MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

APROXIMACIÓN EN NORMA L^p SOBRE SUBCONJUNTOS CERRADOS DEL PLANO COMPLEJO

ANTONIO BONILLA Y JUAN CARLOS FARIÑA

En memoria de nuestro amigo Chicho

ABSTRACT. Let K be a compact set of the complex plane. Sinanjan gives a sufficient condition for the density of the polynomials in the set of all functions in $L^p(K)$ that are analytic in the interior of K. The same condition is also sufficient for the density of the real harmonic polynomials in the set of all functions in $L^p(K)$ that are harmonic in the interior of K. By using techniques of "fusion" and "pushing poles", this result can be extended to closed sets as consequence of the results of Boivin, Bonilla and Fariña for the holomorphic case and the results of Armitage and Goldstein for the harmonic case. In this paper, as consequence of the Sinanjan's Theorem and by following ideas from Rosay and Rudin, we give a different proof of this results on closed sets.

1. INTRODUCCIÓN

Sea F un subconjunto cerrado del plano complejo. Si f es una función compleja medible sobre F y $1 < p < \infty$, definimos la norma L^p de f sobre F por

$$\|f\|_{p,F} = \left\{ \int_F |f(z)|^p \, dm \right\}^{\frac{1}{p}},$$

donde dm es la medida de Lebesgue sobre el plano. El espacio de todas las funciones complejas medibles para las que $\|f\|_{p,F}$ es finito lo denotaremos por $L^p(F)$. Asimismo $L^p_{\text{loc}}(F)$ representará al conjuntos de aquellas funciones f para las que, dado cualquier subconjunto compacto $Q \subset F$, pertenece a $L^p(Q)$; $A^p(F)$ se define como el conjunto de todas las funciones en $L^p_{\text{loc}}(F)$ que son además holomorfas en F^o ($H(F^o)$). Análogamente, $a^p(F)$ es el conjunto de aquellas funciones reales definidas sobre F que pertenecen a $L^p_{\text{loc}}(F)$ y son armónica en su interior ($h(F^o)$).

Dada una clase de funciones A, denotemos por $[A]_{p,F}$ al conjunto de todas las funciones que son límite en norma L^p sobre F de funciones en A.

Un «agujero» de F será una componente conexa acotada de $\mathbb{C} \setminus F$ y denotaremos por $\hat{F}$ la unión de F y todos sus «agujeros».

El problema de aproximación uniforme sobre conjuntos cerrados del plano complejo fue solucionado completamente en 1969 por Arakelyan ([1]), quien da una caracterización, en términos puramente topológicos, de aquellos conjuntos cerrados

2000 *Mathematics Subject Classification.* 30E10.
Key words and phrases. L^p spaces, entire approximation, harmonic approximation.

F que tienen la propiedad de que toda función continua en F y holomorfa en F^o puede ser aproximada por funciones enteras. Estas condiciones permiten primeramente aproximar por funciones meromorfas sin polos en F y luego desplazar los polos de las funciones aproximantes al infinito. Este problema fue también resuelto cuando, en lugar de la norma uniforme, consideramos la norma $\mathrm{Lip}\,\alpha$ ([9]) y C^m ([7]). En otros casos, por ejemplo la norma BMO o L^p, que son definidas por medio de una integral, el problema está aún abierto y sólo se ha podido probar que las condiciones de Arakelya junto con la condición que caracteriza la aproximación meromorfa en BMO, son suficiente para la aproximación entera en esta norma.

Un problema similar aparece cuando las funciones holomorfas son sustituidas por soluciones globales de ciertos operadores elípticos. En el caso particular del Laplaciano y la norma uniforme, recientemente Gardiner ([11]) solucionó completamente el problema caracterizando los subconjuntos relativamente cerrados F de un dominio G, donde la aproximación de funciones continuas en F y armónicas en su interior por funciones armónicas en G es siempre posible. Previamente, Sinanjan ([16]) había probado que si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ tal que $\partial K = \partial \hat{K}$, entonces los polinomios son densos en $A^p(K)$ y los polinomios reales son densos en $a^p(K)$. Este resultado se puede extender a conjuntos cerrados como consecuencia de los resultados en [5] para el caso holomorfo y de los resultados de Armitage y Goldstein [2] para el caso armónico. En esta nota damos una demostración de estos resultados en la línea de [15].

