MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

EL FRACTAL DE CHICHO

MANUEL BENITO, JOSÉ M. GUTIÉRREZ Y VÍCTOR LANCHARES

Abstract. The aim of this communication is to present some properties of a fractal object Chicho was thinking about. The fractal is obtained by iteration of a complex function that defines an iterative process which is an implicit version of that generates the well-known Mandelbrot set.

Introducción

El estudio de los procesos iterativos que derivan de la aplicación sucesiva de una función en el plano complejo se enmarca dentro de lo que denominamos sistemas dinámicos discretos [2]. El objetivo principal es entender, para cada punto, el comportamiento a largo plazo del proceso iterativo. De esta forma, si T es una cierta función de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, se pretende entender cuál es el comportamiento de la sucesión $\{T^n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ para cada $z \in \mathbb{C}$, que se denomina órbita de z por T. A partir de aquí llegamos a lo que se denomina conjunto de Julia: el subconjunto de puntos z de $\mathbb{C}$ para los cuales la órbita de z por T está acotada [6].

Los conjuntos de Julia son sorprendentemente complejos incluso para funciones relativamente simples como son las cuadráticas. Es precisamente la familia de funciones cuadráticas $Q_c(z) = z^2 + c$ con $c \in \mathbb{C}$ la que ha dado lugar a numerosos trabajos de investigación [1], [5], [9], y a partir de la cual surge el conocido conjunto de Mandelbrot [4], [7], [8]. Se denomina conjunto de Mandelbrot, $\mathcal{M}$, al subconjunto de $\mathbb{C}$ formado por los números c para los cuales la órbita de 0 por Q_c está acotada, es decir, la sucesión $\{Q_c^n(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada. Además $\mathcal{M}$ es el conjunto de puntos $c \in \mathbb{C}$ para los cuales el correspondiente conjunto de Julia es conexo.

Si escribimos $z = x + iy$ y $c = a + ib$, la sucesión de puntos $\{Q_c^n(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ viene dada en forma recursiva por

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a, \qquad y_{n+1} = 2x_n y_n + b, \qquad x_0 = y_0 = 0. \tag{1}$$

Para la misma se conocen numerosas propiedades, entre las cuales destaca la de que la sucesión es acotada sólo si $|c| \le 2$, o lo que es lo mismo, el conjunto de Mandelbrot se encuentra dentro del disco de centro el origen y radio 2.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 37F45.

Key words and phrases. Mandelbrot set, iteration of functions, fractal images.

El primer autor disfruta, durante el curso 2000–01, de una licencia de estudios otorgada por la Consejería de Educación, Cultura, Juventud y Deportes del Gobierno de La Rioja.

El segundo autor agradece la financiación recibida a través del proyecto DGES PB98-0198.

El tercer autor agradece la financiación recibida a través del proyecto DGES PB98-1576.

Consideremos ahora la siguiente variante implícita de la sucesión (1) propuesta por Chicho y uno de los autores en un reciente trabajo [3]:

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a, \qquad y_{n+1} = 2x_{n+1}y_n + b, \qquad x_0 = y_0 = 0. \tag{2}$$

La sucesión (2) corresponde a la función

$$T_{a+ib}(x+iy) \equiv T(x,y) = \left(x^2 - y^2 + a, 2(x^2 - y^2 + a)y + b\right),$$

que es una modificación de la función $Q_c(z) = z^2 + c$ de la que resulta el conocido conjunto de Mandelbrot. Así, podemos preguntarnos por las propiedades del subconjunto de $\mathbb{C}$ formado por los c para los cuales la órbita de 0 por T_c está acotada. A este conjunto lo denominaremos *conjunto de Chicho* y lo denotaremos como $\mathcal{CH}$.

Dado que la función T_c es ahora cúbica y no cuadrática, el decidir si el conjunto de Chicho está contenido en algún disco de radio finito no resulta evidente en absoluto. No obstante, se pueden establecer algunas propiedades elementales sobre esta cuestión, aunque sin llegar a decidir si $\mathcal{CH}$ está o no acotado.

