MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

# OTRO PUENTE ENTRE EL ÁLGEBRA Y LA GEOMETRÍA: ÁLGEBRAS NO ASOCIATIVAS Y CONEXIONES AFINES

PILAR BENITO, CRISTINA DRAPER, ALBERTO ELDUQUE,
FABIÁN MARTÍN Y JOSÉ M. PÉREZ-IZQUIERDO

Abstract. Nomizu's theorem relates invariant affine connections on reductive homogeneus spaces and nonassociative algebras. Among the algebras that appear in this relation we point out the so called Lie triple algebras which contain most of the infinitesimal information on reductive spaces. The aim of this work is to provide a brief survey on recent developements in this subject that show the interplay of nonassociative structures and connections and to pose an algebraic classification question on Lie triple algebras.

## 1. Introducción

El concepto de *álgebra triple de Lie* fue introducido por K. Yamaguti en [21] con el nombre de *sistema triple de Lie general*. Dicho concepto resulta ser la generalización natural de los bien conocidos *sistemas triples de Lie*, de uso frecuente en Geometría Diferencial y álgebras de Jordan, y está íntimamente relacionado con los espacios homogéneos reductivos.

El presente trabajo pretende motivar el interés que, desde perspectivas algebraicas y geométricas, tiene el estudio de las álgebras triples de Lie, así como presentar los problemas que, a lo largo de estos últimos años, hemos venido estudiando y en los que estas álgebras aparecen involucradas. Estos problemas tienen su punto de partida en las ideas e investigaciones previas que uno de los autores (Alberto Elduque), en colaboración con el profesor H. C. Myung, había realizado sobre ciertas álgebras no asociativas relacionadas con los grupos $SU(3)$, $G_2$ y $\mathrm{Spin}(7)$. El fruto de nuestro trabajo conjunto ha sido posible gracias al inestimable esfuerzo que en su día nuestro querido Chicho, por entonces director del Departamento de Matemáticas y Computación de la U.R., hizo para que Alberto se incorporara a la Universidad de La Rioja en 1996, y que permitió poco a poco nutrir de savia nueva al área de Álgebra de la U.R. Estamos seguros de que allá donde esté, al leer estas notas, Chicho entenderá cuán infinito es nuestro agradecimiento.

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 17B60, Secondary 53C05, 53C30.

*Key words and phrases.* Nonassociative algebras, Lie algebras associated with other structures, Lie triple algebras, homogeneus spaces, affine connections.

La investigación de P. Benito, C. Draper, F. Marín y J. M. Pérez-Izquierdo está subvencionada por la DGES, proyecto PB97-1291-C03-03, y por la Universidad de La Rioja, proyecto API00/B04.

La investigación de A. Elduque está subvencionada por la DGES, proyecto PB97-1291-C03-03.

El contenido del trabajo aparece desglosado de la forma siguiente: en la sección 2 se expone la relación existente entre las álgebras triples de Lie y los espacios homogéneos reductivos. La sección 3 está dedicada a mostrar cómo el problema geométrico del cálculo de conexiones afines invariantes en espacios homogéneos se traduce al problema algebraico de determinación de álgebras no asociativas con una subálgebra prefijada de su álgebra de derivaciones; en ella se incluye también una serie de resultados vinculados con este problema. La última sección está dedicada a explicar el problema de estructura sobre álgebras triples en el que actualmente estamos trabajando.

## 2. Espacios homogéneos y álgebras triples de Lie

La bien conocida correspondencia entre grupos de Lie y álgebras de Lie crea un importante vínculo entre el Álgebra y la Geometría que permite tratar algunos problemas desde distintas perspectivas. Los grupos de Lie aparecen de modo natural como grupos de simetría de ciertos objetos geométricos, y su importancia radica esencialmente en su acción en otras variedades diferenciables de entre las cuales destacaremos los espacios homogéneos. Un *espacio homogéneo* de un grupo de Lie $G$ es una variedad diferenciable sobre la que $G$ actúa de modo que la correspondiente acción $G\times M \longrightarrow M$ es diferenciable y transitiva. La variedad $M$ se puede identificar con el conjunto de clases a izquierda $G/H$, con $H$ el subgrupo de isotropía de cualquier elemento de $M$ (la acción natural $G \times G/H \longrightarrow G/H, \quad (\sigma, \tau H) \mapsto \sigma\tau H$ dota a dicho cociente de estructura de variedad diferenciable difeomorfa a $M$). Si $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ son las álgebras de Lie de los grupos de Lie $G$ y $H$ respectivamente, el espacio homogéneo se dice *reductivo* si el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se descompone como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \tag{1}$$