A efectos de notación, si E un subconjunto del plano complejo $\mathbb{C}$, denotaremos su clausura por $\overline{E}$, su interior por E^o, su frontera topológica por ∂E y su complemento por E^c. Los discos abiertos centrados en z y de radio r los denotaremos por $D(z, r)$ y, si $k > 0$, kD representará el disco $D(z, kr)$. Finalmente, $G^\infty = G \cup \{\infty\}$ es la compactificación unipuntual de G.

2. Aproximación L^p entera

Sea F un subconjunto relativamente cerrado de un dominio arbitrario G. Como en el caso uniforme ([10]), usando el teorema de localización en L^p ([5]), el Teorema de Sinanjan y técnicas de desplazamiento de polos, es posible probar que si $\partial F = \partial \hat{F}$ y $G^\infty \setminus \hat{F}$ es localmente conexo en $\{\infty\}$, entonces $A^p(F) = [H(G)]_{p,F}$. Seguidamente damos una prueba alternativa de este resultado cuando F es un subconjunto cerrado del plano complejo. En dicha prueba seguiremos algunas ideas de [15] y [5].

Teorema 1. *Sea F un subconjunto cerrado del plano complejo y $1 < p < \infty$. Si*

(i) $\partial F = \partial \hat{F}$ *y*

(ii) $\mathbb{C}^\infty \setminus \hat{F}$ *es localmente conexo en* $\{\infty\}$,

entonces $A^p(F) = [H(\mathbb{C})]_{p,F}$.

Demostración. Sea $f \in A^p(F)$. Observemos que si $\partial F = \partial \hat{F}$, cualquier agujero de F es una componente conexa del interior de $\hat{F}$. Así, dada cualquier $f \in A^p(F)$, podemos obtener obtener una función g en $A^p(\hat{F})$ que coincide con f en F sin más que definir $g = f$ en F y $g = 0$ en el resto. De este modo podemos suponer que $F = \hat{F}$. Teniendo en cuenta dicha suposición, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos

$B_n = \overline{D}(0, r_n)$, donde $\{r_n\}$ es una sucesión creciente que diverge a infinito y que elegiremos de modo que $B_n \cup \overline{H}_n \subset B^o_{n+1}$, siendo H_n la unión de todos los agujeros de $F \cup B_n$, siendo esto es posible por la propiedad (ii). Por otro lado, la condición (i) implica que si $F_o = F$ y $F_n = F \cup B_n \cup \overline{H}_n$, entonces los conjuntos $F_{n-1} \cap B_{n+1}$ satisfacen la hipótesis del teorema de Sinanjan. Señalemos además que $F_n \subset F_{n+1}$ y $\cup F_n = \mathbb{C}$.

La demostración consistirá en construir, mediante un proceso inductivo, una sucesión de funciones h_n tal que $h_n \in A^p(F_n)$ y existe h tal que, para cualquier $m \geq 0$, $\|h_n - h\|_{p,F_m} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Esto implica que $\lim h_n = h$ será también uniforme sobre compactos de $\mathbb{C}$. Consiguientemente h será una función entera verificando $\|f - h\|_{p,F} < \varepsilon$ y el teorema quedaría demostrado.

