MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

CORTADURAS PARA ℓ^∞

LUIS ESPAÑOL Y M. CARMEN MÍNGUEZ

Dedicado a Chicho

Abstract. When we use the method of cuts to define real numbers we identify a subset of $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \times \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ by means of some formulas of the logic. This process also works with intuitionistic logic, so that it can be used in Grothendieck toposes. In this paper we show the bornological topos, which is a subtopos of the category of sets with an action of the monoid of all sequences of natural numbers. This topos is a suitable context to work with spaces of bounded sequences. We prove that ℓ^∞ is the object of Dedekind reals in the bornological topos.

1. Introducción

A lo largo de este trabajo, $\mathbb{M}$ será el monoide de todas las sucesiones de números naturales, es decir, de todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, con la operación de composición. Los ideales de $\mathbb{M}$ son los subconjuntos $I \subseteq \mathbb{M}$ tales que $g \circ f \in I$ siempre que $g \in I$ y $f \in \mathbb{M}$. Denotaremos con la letra Θ el conjunto de los ideales de $\mathbb{M}$. Reservamos la letra C para denotar el ideal de las constantes, con la biyección $C \cong \mathbb{N}$ que asocia a $n \in \mathbb{N}$ la función $c_n \in \mathbb{M}$ constante en dicho punto.

Todo espacio E de sucesiones acotadas admite una acción de $\mathbb{M}$ por composición,

$$E \times \mathbb{M} \to E, \quad (x, f) \mapsto x \circ f.$$

Por ello es adecuado elegir un contexto de conjuntos con una acción de este tipo para estudiar el espacio ℓ^∞ de las sucesiones reales acotadas. Llamaremos *m-conjuntos* a los conjuntos E dotados de una acción a derecha de $\mathbb{M}$, que denotaremos genéricamente $x \circ f$, cumpliendo las condiciones

$$x \circ id = x \ \ , \ \ x \circ (g \circ f) = (x \circ g) \circ f.$$

Cada ideal de $\mathbb{M}$, entre ellos el propio monoide, es un m-conjunto. A partir de un ideal I y de un elemento $f \in \mathbb{M}$ se obtiene un nuevo ideal

$$\langle f \in I \rangle = \{g \in \mathbb{M}; f \circ g \in I\}$$

y es fácil comprobar que esta operación es una acción a derecha de $\mathbb{M}$ sobre Θ (en este caso no usaremos la notación genérica $I \circ f$ porque puede inducir a confusión). Siempre que consideraremos Θ como un m-conjunto será con la acción anterior.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 18B25, 18F20, 46A17.

Key words and phrases. Topos, m-sets, real numbers, bounded sequences.

Este trabajo ha sido realizado con la ayuda a la investigación API00/A25 de la Universidad de La Rioja.

Las *m-aplicaciones* son las aplicaciones $H : E \to E'$ entre m-conjuntos que conservan la acción, es decir, que verifican

$$H(x \circ f) = H(x) \circ f.$$

De este modo se tiene una categoría $\mathcal{M}$ que contiene de modo natural a la categoría $\mathcal{S}$ de los conjuntos, pues basta verlos como m-conjuntos triviales con la acción dada por la proyección $X \times \mathbb{M} \to X$. La categoría $\mathcal{M}$ es un topos de Grothendieck (en lo sucesivo omitiremos el nombre del matemático francés para abreviar), lo que significa que tiene propiedades muy próximas a las de la categoría $\mathcal{S}$ y que en ella se interpreta la lógica intuicionista. Reduciremos la categoría $\mathcal{M}$ eliminando algunos m-conjuntos, entre ellos los triviales, pero manteniendo los espacios de sucesiones acotadas. Para ello exigiremos una propiedad de finitud que tiene ℓ^∞, en general los conjuntos de sucesiones acotadas, obteniendo así unos m-conjuntos particulares que llamaremos *b-conjuntos* y la correspondiente subcategoría plena $\mathcal{B}$, que será el *topos bornológico*. El estudio de este topos fue propuesto por Lawvere, en una conferencia no publicada impartida en Bogotá en 1983.