con $\mathfrak{m}$ subespacio de $\mathfrak{g}$ invariante bajo la acción adjunta de $H$; esta condición de invarianza implica $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$ y, si $H$ es conexo, ambas condiciones son equivalentes. En esta situación, para cualesquiera $x, y \in \mathfrak{m}$, las proyecciones del corchete $[x, y] \in \mathfrak{g}$ sobre $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{h}$ permiten definir en $\mathfrak{m}$ el producto binario

$$\circ\colon \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}, \quad (x, y) \mapsto x \circ y := [x, y]_{\mathfrak{m}} \tag{2}$$

y el producto triple

$$[\ ,\ ,\ ]\colon \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}, \quad (x, y, z) \mapsto [x, y, z] := [[x, y]_{\mathfrak{h}}, z] \tag{3}$$

que verifican, como consecuencia de que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, los siguientes axiomas:

$$\begin{aligned}
&x \circ x = 0,\\
&[x, x, y] = 0,\\
&[x, y, z] + [y, z, x] + [z, x, y] + (x \circ y) \circ z + (y \circ z) \circ x + (z \circ x) \circ y = 0,\\
&[x \circ y, z, t] + [y \circ z, x, t] + [z \circ x, y, t] = 0,\\
&[x, y, z \circ t] = [x, y, z] \circ t + z \circ [x, y, t],\\
&[x, y, [z, t, s]] = [[x, y, z], t, s] + [z, [x, y, t], s] + [z, t, [x, y, s]].
\end{aligned} \tag{4}$$

Un espacio vectorial $\mathfrak{m}$ dotado de un producto binario $\circ$ y otro triple $[\ ,\ ,\ ]$ que verifique los axiomas dados en (4) se dice *álgebra triple de Lie* o *sistema triple de Lie general* (abreviadamente g.L.t.s.). Estos sistemas triples generales contienen información esencial sobre la geometría de los espacios homogéneos reductivos.

Un caso particular y bien conocido de g.L.t.s. es el de los *sistemas triples de Lie* (abreviadamente L.t.s.) en los que el producto binario es trivial ($x \circ y = 0 \quad \forall x, y \in \mathfrak{m}$). En el marco algebraico, estos sistemas han permitido, entre otras cosas, la incorporación de métodos y resultados de álgebras de Lie en el estudio de álgebras de Jordan (véase el Capítulo VIII en [14]). En el contexto geométrico, los L.t.s. están relacionados con un tipo especial de espacios homogéneos reductivos, los llamados *espacios simétricos* (véase [12]), en los que $G$ está dotado de un automorfismo diferenciable $\sigma$ de orden 2, de modo que $H$ es aproximadamente el conjunto de elementos fijados por $\sigma$. Así, en cualquier $G/H$ espacio simétrico se tiene la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, donde $\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{g} : \mathrm{d}\sigma(x) = x\}$ y $\mathfrak{m} = \{x \in \mathfrak{g} : \mathrm{d}\sigma(x) = -x\}$, que verifica $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$ y $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{h}$, por lo que el g.L.t.s. $\mathfrak{m}$ tiene producto binario trivial.

Por tanto, la Geometría Diferencial proporciona abundantes e interesantes ejemplos de g.L.t.s., lo que justifica desde una perspectiva algebraica el estudio de este tipo de sistemas.

En la siguiente sección presentamos un problema concreto que entrelaza la geometría, los g.L.t.s. y las álgebras no asociativas. A partir de ahora, dada $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie arbitraria con producto $[x, y]$, llamaremos *descomposición reductiva de* $\mathfrak{g}$ a cualquier descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, que satisfaga $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$ y $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$. En esta situación, $\mathfrak{h}$ es subálgebra de $\mathfrak{g}$; el par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ se dice *par reductivo* y el subespacio $\mathfrak{m}$ con los productos binario y triple definidos como en (2) y (3) tiene estructura de g.L.t.s.