Sea $h_o = f$ y supongamos (como hipótesis inductiva) que h_{n-1} ya ha sido elegida. Para definir h_n, tomemos una función $\varphi_n \in C^\infty_o(\mathbb{C})$ tal que $0 \leq \varphi_n \leq 1$, $\varphi_n = 1$ en un entorno U_n de $B_n \cup \overline{H}_n$ y $\operatorname{supp} \varphi_n \subset B_{n+1}$. Como ya señalamos, $F_{n-1} \cap B_{n+1}$ satisface la hipótesis del teorema de Sinanjan y podemos encontrar un polinomio P_n tal que

$$\|h_{n-1} - P_n\|_{p,F_{n-1}\cap B_{n+1}} < \frac{1}{2^{n+1}C}\,\varepsilon, \tag{1}$$

donde C es una constante que definiremos más tarde y que dependerá del hecho de que para una función $f \in C_0(\mathbb{C})$ la transformada de Cauchy

$$g(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{f(w)}{z-w}\,dm(w)$$

está acotada en norma L^p si $p > 2$ i.e., $\|g\|_{p,\mathbb{C}} \leq C_1\|f\|_{p,\mathbb{C}}$, mientras si $1 < p \leq 2$ está sólo localmente acotada([5]), i.e., $\|g\|_{p,D} \leq C(D)\|f\|_{p,D}$, siendo D un disco en $\mathbb{C}$. Por esta razón hemos de considerar dos casos.

Trataremos primeramente con el caso $2 < p < \infty$. Tomemos $C = C_1 + 1$ en (1), y de este modo tendremos que

$$\left\|\frac{1}{\pi}\int_{F_{n-1}} \frac{(h_{n-1} - P_n)\overline{\partial}\varphi_n(w)}{z-w}\,dm(w)\right\|_{p,\mathbb{C}} < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}. \tag{2}$$

Sea ahora

$$r_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_{F_{n-1}} \frac{(h_{n-1} - P_n)\overline{\partial}\varphi_n(w)}{z-w}\,dm(w)$$

y definamos

$$h_n = \varphi_n P_n + (1-\varphi_n)h_{n-1} + r_n.$$

Siguiendo la línea de la demostración de [4, Theorem 3.7.3] deducimos que $h_n \in A^p(F_n)$ y

$$\|h_{n-1} - h_n\|_{p,F_{n-1}} \leq \|\varphi_n(h_{n-1} - P_n)\|_{p,F_{n-1}} + \|r_n\|_{p,F_{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}. \tag{3}$$

Por tanto, como $\cup F_i = \mathbb{C}$, no es difícil probar que (3) implica que $h = \lim h_n = h_o + \sum_{n\geq 1}(h_n - h_{n-1})$ es entera y

$$\|f-h\|_{p,F} \leq \|h_o - h_1\|_{p,F_o} + \sum_{i=2}^{\infty} \|h_{i-1} - h_i\|_{p,F_{i-1}} < \varepsilon.$$

Así, el teorema queda probado para $p > 2$.

En el caso $1 < p \leq 2$, (2) no se verifica. Por tanto, para cada n tomaremos $z_n \in F_{n+1}^c$ y un disco $D = D(z_n, \delta)$ contenido en F_{n+1}^c. Elijamos $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\psi \equiv 1$ fuera de D y $\psi \equiv 0$ en $\frac{1}{2}D$. Definamos

$$h_n = \varphi_n P_n + (1-\varphi_n)h_{n-1} + \Big(r_n - \frac{r_n'(\infty)\psi}{z - z_n}\Big).$$

Si probamos que

$$\Big\| r_n - \frac{r_n'(\infty)}{z-z_n} \Big\|_{p,F_{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \tag{4}$$

entonces, de un modo similar al caso anterior, $h_n \in A^p(F_n)$, $\|h_{n-1} - h_n\|_{p,F_{n-1}} < \dfrac{\varepsilon}{2^n}$ y $h = \lim h_n$ satisface el teorema.