En lo que sigue presentamos alguna de estas propiedades y damos también una representación gráfica del conjunto de Chicho. Somos conscientes de que pueden establecerse otras muchas propiedades y de que es posible que puedan surgir interesantes conexiones con otros campos de las Matemáticas. Baste decir que los únicos puntos donde T_c cumple las condiciones de Cauchy-Riemann, están situados sobre una de las rectas $x = \frac{1}{2}$ ó $y = 0$, al igual que lo que afirma la conjetura de Riemann sobre los ceros de la función *zeta*.

Propiedades

La primera propiedad del conjunto de Chicho $\mathcal{CH}$ es heredada del conjunto de Mandelbrot. Ella se refiere al comportamiento de la órbita de 0 por T_c cuando $c \in \mathbb{R}$. En efecto, si λ es un número real, la sucesión $\{T_\lambda^n(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales que resulta ser la misma que la definida por Q_λ para $\lambda \in \mathbb{R}$. Si llamamos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a esta sucesión

$$u_n = T_\lambda^n(0) = u_{n-1}^2 + \lambda, \qquad u_1 = \lambda, \tag{3}$$

entonces

Propiedad 1. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada si y sólo si $-2 \le \lambda \le \frac{1}{4}$.*

Demostración. Para ello observemos que si la sucesión tiene límite ℓ, éste verificará, teniendo en cuenta (3),

$$\ell^2 - \ell + \lambda = 0,$$

y por tanto

$$\ell = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\lambda}}{2}. \tag{4}$$

Es decir, si la sucesión tiene límite ha de ser $\lambda \le \frac{1}{4}$.

Sea $\lambda > 0$ entonces, $u_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y además

$$u_{n+1} - u_n = (u_n^2 + \lambda) - (u_{n-1}^2 + \lambda) = (u_n + u_{n-1})(u_n - u_{n-1}),$$

siendo

$$u_2 - u_1 = u_1^2 > 0.$$

Así, es inmediato probar, por inducción, que la sucesión es monótona creciente en sentido estricto.

— Si $\lambda > \frac{1}{4}$ como la sucesión no tiene límite y es estrictamente creciente no puede estar acotada y por lo tanto resulta

$$u_n = T_\lambda^n(0) \longrightarrow +\infty.$$

— Si $0 \le \lambda \le \frac{1}{4}$ podemos ver que la sucesión está acotada superiormente. En efecto, $u_1 < \frac{1}{2}$ y supongamos que $u_n \le \frac{1}{2}$, entonces

$$u_{n+1} = u_n^2 + \lambda \le \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto la sucesión tiene límite y éste viene dado por (4) tomando el signo $-$ ya que

$$\frac{1+\sqrt{1-4\lambda}}{2} > \frac{1}{2} \quad \text{para} \quad \lambda \ne \frac{1}{4}.$$

Sea, ahora, $-2 \le \lambda \le 0$; entonces la sucesión está acotada. En efecto, por un lado se verifica

$$u_1 = \lambda \implies -|\lambda| \le u_1 \le |\lambda|.$$

Por otro lado, supongamos que $-|\lambda| \le u_n \le |\lambda|$, entonces

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n^2 - |\lambda| \le |\lambda|^2 - |\lambda| = |\lambda|(|\lambda| - 1) \le |\lambda|, \\ u_{n+1} &= u_n^2 - |\lambda| \ge -|\lambda|, \end{aligned}$$

es decir, $-|\lambda| \le u_{n+1} \le |\lambda|$ y por tanto la sucesión está acotada.

