemplos de grafos 3-regulares con aristas coloreadas que son distintos y tienen asociada la misma pareja de grupos de simetría; en este caso, se puede diseñar una herramienta matemática más fina capaz de distinguir estos isómeros. Se procede del modo siguiente: cambiando cada enlace doble por un cruce elevado de caminos, podemos asociar a cada fullereno con enlaces químicos dobles un enlace o nudo topológico susceptible de ser estudiado con técnicas homotópicas. Véase la Figura 19. Las diferentes posibles posiciones de los dobles enlaces químicos determinan enlaces topológicos distintos y la clasificación de estos isómeros se aborda a través de los invariantes homotópicos del enlace o nudo topológico asociado. Utilizando el grupo fundamental del complemento del enlace o sus invariantes de tipo polinómico se pueden distinguir isómeros con grupos de simetría iguales.

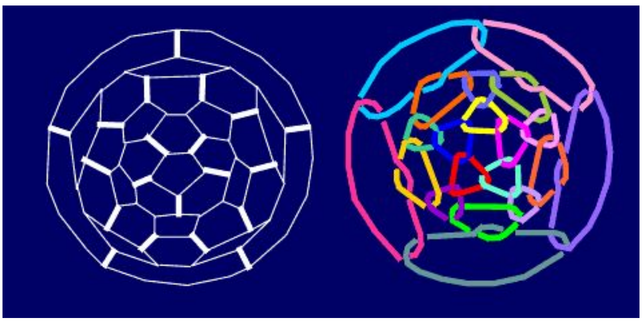


Figura 19. Enlace topológico de un fullereno

En el caso en el que las moléculas estables adquieran forma de superficie, es también importante la disposición que puedan presentar estos enlaces. En algunos casos las caras se unen entre sí para formar superficies con curvatura gaussiana de diferentes signos; en el caso de los grafitos se suelen presentar superficies planas. Se ha observado que por lo general las caras pentagonales corresponden a zonas de curvatura positiva, las hexagonales se relacionan con curvatura cero, y las heptagonales con curvatura negativa.

En la Figura 20 puede verse a la izquierda la superficie de un fullereno contenida en el plano hiperbólico y a la derecha la de un fullereno contenido en un toro en la que se observa claramente cómo las caras pentagonales, hexagonales y heptagonales se distribuyen en zonas con curvatura gaussiana positiva, nula o negativa respectivamente.

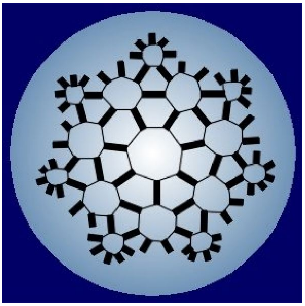
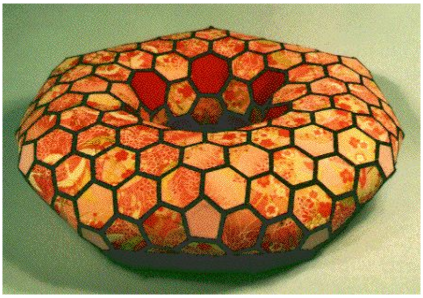



Figura 20. Fullerenos: heptagonal y tórico

Los ejemplos mencionados son una muestra de los cada día más abundantes trabajos de investigación en los que se emplean técnicas matemáticas relacionadas con las estructuras poliedrales asociadas a las moléculas y substancias, tanto para descubrir propiedades de las ya sintetizadas, como para la predicción de otras nuevas.


Figura 21. Fuller en su laboratorio y pabellón USA

Si lo expuesto anteriormente muestra de alguna forma cómo los poliedros están muy presentes, aunque de un modo oculto a veces, en las ciencias mencionadas, es evidente su presencia e importancia en otros campos más próximos a la mayoría de las personas. Por ejemplo, en el diseño industrial las propiedades de estructuras poliedrales han de tenerse en cuenta tanto para la fabricación, empaquetado, almacenaje o economía. Quizás aún es más evidente esto en el diseño arquitectónico, desde los edificios y poblados más sencillos hasta las edificaciones y ciudades más sofisticados, y no es una simple anécdota el hecho de que la molécula C60, cuyo descubrimiento ha supuesto un verdadero avance en campos científicos importantes, recibiera el nombre de fullereno precisamente en honor del arquitecto Richard Buckminster Fuller (1895–1983). Véase la Figura 21.