## 3. Conexiones afines y álgebras no asociativas

Desde el punto de vista de la Geometría Diferencial, una de las motivaciones para el estudio abstracto de los g.L.t.s. procede del siguiente resultado probado por Nomizu en 1954 (véase el Teorema 8.1 en [18]):

**Teorema** (Nomizu)**.** *Si $M \simeq G/H$ es un espacio homogéneo reductivo con descomposición reductiva asociada $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, el conjunto de conexiones afines $G$-invariantes está en correspondencia biyectiva con el conjunto de aplicaciones bilineales $\alpha\colon \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}$ tales que*

$$\operatorname{Ad} h(\alpha(x, y)) = \alpha(\operatorname{Ad} h(x), \operatorname{Ad} h(y)) \quad \forall h \in H,\ \forall x, y \in \mathfrak{m}.$$

Dicho de otro modo, cada conexión afín invariante está determinada por un producto bilineal $\alpha$ definido sobre $\mathfrak{m}$ tal que $\operatorname{Ad} H|_{\mathfrak{m}}$ es subgrupo del grupo de automorfismos del álgebra no asociativa $(\mathfrak{m}, \alpha)$, $(\operatorname{Aut}(\mathfrak{m}, \alpha))$. Esto implica que $\operatorname{ad} \mathfrak{h}|_{\mathfrak{m}}$ es subálgebra del álgebra de derivaciones de $(\mathfrak{m}, \alpha), (\operatorname{Der}(\mathfrak{m}, \alpha))$, de modo que ambas condiciones son equivalentes si $H$ es conexo. Esto permite estudiar y expresar la torsión, curvatura, holonomía, etc. de la conexión asociada a $(\mathfrak{m}, \alpha)$ en términos de esta álgebra no asociativa. Observamos que el conjunto de multiplicaciones $\alpha\colon \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}$ tales que $\operatorname{ad} \mathfrak{h}|_{\mathfrak{m}} \subseteq \operatorname{Der}(\mathfrak{m}, \alpha)$ es exactamente el espacio vectorial de homomorfismos de $\mathfrak{h}$-módulos de $\mathfrak{m} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{m}$ en $\mathfrak{m}$, que se denota por $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{m} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{m}, \mathfrak{m})$.

Así pues, para espacios homogéneos reductivos, el problema de encontrar conexiones afines invariantes se reduce al problema algebraico de encontrar estructuras de álgebras no asociativas en $\mathfrak{m}$ con un conjunto de automorfismos prefijado ($\operatorname{Ad} H \subseteq \operatorname{Aut}(\mathfrak{m}, \alpha)$), ó con una subálgebra prefijada del álgebra de derivaciones ($\operatorname{ad}\mathfrak{h} \subseteq \operatorname{Der}(\mathfrak{m}, \alpha)$) en el caso conexo.

El uso combinado del Teorema de Nomizu y la estructura de la conocida álgebra de Cayley o de octoniones $\mathbb{O}$ cuyo grupo de automorfismos (álgebra de derivaciones) es el grupo de Lie simple excepcional $G_2$ (álgebra simple central de tipo $G_2$), ha permitido determinar en [7], [8], [9] y[3] los g.L.t.s. y las conexiones afines invariantes asociadas a los espacios homogéneos $S^6 \simeq G_2/SU(3)$, $S^7 \simeq \operatorname{Spin}(7)/G_2$, $S^{15} \simeq \operatorname{Spin}(9)/\operatorname{Spin}(7)$ y a espacios cociente de $G_2$. Las conexiones afines invariantes en espacios simétricos irreducibles y compactos fueron obtenidas en [15] y [16], y más recientemente en [1] mediante el cálculo explícito del conjunto $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{m} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{m}, \mathfrak{m})$. Presentamos a continuación un resumen de algunos de los resultados contenidos en estos trabajos.

**3.1. Conexiones en esferas.** Para la esfera 6-dimensional $S^6$, a partir de los resultados obtenidos en [7] se concluye que las álgebras no asociativas $(\mathfrak{m}, \alpha)$ correspondientes a las conexiones invariantes son todas ellas (salvo la asociada al producto trivial) isomorfas al álgebra de elementos de traza cero de la forma real compacta del álgebra de color introducida en [6], y que este espacio tiene una familia biparamétrica de conexiones afines $G_2$-invariantes. En el caso $S^7$, los resultados contenidos en [8] muestran que las álgebras no triviales $(\mathfrak{m}, \alpha)$ que aparecen son todas isomorfas al álgebra de Malcev (simple central no de Lie) de vectores en el álgebra de Cayley $\mathbb{O}$, y que el espacio posee una familia uniparamétrica de conexiones $\operatorname{Spin}(7)$-invariantes. Finalmente, para $S^{15}$, en [9] se obtiene que las conexiones $\operatorname{Spin}(9)$-invariantes vienen dadas por una familia triparamétrica de productos en $\mathbb{O}_0 \times \mathbb{O}$ donde $\mathbb{O}_0$ denota el conjunto de elementos de traza cero en $\mathbb{O}$.