Si, finalmente, $\lambda < -2$, se tiene

$$u_2 = u_1^2 - |\lambda| = |\lambda|^2 - |\lambda| = |\lambda|(|\lambda| - 1) \ge |\lambda|$$

y, por inducción, $u_n \ge |\lambda|, \forall n > 1$. Además, $u_2 - u_1 > 0$ y, puesto que

$$u_{n+1} - u_n = (u_n + u_{n-1})(u_n - u_{n-1}),$$

resulta inmediato ver que la sucesión es monótona creciente en sentido estricto. Ahora bien, si la sucesión estuviera acotada superiormente el límite tendría que venir dado por (4), pero se cumple, para $\lambda < -2$,

$$|\lambda| \ge \frac{1 \pm \sqrt{1-4\lambda}}{2},$$

por lo que el límite no puede existir y, en consecuencia,

$$u_n = T_\lambda^n(0) \longrightarrow +\infty.$$

□

Con esto sabemos localizar el conjunto de Chicho sobre el eje real, pero falta ver cómo es este conjunto fuera del mismo. En este sentido sería interesante el poder establecer alguna cota para el conjunto, como existe para el de Mandelbrot. Esta cuestión no parece de fácil resolución, no obstante, podemos acotar el conjunto de puntos $c \in C$ para los cuales la sucesión $\{T_c^n(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene como límite un punto. Esto puede hacerse a partir de los puntos fijos de la aplicación T_c que define el conjunto $\mathcal{CH}$, ya que si la órbita de 0 tiene como límite un punto, éste necesariamente debe ser un punto fijo, siempre que éste sea atractor. De esta manera podemos establecer la siguiente propiedad:

Propiedad 2. *El conjunto de puntos $c = a + bi \in \mathbb{C}$ para los cuales la función T_c tiene un punto fijo atractor se sitúa en el interior de la curva*

$$\begin{aligned}(r^2-2)r\cos 2\theta - 2r - r^3 + 8\cos\theta \\ = r|\operatorname{sen}\theta|\sqrt{2(8+4r^2+r^4-16r\cos\theta - r^2(r^2-4)\cos 2\theta)}\,,\end{aligned}$$

donde $a = (1 - r^2\cos 2\theta)/4$ y $b = (r^2 \operatorname{sen} 2\theta)/4$.

Demostración. Los puntos fijos de la aplicación

$$T_{a+ib}(x+iy) = \big(x^2 - y^2 + a, 2(x^2 - y^2 + a)y + b\big)$$

vienen determinados por las ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a = x, \\ \quad 2xy + b = y, \end{cases}$$

que resultan ser las mismas que las que surgen de la aplicación Q_c, es decir, que son las mismas ecuaciones que las de los puntos fijos del conjunto de Mandelbrot.

Siguiendo los mismos pasos que para calcular los puntos fijos de Q_c, realizamos los siguientes cambios de variables:

$$x - 1/2 = u, \qquad y = v, \qquad 1 - 4a = \alpha, \qquad 4b = \beta,$$

con lo que el sistema se transforma en

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = \alpha/4, \\ \quad 8uv = -\beta. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos dos puntos fijos:

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{4}, -\frac{\beta}{2\sqrt{2\alpha+2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}\right),$$

$$P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{4}, \frac{\beta}{2\sqrt{2\alpha+2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}\right).$$

Para dilucidar si un punto fijo es o no atractor debe verificarse que la norma 2 de la matriz jacobiana, evaluada en dicho punto, es menor que 1. Es decir, tiene que

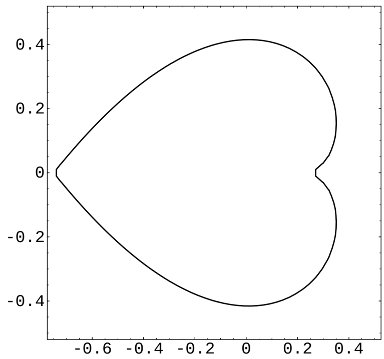

FIGURA 1. Región donde T_c tiene un punto fijo atractor.

verificarse que el radio espectral de la matriz $J^T J$ es menor que 1 en el punto fijo, siendo J la matriz jacobiana de la aplicación T_c.