Para probar (4), denotemos

$$m(z) = r_n - \frac{r_n'(\infty)\psi}{z-z_n}$$

y observemos que, si m tiene un cero de orden 2 en infinito, existe R tal que $\forall z \in D(z_n, R)^c$ podemos escribir

$$m(z) = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{b_i}{(z-z_n)^i}.$$

De este modo, si $|z - z_n| > 2R$, siguiendo [6, section 1.7],

$$|b_i| \leq C\Big(\frac{3}{2}R\Big)^{n-2+\frac{2}{q}} \|m\|_{p,2D}.$$

Esto implica que

$$|m(z)| \leq C\frac{(\frac{3}{2}R)^{\frac{2}{q}}}{|z-z_n|^2} \|m\|_{p,2D} \sum_{i=2} \frac{(\frac{3}{2}R)^{n-2}}{(z-z_n)^{i-2}} \leq C\frac{(\frac{3}{2}R)^{\frac{2}{q}}}{|z-z_n|^2} \|m\|_{p,2D}.$$

Consecuentemente

$$\int_{\mathbb{C}\setminus 2D} |m(z)|^p \, dm(z) \leq CR^{\frac{2}{q}p} \|m\|_{p,2D} R^{2-2p}$$

y

$$\|m\|_{p,\mathbb{C}} \leq \|m\|_{p,2D} + \|m\|_{p,\mathbb{C}\setminus 2D} \leq (1 + CR^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-2})\|m\|_{p,2D} \leq C\|m\|_{p,2D}.$$

Nosotros sólo necesitamos estimar la norma L^p de m sobre $2D$. Para ello, en virtud de [6], tenemos que

$$|r_n'(\infty)| \leq C\Big(\frac{3}{2}R\Big)^{-1+\frac{2}{q}} \|r_n\|_{p,2D} = C_2\|r_n\|_{p,2D}.$$

Usando el hecho de que la transformada de Cauchy está localmente acotada y $\dfrac{\psi(z)}{z-z_n} \in L^p(2D)$ para $p > 1$, tomando, en (1),

$$C = C(\varphi_n, 2D) + C_2\Big\|\frac{\psi}{z-z_n}\Big\|_{p,2D},$$

podemos concluir que

$$\Big\|r_n - \frac{r_n'(\infty)\psi}{z-z_n}\Big\|_{p,2D} < \|r_n\|_{p,2D} + |r_n'(\infty)|\Big\|\frac{\psi}{z-z_n}\Big\|_{p,2D} < C\|r_n\|_{p,2D} < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

□

3. Aproximación armónica en norma L^p

Armitage y Goldstein ([2]) probaron que si F es subconjunto relativamente cerrado de un conjunto abierto G en $\mathbb{R}^n$ con la propiedad de aproximación L^p local y además $G^\infty \setminus F$ es conexo y localmente conexo en $\{\infty\}$, entonces $a^p(F) = [h(G)]_{p,F}$. Aquí, como en el caso holomorfo, daremos una prueba diferente de este resultado en el caso particular en que G sea el plano complejo.

Teorema 2. *Sea F un subconjunto cerrado del plano complejo y $1 < p < \infty$. Si*

(i) $\partial F = \partial \hat{F}$ *y*
(ii) $\mathbb{C}^\infty \setminus \hat{F}$ *es localmente conexo en* $\{\infty\}$,

entonces $a^p(F) = [h(\mathbb{C})]_{p,F}$.

Demostración. Sea $f \in a^p(F)$. Consideremos F_n y φ_n como en la demostración del teorema anterior y como allí, construimos, por un proceso inductivo, una sucesión $\{h_n\}$ tal que $h_n \in a^p(F_n)$ y existe h verificando $\|h_n - h\|_{p,F_m} \to 0$ para $m \geq 0$. Consecuentemente h es una función armónica en $\mathbb{C}$ con $\|f-h\|_{p,F} < \varepsilon$ que verifica el teorema.