Los trabajos citados estudian una situación mucho más general: las descomposiciones reductivas (de álgebras de Lie simples centrales) asociadas a los pares reductivos $(G_2, A_2)$, $(B_3, G_2)$ y $(B_4, B_3)$ sobre cuerpos arbitrarios de característica distinta de 2 y 3. Esto permite un mayor conocimiento de las álgebras involucradas en las descomposiciones, y la restricción al cuerpo real proporciona, por medio del teorema de Nomizu, los resultados sobre conexiones en esferas que acabamos de exponer. Una versión unificada y más simple (caso real) de estos resultados puede verse en [10].

**3.2. Conexiones en espacios cocientes de $G_2$.** En el Capítulo II de [3] se estudian, sobre cuerpos de característica distinta de 2 y 3, los pares reductivos $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ donde $\mathfrak{g}$ es un álgebra simple central de tipo $G_2$ modelizada como álgebra de derivaciones de un álgebra de Cayley, y $\mathfrak{h}$ es una subálgebra reductiva no abeliana, y se determina completamente el conjunto $\Delta = \operatorname{Hom}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{m} \otimes \mathfrak{m}, \mathfrak{m})$ para las correspondientes descomposiciones reductivas $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ asociadas. En el caso real, se muestra que las descomposiciones asociadas a estos pares son descomposiciones reductivas de espacios homogéneos cocientes de $G_2$, que incluyen, entre otros, la variedad de Stiefeld $St_{7,2} \simeq G_2/SU(2)$, la variedad de Grassman $\tilde{G}_{7,2} \simeq G_2/SU(2)SO(2)$ y el espacio simétrico $G_2/SO(4)$. Así, los cálculos sobre los conjuntos $\Delta$ para estas tres variedades permiten concluir que en $St_{7,2}$ la familia de conexiones depende de 171 parámetros; en $\tilde{G}_{7,2}$ la familia de conexiones depende de 18 parámetros y en $G_2/SO(4)$ la única conexión que aparece es la asociada al producto trivial.

Además, desde el punto de vista de las álgebras no asociativas, el interés de las descomposiciones asociadas a estos pares radica en que permiten dar construcciones nuevas de las álgebras de Cayley y sus álgebras de derivaciones; dichas construcciones aparecen recogidas en la prepublicación [2].

**3.3. Conexiones en espacios simétricos.** Las conexiones afines invariantes en espacios simétricos Riemannianos irreducibles y compactos se calculan en [15], [16] y también en [1] mediante el uso de técnicas completamente distintas. En [15] y [16] se determina la dimensión del conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{m} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{m}, \mathfrak{m})$ asociado a cada espacio simétrico extendiendo escalares al cuerpo complejo y descomponiendo el producto tensor $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ en suma directa de módulos irreducibles (tarea no siempre fácil). De esta manera, se prueba (véase el Teorema 8.1 en [15] y el Teorema 2.1 en [16]) que la única conexión afín en este tipo de espacios es la canónica (asociada al producto $\alpha \equiv 0$) salvo en unas pocas excepciones que recogen los espacios $SU(n)/SO(n)$ $(n \geq 3)$, $SU(2n)/Sp(n)$ $(n \geq 3)$, $E_6/F_4$ y $SU(n) \times SU(n)/SU(n)$ $(n \geq 3)$ los cuales están íntimamente relacionados con las álgebras de Jordan simples reales.