La belleza poliedral del C60 les recordaba a sus descubridores la de las famosas «cúpulas geodésicas» diseñadas por Fuller. Siguiendo la pauta de que una esfera es realmente eficiente pues encierra el mayor volumen con la menor superficie y que las geodésicas en una superficie son las curvas de menor longitud entre dos puntos, las edificaciones geodésicas que diseña Fuller adquieren su estructura poliedral a partir de piezas básicas que van encajándose de modo que se obtenga la máxima ventaja estructural y ambiental con un coste reducido. Una muestra de esto es el Pabellón de los Estados Unidos en la Expo 67 de Montreal, que puede verse en la Figura 21. Fuller no sólo ha sido un famoso arquitecto del siglo XX, sino un hombre de espíritu renacentista con obras de ingeniería y diseño en campos tan diversos como el industrial, espacial, automovilístico o cartográfico. Procuró difundir las ideas humanísticas y ecológicas que impregnan su obra a través de múltiples conferencias por todo el mundo, por lo que llegó a ser un personaje controvertido, idolatrado por muchos y denostado por otros, pero con una influencia incuestionable.

Figura 22. Diseños de Fuller

Por último vamos a referirnos, aunque sea muy brevemente, a la presencia de los poliedros en el ámbito de las Matemáticas, donde, si bien su estudio se ha hecho inicialmente, como el de la mayoría de los temas antiguos, dentro del campo de la Geometría, estos objetos aparecen hoy en día en diversas áreas, abordando su análisis con las diferentes herramientas que ellas ofrecen o utilizándolos como soporte para la resolución de otros problemas específicos.

Como hemos señalado al inicio de este trabajo, desde muy antiguo han llamado la atención las figuras poligonales o poliedrales que presentaban algún tipo de regularidad y los matemáticos han intentado dar respuesta a diferentes cuestiones tales como la existencia y construcción de estos objetos.

Cualquier polígono regular puede imaginarse como el resultado de dividir una circunferencia en n partes iguales ($n \geq 3$) y tomar alternativamente los puntos de división obtenidos de p en p, siendo p cualquier primo con n menor que $\frac{n}{2}$ (se dice que n es el género y p la especie del polígono). En el que caso en el que $p = 1$

se obtiene un polígono convexo y en otro caso uno estrellado. El número total de polígonos regulares de género n es $\frac{N}{2}$ donde N es el indicador de n. Respecto a la posibilidad de construir con regla y compás los polígonos regulares, Euclides, en sus Elementos, dio la del triángulo equilátero en el Libro I (Prop. 1) y la del cuadrado, pentágono, hexágono y uno de quince lados en el Libro IV (Prop. 6, 11, 15 y 16 respectivamente); y la Proposición 9 del Libro I garantiza la duplicación sucesiva del número de lados por bisección. El problema abierto de la construcción con regla y compás del resto de polígonos regulares fue parcialmente resuelto por Gauss (quien construyó a los diecinueve años uno de diecisiete lados) afirmando que es condición suficiente que los factores primos impares de n sean primos de Fermat diferentes entre sí (un número de Fermat tiene la forma $F_k = 2^{2^k} + 1$). En 1837, Wantzel probó que también la anterior condición es necesaria.

En el caso de los poliedros el grado de regularidad viene dado por la forma, número y disposición de caras y vértices. Se dice que dos vértices de un poliedro son idénticos si ambos están rodeados por el mismo número y tipo de caras y en el mismo orden. Si todos los vértices son idénticos y además todas las caras son polígonos regulares iguales se dice que el poliedro es regular. Desde muy antiguo se conocía que existen solamente cinco poliedros regulares convexos, los famosos Sólidos Platónicos. Respecto a la existencia de poliedros regulares no convexos, Kepler [20] describió dos: el pequeño y el gran dodecaedro estrellados; y Louis Poinsot en 1809 redescubrió los anteriores y descubrió otros dos: el gran dodecaedro y el gran icosaedro. Cauchy, en 1813, demostró que los cuatro anteriores son todos los posibles poliedros regulares estrellados.