Pongamos $h_o = f$, fijemos $n \geq 1$ y supongamos (como hipótesis inductiva) que h_{n-1} ya ha sido definida. El Teorema de Sinanjan en norma L^p para funciones armónicas nos da un polinomio armónico P_n tal que

$$\|h_{n-1} - P_n\|_{p,F_{n-1}\cap B_{n+1}} < \frac{1}{C2^{n+1}}\,\varepsilon, \tag{5}$$

donde, como en el caso holomorfo, C será definida más tarde. Sea ahora

$$\begin{aligned} r_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{F_{n-1}} (h_{n-1} - P_n) \Delta\varphi_n(w) \log|z-w|\, dm(w) \\ - \frac{1}{\pi} \int_{F_{n-1}} \frac{(h_{n-1} - P_n)\overline{\partial}\varphi_n(w)}{z-w}\, dm(w) \\ - \frac{1}{\pi} \int_{F_{n-1}} \frac{(h_{n-1} - P_n)\partial\varphi_n(w)}{\overline{z}-\overline{w}}\, dm(w). \end{aligned}$$

Notemos que $r_n = \frac{1}{2\pi} \log|z| * \varphi_n \Delta g - \varphi_n g$ siendo $g = (h_{n-1} - P_n)\chi_{F_{n-1}}$ y donde el primer término está localmente acotado en norma L^p, es decir,

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \log|z| * \varphi_n \Delta g \right\|_{p,D} \leq C(\varphi_n, D) \|g\|_{p,D}$$

donde D es un disco en $\mathbb{C}$ (ver [14]). Consideremos $z_n \in F^c_{n+1}$ y $D = D(z_n, \delta)$ un disco contenido en F^c_{n+1}. Elijamos $\psi \in C^\infty(\mathbb{C})$ con $\psi \equiv 1$ fuera de D y $\psi \equiv 0$ en $\dfrac{1}{2}D$. Sea $R > 0$ una constante tal que $B = D(z_n, R) \supset B_{n+1}$. Siguiendo [14] tenemos que, si $f \in C(\mathbb{C})$ y $\operatorname{supp} \varphi \subset B_1 = D(z, R)$, entonces $\left\| \frac{1}{2\pi} \log|z| * f \right\|_{p,3B_1} \leq C(\varphi, 3B_1)\|f\|_{p,3B_1}$. Definamos

$$\varphi = \psi \log|z - z_n|$$

y

$$S = \sum_{|\alpha|<q} c_\alpha \partial^\alpha \varphi,$$

donde los coeficientes c_α vienen dados por el desarrollo

$$r_n(z) = \sum_{|\alpha|\geq 0} c_\alpha \partial^\alpha \log|z - z_n|$$

y $q = \text{máx}\{p, 1\}$, siendo p el número entero que aparece en [14, Lemma 2]. Esta serie converge en $C^\infty(\mathbb{C} \setminus D(z_n, R))$; además

$$|c_\alpha| \leq C(\alpha)\|r_n\|_{p,3B}$$

y así

$$\|S\|_{p,3\overline{B}} \leq C(q)\|r_n\|_{p,3B}.$$

Aplicando de nuevo [14, Lemma 2], como $r_n - S = O(|z|^{-q})$ cuando $z \to \infty$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|r_n - S\|_{p,\mathbb{C}} &\leq C_1\|r_n - S\|_{p,3D(z_n,R)} \\ &\leq C_1(\|r_n\|_{p,3D(z_n,R)} + \|S\|_{p,3D(z_n,R)}) \\ &\leq C_1(1 + C(q))\|r_n\|_{p,3B} \end{aligned} \tag{6}$$

donde C_1 depende solamente de p.

Ahora, si tomamos, en (5), $C = \dfrac{C(\varphi_n, 3B)}{C_1(1 + C(q))}$, y definimos

$$h_n = \varphi_n P_n + (1 - \varphi_n) h_{n-1} + (r_n - S),$$

como, según (6),

$$\|r_n - S\|_{p,F_{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\,,$$

entonces $h_n \in a^p(E_n)$ y $\|h_{n-1} - h_n\|_{p,F_{n-1}} < \dfrac{\varepsilon}{2^n}$. Por tanto, existe una función $h = \operatorname{lím} h_n$ que es globalmente armónica en $\mathbb{C}$ y verifica el teorema. □

4. Observaciones

Para finalizar esta nota queremos hacer dos observaciones. Por un lado nótese que, de un modo similar al Teorema 2, se puede demostrar el Theorem 4 de [11] cuando F es un cerrado del plano complejo. La única diferencia estriba en el uso del Teorema de Walsh-Lebesgue ([17, pág. 503]) en lugar del Teorema de Sinanjan, aunque, ahora, H_n es la unión de todos los agujeros de $\hat{F} \cup B_n$ y los agujeros de F que intersecan a B_n. Esto es posible por la condición de «largas islas» ([12]) y por el hecho de que $\mathbb{C}^\infty \setminus \hat{F}$ es localmente conexo en $\{\infty\}$.