Denotemos por $\hat{T}_c(u,v)$ a la aplicación obtenida tras aplicar los cambios de variable anteriores a la función $T_c(x,y)$, entonces la matriz jacobiana de $\hat{T}_c$ es

$$J(u,v) = \begin{pmatrix} 2u+1 & -2v \\ 2v(2u+1) & 2(u+1/2)^2 - 6v^2 + (1-\alpha)/2 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de $J^T J$ resultan ser

$$\lambda_1 = p - \sqrt{p^2 - (1+2u)^4}\,, \qquad \lambda_2 = p + \sqrt{p^2 - (1+2u)^4}\,,$$

con $p = (1+2u)^2 + 4v^2(u + 2u^2 + 2v^2) > 0$. Así, se tiene que $0 \le \lambda_1 \le \lambda_2$ y además

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det(J^T J) = (1+2u)^4.$$

Si algún punto fijo es atractor, se debe cumplir $\lambda_1\lambda_2 < 1$. En P_1:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \left(\frac{2 + \sqrt{2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}{2} \right)^4 > 1,$$

luego P_1 no es atractor.

En P_2:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \left(\frac{-2 + \sqrt{2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}{2} \right)^4,$$

que puede ser menor que 1, luego P_2 es un posible atractor.

La condición para que P_2 sea un atractor es que en dicho punto el radio espectral de J sea menor que uno, es decir, $\lambda_2 < 1$.

Sustituyendo las coordenadas de P_2 en λ_2, y tras realizar el cambio a coordenadas polares dado por

$$\begin{cases} \alpha = r^2 \cos 2\theta, \\ \beta = r^2 \operatorname{sen} 2\theta, \end{cases}$$

la condición $\lambda_2 = 1$ se traduce en la siguiente relación implícita:

$$(r^2 - 2) r \cos 2\theta - 2r - r^3 + 8 \cos\theta \\ = r |\operatorname{sen}\theta| \sqrt{2(8 + 4r^2 + r^4 - 16 r \cos\theta - r^2 (r^2 - 4)\cos 2\theta)}\,,$$

Deshaciendo los cambios efectuados, esta ecuación se transforma en otra relación implícita en términos de las variables originales a y b cuya gráfica es la curva en forma de corazón que se muestra en la figura 1. El conjunto de puntos $a + ib$ para los cuales la función T tiene un punto fijo atractor se sitúa en el interior de dicho corazón. □

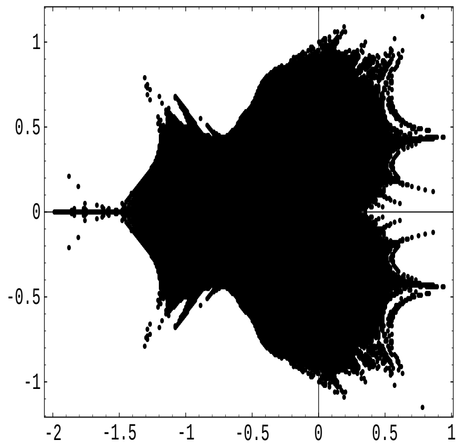

FIGURA 2. Conjunto de puntos $c \in C$ para los cuales la órbita de 0 por T_c se encuentra en el disco de centro el origen y radio 2.

Podríamos, ahora, proceder a estudiar los puntos fijos de T_c^2 y así sucesivamente con el fin de establecer los límites donde localizar las órbitas que convergen a un n-ciclo, con $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, esto resulta extremadamente complejo y nos conformamos con dibujar el aspecto que presenta el conjunto de Chicho. Así, en la figura 2 están representados todos aquellos puntos para los cuales la órbita de 0 por T_c se encuentra en el disco de centro el origen y radio 2 después de 15 iteraciones. La elección de este radio es arbitraria, pero el conjunto de puntos obtenido no cambia si aumentamos el radio, por lo que parece poder conjeturarse que el conjunto de Chicho está contenido en el disco de centro el origen y radio 2 al igual que el conjunto de Mandelbrot.