Rebajando la exigencia de regularidad, dentro de los poliedros convexos, reciben el nombre de Sólidos Arquimedianos o Semirregulares aquellos cuyos vértices son idénticos y las caras son polígonos regulares de dos o más tipos diferentes, excluyendo las familias infinitas de los prismas y los antiprismas. Kepler se ocupó especialmente de este tipo de poliedros, entre los que se encuentra el notable icosaedro truncado. En 1619 dio la lista, demostrando que era completa, de los 13 sólidos de este tipo que existen, aunque 12 de ellos ya habían sido redescubiertos por distintos artistas del Renacimiento. Se les llama Arquimedianos porque se sabe que fueron estudiados por Arquímedes, aunque sus trabajos originales están perdidos. Se llama dual de un poliedro dado a un nuevo poliedro en el que las caras y vértices corresponden respectivamente a vértices y caras del original. Los poliedros duales de los Arquimedianos se llaman Sólidos de Catalan [2], que fue quien los descubrió en 1865; obviamente hay 13 y sus caras no son polígonos regulares.

Continuando con la idea de caras regulares y vértices idénticos, pero admitiendo la posibilidad de caras que sean polígonos no convexos, se obtienen los Poliedros Uniformes. En 1954 Coxeter [7] conjeturó, y fue posteriormente probado por Skilling [24], que hay 75 (sin contar prismas ni antiprismas).

Si nos restringimos a poliedros convexos y nos preguntamos cuántos hay que tengan las caras regulares, además de los Sólidos Platónicos, los Arquimedianos, y las familias infinitas de prismas y antiprismas, la respuesta es que hay 92 más, los cuales reciben el nombre de Sólidos de Johnson [18], quien en 1966 dio la lista y además conjeturó que era completa, lo que fue probado en 1969 por Zalgaller [28].

Los ejemplos anteriores determinan diferentes triangulaciones en una esfera topológica. En la sección 2 aparecía la figura de una superficie tórica descompuesta en polígonos; del mismo modo, numerosos espacios (algunas variedades, variedades con singularidades, etc.) admiten descomposiciones (triangulaciones) en piezas más sencillas de dimensiones adecuadas. La generalización de estas ideas da lugar a diversas nociones geométricas, topológicas y algebraicas, que genéricamente pueden denominarse «estructuras poliedrales» o «poliedros», como son los complejos simpliciales, complejos de celdas, conjuntos simpliciales, etc.

Dentro del área de la Topología Algebraica, en la que concretamente se enmarca nuestra actividad, las estructuras poliedrales juegan un importante papel. Desde las más rígidamente geométricas, han sido la fuente de inspiración para la creación de teorías de homotopía y homología que después han sido diversificadas, generalizadas o sintetizadas con el objetivo de obtener mecanismos para poder estudiar espacios susceptibles o no de admitir estructuras poliedrales generales más o menos rígidas, como hemos visto que ocurre por ejemplo con el caso de los fullerenos mencionados anteriormente.

Señalemos que si esta estructura poliedral sólo contiene un número finito de piezas básicas, el espacio descrito por ella es compacto; así que si se desea estudiar espacios no compactos, en los que uno puede imaginar escapes hacia el infinito de una o muchas maneras, entonces las estructuras poliedrales llamadas clásicas deben estar hechas de infinitas piezas, lo cual puede ser un obstáculo a la hora de aplicar técnicas computacionales. Dentro de este último marco, estudio de los espacios no compactos, concretamente en el de la Teoría de Homotopía Propia (del que una visión panorámica puede encontrarse en [17]), se halla parte de nuestra labor de investigación, y en particular algunos trabajos donde proponemos nuevas estructuras poliedrales que incluyen piezas básicas diferentes a las habituales con el fin de obtener posibles descripciones de espacios no compactos con un número finito de piezas.