Ahora bien, estos cálculos sobre homomorfismos efectuados en [15] y [16] se pueden simplificar y generalizar notablemente al observar que en las descomposiciones (1) asociadas a los espacios simétricos, $\mathfrak{m}$ tiene estructura de L.t.s. simple. Así, en [1] se determina el conjunto $\Delta = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Der}\,\mathfrak{m}}(\mathfrak{m} \otimes_F \mathfrak{m}, \mathfrak{m})$ de forma unificada para cualquier $\mathfrak{m}$ L.t.s. simple sobre un cuerpo $F$ arbitrario de característica cero, mediante el uso de la información sobre álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas y simples como álgebras graduadas que proporcionan los diagramas de Dynkin afines asociados a los correspondientes sistemas triples (véase [11]) y sin necesidad de descomponer $\mathfrak{m} \otimes_{\mathrm{F}} \mathfrak{m}$. El teorema principal de este trabajo (véase el Teorema 4.3 en [1]) prueba que el conjunto de homomorfismos $\Delta$ es no nulo salvo en el caso en que $\mathfrak{m}$ sea el L.t.s. de elementos de traza genérica cero de un álgebra simple de Jordan de grado mayor o igual que 3, con producto triple dado por el asociador en la forma: $[x, y, z] = (yz)x - y(zx)$. La restricción de este teorema al caso real proporciona las conexiones afines invariantes en los espacios simétricos irreducibles, poniendo así de manifiesto el importante papel que las álgebras de Jordan desempeñan en la existencia de conexiones no canónicas en los espacios simétricos.

## 4. Álgebras triples irreducibles

Para cualquier $(\mathfrak{m}, \circ, [\ ,\ ,\ ])$ g.L.t.s., los axiomas dados en (4) permiten deducir de forma fácil que

(a) el subespacio

$$\mathrm{Inder}(\mathfrak{m}) = \mathrm{span}\,\langle [x, y, -] : x, y \in \mathfrak{m} \rangle$$

es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ que se dice *álgebra de derivaciones internas de* $\mathfrak{m}$

(b) $\mathfrak{m}$ es, de forma natural, $\mathrm{Inder}(\mathfrak{m})$-módulo $([x, y, -] \cdot z := [x, y, z])$

(c) el espacio vectorial

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{m}) = \operatorname{Inder}(\mathfrak{m}) \oplus \mathfrak{m}$$

tiene estructura de álgebra de Lie con el producto dado por la multiplicación en $\operatorname{Inder}(\mathfrak{m})$ como subálgebra de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, la acción natural de $\operatorname{Inder}(\mathfrak{m})$ sobre $\mathfrak{m}$, y para cualesquiera $x, y \in \mathfrak{m}$,

$$[x, y] := x \circ y + [x, y, -].$$

El álgebra $\mathfrak{L}(\mathfrak{m})$ se dice *envuelta estándar de* $\mathfrak{m}$.

Con el objetivo de profundizar en la estructura y clasificación de los g.L.t.s. simples, hemos iniciado el estudio de la clasificación de tales sistemas en la situación que, de forma natural, es más sencilla: los sistemas triples de Lie $\mathfrak{m}$ que son irreducibles para el álgebra de Lie de sus derivaciones internas. En esta situación, sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero, se tiene que $\operatorname{Inder}(\mathfrak{m})$ es subálgebra maximal y semisimple de la envuelta $\mathfrak{L}(\mathfrak{m})$, y que dicha envuelta es simple salvo en el caso de que $\mathfrak{m}$ sea $\operatorname{Inder}(\mathfrak{m})$-módulo adjunto (es decir, $\operatorname{Inder}(\mathfrak{m})$ como $\operatorname{ad}\operatorname{Inder}(\mathfrak{m})$-módulo natural y $\mathfrak{m}$ son módulos isomorfos).

Por otro lado, en cualquier descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ de un álgebra de Lie simple se tiene que el álgebra $\mathfrak{g}$ es, salvo isomorfismos, la envuelta estándar del sistema triple de Lie $\mathfrak{m}$ asociado a la descomposición y la subálgebra $\mathfrak{h}$ es el álgebra de sus derivaciones internas: La aplicación $\Phi\colon \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathfrak{m})$ dada por $h \in \mathfrak{h} \mapsto \operatorname{ad} h|_{\mathfrak{m}} \in \operatorname{Inder}(\mathfrak{m})$ y $x \in \mathfrak{m} \mapsto x$ es epimorfismo de álgebras de Lie, y por tanto isomorfismo por simplicidad de $\mathfrak{g}$. Así pues, sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero, la clasificación de los g.L.t.s. irreducibles con envuelta simple se reduce a la determinación de los pares reductivos $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ tales que $\mathfrak{g}$ es álgebra de Lie simple, $\mathfrak{h}$ es subálgebra maximal y semisimple, y el complemento de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$ es irreducible. Las subálgebras maximales de álgebras simples han sido estudiadas en [4] y [5], y esperamos que los resultados contenidos en estos trabajos aporten luz al problema de clasificación en el que estamos trabajando.

Sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero, las álgebras de Lie simples son, salvo isomorfismos, de uno de los siguientes tipos (véase [13]):

I. **Clásicas:** álgebras de transformaciones lineales sobre un espacio vectorial $V$ (es decir, subálgebras del álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V) = \operatorname{End}(V)$ con producto $[f, g] = fg - gf$) de uno de los siguientes tipos:

$$A_l: \ \mathfrak{sl}(V) = \{f \in \operatorname{End}(V) : \operatorname{traza} f = 0\}, \ \dim V = l + 1, \ l \geq 1,$$

$$B_l, D_l, C_l: \ \mathfrak{Skew}(V, b) = \{f \in \operatorname{End}(V) : b(fx, y) + b(x, fy) = 0\},$$

donde $b$ es forma bilineal no degenerada, simétrica en los tipos $B_l$ ($\dim V = 2l + 1, \ l \geq 2$) y $D_l$ ($\dim V = 2l, \ l \geq 4$) y antisimétrica en el tipo $C_l$ ($\dim V = 2l, \ l \geq 3$).

Las restricciones sobre $l$ en los casos $B, D$ y $C$ proceden de los siguientes hechos: $A_1 \cong B_1 \cong C_1$, $B_2 \cong C_2$; $D_1$ es 1-dimensional y $D_2 \cong A_1 \oplus A_1$ luego no son simples, y $D_3 \cong A_3$.

II. **Excepcionales:** $G_2$, $F_4$, $E_6$, $E_7$ y $E_8$.
Todas estas álgebras pueden obtenerse a partir del álgebra de octoniones y de álgebras simples de Jordan (véase el Teorema 4.13 en [19]).

A continuación presentamos algunas construcciones de g.L.t.s. irreducibles cuya envuelta es un álgebra simple clásica. En lo que sigue, supondremos que el cuerpo base es algebraicamente cerrado de característica cero, aunque las construcciones son válidas eliminando la condición de cerradura algebraica.

**Ejemplo 1.** Sea $(V, b)$ espacio vectorial de dimensión mayor o igual que 3 dotado de una forma bilineal $b$ no degenerada simétrica o antisimétrica. El álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$ admite la descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ donde

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{h} = \mathfrak{Skew}(V, b),\\
&\mathfrak{m} = \mathfrak{Sym}_0(V, b) = \{f \in \mathrm{End}(V) : b(fx, y) = b(x, fy),\ \text{traza}\, f = 0\}.
\end{aligned}$$

En este caso se tiene que $\mathfrak{g}$ es un álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada ($[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}, [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{h}$) y simple como álgebra graduada, con parte par $\mathfrak{h}$ subálgebra simple, y parte impar $\mathfrak{m}$; por tanto el sistema triple $\mathfrak{m}$ es $\mathfrak{h}$-irreducible (véase el Teorema 2.8 y el Lema 4.4 en [17]) con envuelta de tipo $A$ y producto binario trivial.

**Ejemplo 2.** Sean $V_1$ y $V_2$ espacios vectoriales de dimensión mayor o igual que 2, y $V = V_1 \otimes V_2$. El álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$ admite descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ donde

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h} &= \mathfrak{sl}(V_1) \otimes F1 \oplus F1 \otimes \mathfrak{sl}(V_2),\\
\mathfrak{m} &= \mathfrak{sl}(V_1) \otimes \mathfrak{sl}(V_2).
\end{aligned}$$

En este caso, la subálgebra $\mathfrak{h}$ es isomorfa a $\mathfrak{sl}(V_1) \oplus \mathfrak{sl}(V_2)$, luego, como álgebra de Lie, es semisimple y no simple. La acción de $\mathfrak{h}$ sobre $\mathfrak{m}$ viene dada de forma natural al considerar $\mathfrak{sl}(V_1)$ y $\mathfrak{sl}(V_2)$ como $\mathfrak{sl}(V_1)$-módulos adjunto y trivial, y como $\mathfrak{sl}(V_2)$-módulos trivial y adjunto respectivamente; por tanto $\mathfrak{m}$ es $\mathfrak{h}$-irreducible con envuelta de tipo $A$. Además, el producto binario en $\mathfrak{m}$ como sistema triple es no trivial.