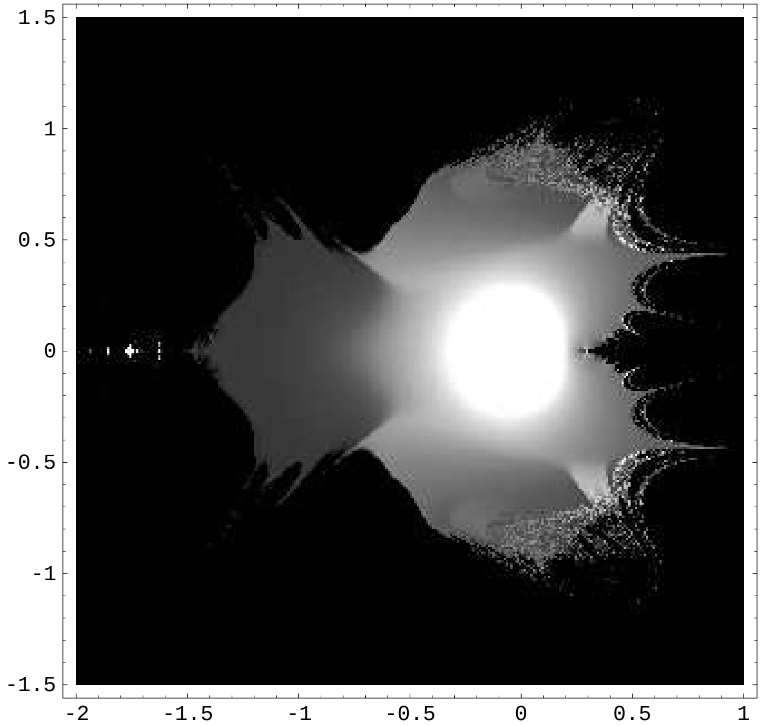

Figura 3. Representación del conjunto de Chicho a partir de la norma de $T_c^{15}(0)$.

A una conclusión parecida se llega si representamos el conjunto de Chicho ateniéndonos a la norma de $T_c^n(0)$ para un cierto valor de n. Si la sucesión no es convergente su norma tenderá con rapidez a infinito y será muy grande incluso para valores de n relativamente pequeños. De esta manera, si asignamos un color a cada punto del plano según sea la norma de $T_c^n(0)$ correspondiendo el color blanco a norma 0 y el color negro a norma infinito obtenemos la figura 3, donde se ha tomado $n = 15$. En esta figura podemos apreciar una zona de color blanco que está contenida en la curva que se menciona en la propiedad 2.

Referencias

[1] M. F. Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press, 1988.

[2] A. F. Beardon, *Iteration of rational functions*, Springer-Verlag, 1991.

[3] M. Benito y J. J. Guadalupe, Dibujando mediante iteraciones, *Números* **42** (2000), 15–28.

[4] R. L. Devaney, The Mandelbrot set, the Farey tree, and the Fibonacci sequence, *Amer. Math. Monthly* **106** (1999), 289–302.

[5] M. de Guzmán, M. A. Martín, M. Morán y M. Reyes, *Estructuras fractales*, Labor, Barcelona, 1993.

[6] G. Julia, Memoire sur l'iteration des fonctions rationelles, *J. Math. Pures Appl.* **8** (1918), 47–245.
[7] B. B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, Freeman, 1977.
[8] B. B. Mandelbrot, *Fractals: form, chance and dimension*, Freeman, 1977.
[9] H. O. Peitgen y P. H. Richter, *The beauty of fractals*, Springer-Verlag, 1986.

Instituto Sagasta, Glorieta del Doctor Zubía s/n, 26003 Logroño, Spain
Correo electrónico: `mbenit8@palmera.pntic.mec.es`

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Edificio Vives, Calle Luis de Ulloa s/n, 26004 Logroño, Spain
Correo electrónico: `vlancha@dmc.unirioja.es, jmguti@dmc.unirioja.es`