Por otro lado, debemos observar que las condiciones de los anteriores teoremas no son necesarias, incluso aunque se excluyan los casos triviales donde F contiene un subconjunto cerrado F' de medida plena con F' satisfaciendo las condiciones de los teoremas. Por ejemplo, cuando F es la clausura de ciertos dominios en «forma de luna» ([13]).

Referencias

[1] N. Arakeljan, Uniform and tangential approximation by analytic functions, *Transl. Amer. Math. Soc.* **122** (1984), 85–97.

[2] D. H Armitage y M. Goldstein, Better than uniform approximation on closed sets by harmonic functions with singularities, *Proc. London Math. Soc.* **60** (1990), 319–343.

[3] T. Bagby y P. M. Gauthier, Harmonic approximation on closed subsets of Riemannian manifolds, en *Complex potential theory* (P. M. Gauthie, ed.), Kluwer Academic Publishers (1994), 75–87.

[4] C. A. Berenstein y R. Gay, *Complex variables. An introduction*, Springer-Verlag, 1991.

[5] A. Boivin, A. Bonilla y J. C. Fariña, Meromorphic approximation in weighted L^p spaces, *Proc. Roy. Irish Acad.* **95A** (1995), 47–64.

[6] A. Boivin y J. Verdera, Approximation par fonctions holomorphes dans les espaces L^p, Lip α et BMO, *Indiana Univ. Math. J.* **40** (1991), 393–418.

[7] A. Bonilla y J. C. Fariña, Meromorphic and holomorphic approximation in C^m-norm, *J. Math. Anal. Appl.* **181** (1994), 132–149.

[8] A. Bonilla y J. C. Fariña, Meromorphic and entire approximation in BMO norm, *J. Approx. Theory* **76** (1994), 203–218.

[9] J. C. Fariña, Lipschitz approximation on closed set, *J. Analyse Math.* **57** (1991) 152–171.

[10] D. Gaier, *Lectures on complex approximation*, Birkhäuser, Boston, 1987.

[11] S. J. Gardiner, Superharmonic extension and harmonic approximation, *Ann. Inst. Fourier* **44** (1994), 65–91.

[12] S. J. Gardiner, *Harmonic Approximation*, London Mathematical Society Lecture Note Series **221**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[13] S. N. Mergelyan, On the completeness of systems of analytic functions (en ruso), *Uspehi Matem. Nauk (N.S.)* **8** (1953), 3–63. Traducción al inglés: *Transl. Amer. Math. Soc.* **19** (1962), 109–166.

[14] P. Paramonov y J. Verdera, Approximation by solutions of elliptic equations on closed subsets of Euclidean space, *Math. Scand.* **74** (1994), 249–259.

[15] J. P. Rosay y W. Rudin, Arakelian's approximation theorem, *Amer. Math. Monthly* **96** (1989), 432–434.

[16] S. O. Sinanjan, Approximation by analytic functions and polynomials in the mean with respect to the area (en ruso), *Mat. Sb. (N.S.)* **69(111)** (1966), 546–578. Traducción al inglés: *Transl. Amer. Math. Soc.* **74** (1968), 91–124.

[17] J. L. Walsh, The approximation of harmonic functions by polynomials and harmonic rational functions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **35** (1929), 499–544.

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna, 38271 La Laguna (Tenerife), Canary Islands, Spain

Correo electrónico: `abonilla@ull.es, jcfarina@ull.es`