**Ejemplo 3.** Sean $(V_1, b_1)$ y $(V_2, b_2)$ espacios vectoriales de dimensión mayor o igual que 2 dotados de formas bilineales no degeneradas $b_1$ y $b_2$, ambas simétricas o antisimétricas (en el caso simétrico, la dimensión distinta de 2). En el espacio vectorial $V = V_1 \oplus V_2$ definimos la forma bilineal $b = b_1 \perp b_2$ (suma ortogonal de $b_1$ y $b_2$), que es no degenerada, y simétrica o antisimétrica si ambas formas son del mismo tipo. Así, el álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{Skew}(V, b)$ admite la descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ donde

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2, \qquad \mathfrak{h}_i = \{f \in \mathrm{End}(V) : f|_{V_i} \in \mathfrak{Skew}(V_i, b_i),\ f|_{V_j} \equiv 0\},\\
&\mathfrak{m} = \{f - f^* : f(V_1) \subseteq V_2,\ f|_{V_2} \equiv 0\}
\end{aligned}$$

con $f^*$ el homomorfismo adjunto de $f$ respecto de $b$ ($f^*$ es el único endomorfismo de $V$ tal que $b(fx, y) = b(x, f^*y)$).

En este caso, la subálgebra $\mathfrak{h}$ es isomorfa a $\mathfrak{Skew}(V_1, b_1) \oplus \mathfrak{Skew}(V_2, b_2)$, luego es semisimple y no simple, y $\mathfrak{m}$ como $\mathfrak{h}$-módulo es isomorfo a $\mathrm{Hom}(V_1, V_2) \cong V_1 \otimes V_2$, donde la acción de cada componente $\mathfrak{h}_i$ sobre $V_1$ y $V_2$ es la natural. Por tanto $\mathfrak{m}$ es $\mathfrak{h}$-irreducible con envuelta de tipo $B, D$ ó $C$, y con producto binario trivial.

**Ejemplo 4.** Sean $(V_1, b_1)$ y $(V_2, b_2)$ espacios vectoriales de dimensión mayor o igual que 2 dotados de formas bilineales no degeneradas simétricas o antisimétricas $b_1$ y $b_2$. En el espacio vectorial $V = V_1 \otimes V_2$ definimos la forma bilineal no degenerada $b = b_1 \otimes b_2$ dada por

$$b_1 \otimes b_2(v_1 \otimes v_2, w_1 \otimes w_2) := b_1(v_1, w_1)b_2(v_2, w_2)$$

y observamos que $b$ es simétrica (antisimétrica) si y sólo si $b_1$ y $b_2$ son del mismo tipo (una es simétrica y la otra antisimétrica).

El isomorfismo natural entre los espacios vectoriales

$$\mathrm{End}(V_1) \otimes \mathrm{End}(V_2) \cong \mathrm{End}(V_1 \otimes V_2)$$

proporciona la descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ para el álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{Skew}(V, b)$ donde

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &= \mathfrak{Skew}(V_1, b_1) \otimes F1 \oplus F1 \otimes \mathfrak{Skew}(V_2, b_2) \\ \mathfrak{m} &= \mathfrak{Skew}(V_1, b_1) \otimes \mathfrak{Sym}_0(V_2, b_2) \oplus \mathfrak{Sym}_0(V_1, b_1) \otimes \mathfrak{Skew}(V_2, b_2) \end{aligned}$$

En este caso, $\mathfrak{m}$ es $\mathfrak{h}$-irreducible si y sólo si uno de los espacios $V_i$ es 2-dimensional con $b_i$ antisimétrica, y la dimensión del otro es mayor o igual que 3.

Por tanto, suponiendo $\dim V_1 \geq 3$, $(V_2, b_2)$ con $\dim V_2 = 2$ y $b_2$ antisimétrica, obtenemos que la subálgebra $\mathfrak{h}$ es isomorfa a $\mathfrak{Skew}(V_1, b_1) \oplus \mathfrak{Skew}(V_2, b_2)$, luego es semisimple y no simple, y que el $\mathfrak{h}$-módulo $\mathfrak{m} = \mathfrak{Sym}_0(V_1, b_1) \otimes \mathfrak{Skew}(V_2, b_2)$ es irreducible (producto tensor de irreducibles para cada componente simple) con envuelta de tipo $B$, $D$ ó $C$. En este caso, el producto binario en $\mathfrak{m}$ como sistema triple es no trivial.