Por otra parte, también han tenido un fuerte desarrollo los trabajos de programación encaminados a la representación de espacios y al cálculo de invariantes topológicos asociados a estructuras poliedrales que los describen o aproximan. Es un hecho cada vez más frecuente trabajar con técnicas de simulación sobre diferentes fenómenos físicos celulares o moleculares, donde se utilizan formas geométricas iniciales muy sencillas que van adquiriendo mayor complejidad estructural a medida que se avanza en la aproximación al fenómeno real simulado.

Nos gustaría que lo expuesto anteriormente, aunque sólo sea una pequeña muestra, pueda servir para ilustrar hasta qué punto los poliedros están próximos a nosotros y continúan siendo unos objetos matemáticos fascinantes sobre los que merece la pena seguir avanzando en su estudio y utilización.

Terminamos recordando las palabras de Galileo Galilei:

«*… La filosofía (naturaleza) está escrita en ese gran libro que siempre está ante nuestros ojos —el universo— pero no lo podemos entender si no aprendemos primero el lenguaje y comprendemos los símbolos en los que está escrito. El libro está escrito en lenguaje matemático y sus símbolos son triángulos, círculos y otras* *figuras geométricas, sin cuya ayuda es imposible comprender una sola palabra; sin ello uno vaga sin esperanza en un oscuro laberinto . . .»*

4. Enlaces con páginas web

A continuación, mostramos una relación de páginas web relacionadas con los temas tratados en este artículo. Varias de las páginas que citamos requieren una adecuada configuración del navegador de Internet y tener instaladas las correspondientes aplicaciones de ayuda.

- `http://www.georgehart.com/` Una de las mejores páginas de poliedros, elaborada por George W. Hart; además contiene muchos enlaces interesantes.
- `http://archives.math.utk.edu/topics/geometry.html` Contiene mucha información sobre diversos tópicos de geometría y numerosos enlaces.
- `http://www.bocklabs.wisc.edu/cgi-bin/WebCatalog.cgi` Institute for Molecular Virology, Madison, Wisconsin.
- `http://www.bocklabs.wisc.edu/virusviztop.html` Otra página del instituto anterior, con visualizaciones de virus e interesantes enlaces.
- `http://www.uct.ac.za/depts/mmi/stannard/linda.html` Página de la Universidad de Cape Town, División de Microbiología Médica y Virología, dedicada a la arquitectura de los virus.
- `http://www.tulane.edu/~dmsander/garryfavweb.html` Toda la virología en la WWW. Página de la Universidad de Tulane, Nueva Orleans, sobre virología en internet.
- `http://www.tulane.edu/~dmsander/WWW/335/335Structure.html` Estudio de la estructura de los virus.
- `http://phage.bocklabs.wisc.edu/` Página del Instituto de Virología Molecular de la Universidad de Wisconsin que contiene imágenes de DNA de virus.
- `http://www.tiem.utk.edu/~gross/bioed/webmodules/DNAknot.html` Página dedicada al DNA y la teoría de nudos.
- `http://www.cs.ubc.ca/nest/imager/contributions/scharein/KnotPlot.html` Página de nudos y enlaces topológicos.
- `http://www.ill.fr/dif/3D-crystall/index.html` Página dedicada a la estructura atómica de los materiales.
- `http://www.members.tripod.com/~modularity/` Artículo de S. Jablan sobre la geometría de los fullerenos.
- `http://www.mpi-stuttgart.mpg.de/andersen/fullerene/intro.html` Página del Max-Planck-Institute, Stuttgart, que dedica parte de su investigación al estudio de fullerenos.
- `http://neon.mems.cmu.edu/bucky/other-refs.html` Contiene numerosos enlaces y referencias sobre fullerenos.
- `http://www.univie.ac.at/spectroscopy/forschung.html` Página de la Universidad de Viena que contiene abundante información sobre fullerenos y enlaces interesantes.

- `http://www.susx.ac.uk/Users/kroto/` Página del grupo de investigación en fullerenos del Profesor H. Kroto de la Universidad de Sussex.
- `http://www.ornl.gov/ORNLReview/rev26-2/text/rndmain1.html` Información y películas cortas sobre fullerenos.
- `http://cnst.rice.edu/reshome.html` Página del Profesor R. E. Smalley (Rice University).
- `http://www.pa.msu.edu/cmp/csc/nanotube.html` Sitio de nanotubos.
- `http://www.bfi.org/` Página del Buckminster Fuller Institute.
- `http://www.thirteen.org/cgi-bin/bucky-bin/bucky.cgi` Página que contiene numerosa información sobre Fuller e imágenes de sus obras.

Concluimos dando la siguiente dirección, desde la que se puede descargar una versión en formato `pdf`, y en color, de este artículo:

- `http://www.unirioja.es/dptos/dmc/luhernan/index.html`

Referencias

[1] J. Buerger, *Elementary crystallography*, Wiley, 1956. (Republicación: MIT press, 1978.)

[2] M. E. Catalan, Memoire sur la theorie des polyedres, *J. de L'Ecole Im. Poly.* **24** (1865), 1–71.

[3] A. F. Costa, *Arabescos y geometría*, vídeo, UNED, Madrid, 1995.

[4] H. S. M. Coxeter, *Regular polytopes*, Dover, Nueva York, 1963.

[5] H. S. M. Coxeter, *Fundamentos de geometría*, Limusa-Wiley, México, 1971.

[6] H. S. M. Coxeter, *Regular complex polytopes*, Cambridge University Press, 1974.

[7] H. S. M. Coxeter, M. S. Longuet-Higgins y J. C. P. Miller, Uniform Polyhedra, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **246** (1953), 401–449.

[8] P. R. Cromwell, *Polyhedra*, Cambridge University Press, 1997.

[9] R. H. Crowell y R. H. Fox, *Introduction to knot theory*, GTM **57**, Springer, 1963.

[10] M. S. Dresselhaus, G. Dresselhaus y P. Eklund, *Science of fullerenes and carbon nanotubes*, Academic Press, 1996.

[11] B. Ernst, *El espejo mágico de M. C. Escher*, Greven, Taschen, 1994.

[12] Euclides, *The thirteen books of Euclid's Elements*, recopilación en 3 volúmenes (con traducción, introducción y comentarios de Thomas L. Heath), Dover, 1956.

[13] E. Flapan, *When topology meets chemistry*, Cambridge University Press, Cambridge; Mathematical Association of America, Washington, DC, 2000.

[14] J. V. Field, Rediscovering the Archimedean polyhedra: Piero della Francesca, Luca Pacioli, Leonardo da Vinci, Albrecht Durer, Daniele Barbaro, and Johannes Kepler, *Arch. Hist. Exact Sci.* **50** (1966), 241–289.

[15] N. D. Gilbert, T. Porter, *Knots and surfaces*, Oxford University Press, Oxford, 1994.

[16] G. H. Hardy, *Apología de un matemático*, Nivola, Madrid, 1999.

[17] I. M. James (Editor), *Handbook of algebraic topology*, North Holland, 1995.

[18] N. W. Johnson, Convex solids with regular faces, *Canad. J. Math.* **18** (1966), 169–200.

[19] J. Kepler, *Mysterium Cosmographicum*, 1596.

[20] J. Kepler, *The harmony of the world*, 1619 (traducido al inglés por E. J. Aiton, A. M. Duncan y J. V. Field, American Philosophical Society, 1997).

[21] C. R. F. Maunder, *Algebraic topology*, Van Nostrand, 1970.

[22] L. Pacioli, *De Divine Proportione*, 1509.

[23] Platón, *Diálogos, v. 6*, Biblioteca Básica Gredos, Madrid, 1982.

[24] J. Skilling, The complete set of uniform polyhedra, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **278** (1975), 111–135.

[25] E. W. Weisstein, *CRC concise encyclopedia of mathematics*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.

[26] G. W. Whitehead, *Elements of homotopy theory*, GTM **61**, Springer, 1978.
[27] J. H. C. Whitehead, Combinatorial homotopy I, II, *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 213–245; 453–496.
[28] V. A. Zalgaller, *Convex polyhedra with regular faces*, Consultants Bureau, 1969.

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, 26004 Logroño, Spain

Correo electrónico: jose-ignacio.extremiana@dmc.unirioja.es, luis-javier.hernandez@dmc.unirioja.es, maria-teresa.rivas@dmc.unirioja.es