Los ejemplos que acabamos de presentar no son casos aislados, ya que a partir de las Proposiciones 10.1 y 10.2 en [20], que clasifican los tipos de subálgebras semisimples y no simples de las álgebras clásicas, se obtiene de forma fácil que los pares reductivos $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ con $\mathfrak{g}$ álgebra simple clásica, $\mathfrak{h}$ subálgebra semisimple y no simple y tal que el complemento de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$ es irreducible son exactamente los descritos en los ejemplos 2, 3 y 4. Por tanto, esto reduce el problema de clasificación planteado en esta sección a la determinación de los adecuados pares reductivos $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ en los casos $\mathfrak{g}$ clásica y $\mathfrak{h}$ simple y $\mathfrak{g}$ excepcional de tipo distinto de $G_2$, ya que el caso $G_2$ aparece resuelto en [3].

## Referencias


[1] P. Benito, C. Draper y A. Elduque, On some algebras related to Lie triple systems, *J. Algebra* **219** (1999), 234–254.

[2] P. Benito, C. Draper y A. Elduque, Models of octonions and $G_2$, prepublicación.

[3] C. Draper, *Espacios homogéneos reductivos y álgebras no asociativas*, Tesis Doctoral, Universidad de La Rioja, 2001.

[4] E. B. Dynkin, Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras, *Amer. Math. Soc. Transl.* **6** (1957), 11–244.

[5] E. B. Dynkin, Maximal subgroups of the classical groups, *Amer. Math. Soc. Transl.* **6** (1957), 245–378.

[6] G. Domokos y S. Kövesi-Domokos, The algebra of color, *J. Math. Phys.* **19** (1978), 1477–1481.

[7] A. Elduque y H. C. Myung, Color algebras and affine connections on $S^6$, *J. Algebra* **149** (1992), 234–261.

[8] A. Elduque y H. C. Myung, The reductive pair $(B_3, G_2)$ and affine connections on $S^7$, *J. Pure Appl. Algebra* **86** (1993), 155–171.
[9] A. Elduque y H. C. Myung, The reductive pair $(B_4, B_3)$ and affine connections on $S^{15}$, *J. Algebra* **227** (2000), 504–531.
[10] A. Elduque y H. C. Myung, Octonions and affine conections on spheres, *Lect. Notes in Pure and Appl. Math.* **211** (2000), 42–54.
[11] J. R. Faulkner, Dynkin diagrams for Lie triple systems, *J. Algebra* **62** (1980), 384–392.
[12] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press, 1978.
[13] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg-Nueva York, 1972.
[14] N. Jacobson, *Structure and representations of Jordan algebras*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **39**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
[15] H. T. Laquer, Invariant affine connections on Lie groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **331** (1992), 541–551.
[16] H. T. Laquer, Invariant affine connections on symmetric spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **115** (1992), 447–454.
[17] W. G. Lister, A structure theory of Lie triple systems, *Trans. Amer. Math. Soc.* **72** (1952), 217–242.
[18] K. Nomizu, Invariant affine connections on homogeneous spaces, *Amer. J. Math.* **76** (1954), 33–65.
[19] R. D. Schaffer, *An introduction to nonassociative algebras*, Dover Publications, Nueva York, 1995.
[20] J. Tits, Sous-algèbres des algèbres de Lie semi-simples, *Séminaire Bourbaki* **3** (1955), Exp. n. 119, 197–214.
[21] K. Yamaguti, On the Lie triple systems and its generalization, *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A* **21** (1957/1958), 155–160.

P. Benito, F. Martín, J. M. Pérez-Izquierdo: Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, 26004 Logroño, Spain
*Correo electrónico*: `pilar.benito@dmc.unirioja.es, fabian.martin@dmc.unirioja.es, jm.perez@dmc.unirioja.es`

C. Draper: Departamento de Matemática Aplicada, Campus El Egido, Universidad de Málaga, 29071 Málaga, Spain
*Correo electrónico*: `cdraper@terra.es`

A. Elduque: Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, 50009 Zaragoza, Spain
*Correo electrónico*: `elduque@posta.unizar.es`