Los elementos *constantes* de un m-conjunto E son los que quedan invariantes por la acción de todos los elementos de $\mathbb{M}$ y forman un subconjunto de E que denotaremos $\Gamma(E)$. Por ejemplo, $\Gamma(X) = X$ si X es un conjunto (m-conjunto trivial), $\Gamma(\mathbb{M}) = C, \Gamma(X^{\mathbb{N}}) \cong X, \Gamma(\ell^\infty) \cong \mathbb{R}$, y $\Gamma(\Theta) = \{\emptyset, \mathbb{M}\}$. Puesto que las m-aplicaciones conservan constantes, si consideramos el m-conjunto trivial $1 = \{0\}$, que evidentemente es final, dar una m-aplicación $1 \to E$ equivale a dar un elemento constante de E. Por otro lado, los elementos de E se corresponden biyectivamente con las m-aplicaciones $\mathbb{M} \to E$ tomando la imagen de la identidad. Vemos pues que elementos generales y constantes se corresponden biyectivamente en $\mathcal{S}$ pero no en $\mathcal{M}$, porque el papel del conjunto final 1 en $\mathcal{S}$ se desdobla entre 1 y $\mathbb{M}$ en $\mathcal{M}$.

Para construir los conjuntos numéricos se parte del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, que podemos definir siguiendo a Lawvere (ver cualquiera de las referencias básicas sobre topos: [1], [4] o [6]) mediante la condición de tener un elemento distinguido (*cero*), $0 \in \mathbb{N}$, y una aplicación distinguida (*sucesor*), $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, de modo que se cumple la siguiente propiedad universal: para cada conjunto X con un elemento $x_0 \in X$ y una aplicación $h : X \to X$ distinguidos, existe una única aplicación $f : \mathbb{N} \to X$ tal que $f(0) = x_0$ y $f \circ \sigma = h \circ f$. Para que la definición se exprese plenamente en el lenguaje de las categorías basta ver los elementos $x \in X$ como aplicaciones $1 \to X$. Por tanto, en una categoría con un objeto final 1, la definición del objeto de los números naturales es una copia de la dada en $\mathcal{S}$.

Se pasa de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ haciendo un conjunto cociente en el producto $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ y se obtiene $\mathbb{Q}$ mediante otro cociente en el producto $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, donde $\mathbb{Z}^*$ es $\mathbb{Z}$ sin el cero. Cada una de estos conjuntos numéricos tiene operaciones de suma y producto con las propiedades habituales. Este proceso utiliza límites y colímites finitos, así que puede repetirse en las categorías que tengan un objeto de números naturales y admitan este tipo de construcciones universales. Más compleja es la ampliación de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ mediante las cortaduras, que expondremos en la versión de Tierney-Joyal, una de las varias disponibles [2] para ser interpretadas en los topos. En $\mathcal{M}$ las construcciones de estos objetos numéricos dan siempre los correspondientes conjuntos clásicos con la acción trivial, pero en $\mathcal{B}$ tendremos que hacer construcciones específicas, que darán como resultado que ℓ^∞ es el objeto de los números reales (según Dedekind) en dicho topos.

Este trabajo es deudor de la tesis doctoral de Lambán [5], donde se prueba el mismo resultado utilizando los axiomas de cortadura que aparecen en [4]. También es distinta la presentación que hacemos del tema, que está influenciada por el artículo [3], que es una reelaboración de un fragmento de [5]. Nuestro interés no es deducir las propiedades del topos bornológico descendiendo desde la teoría general de topos, sino que iremos exhibiendo directamente aquellas propiedades de $\mathcal{B}$, análogas a las de los conjuntos, que vayamos necesitando. Indicaremos sólo algunas demostraciones que vayan haciendo convincente la exposición, que no será formalmente completa, lo que se refleja en el método expositivo utilizado. En última instancia, pretendemos difundir los métodos de la teoría de topos y su aplicación a cuestiones matemáticas entre lectores no familiarizados con esta teoría general abstracta.

2. Sucesiones acotadas y b-conjuntos

Es claro que ℓ^∞ es un m-conjunto porque todo subconjunto de un conjunto acotado es acotado. La otra propiedad básica de los acotados es que la unión finita de acotados es de nuevo un acotado, luego todo subconjunto de una unión finita de acotados es acotado. En términos de sucesiones acotadas, dado un número finito $s_1, \dots s_r$ de ellas, si tomamos una sucesión s cuya imagen esté contenida en la unión de las imágenes de las s_i, resulta que la sucesión s también es acotada. Vamos a formular esta propiedad haciendo intervenir m-conjuntos y ello nos llevará a la noción de b-conjunto.

2.1. De ℓ^∞ a los b-conjuntos. Cada sucesión $s : \mathbb{N} \to X$ determina una m-aplicación $H : \mathbb{M} \to X^{\mathbb{N}}$ dada por $H(id) = s$, que verifica $H(c_n) = c_{s(n)}$, de modo que la sucesión se recupera a partir de H ya sea de un golpe, usando la identidad, o bien término a término por medio de las constantes. En general, si I es un ideal de $\mathbb{M}$ que contiene a C, una m-aplicación $H : I \to X^{\mathbb{N}}$ determina por medio de las constantes una única sucesión s tal que $H(f) = s \circ f$ para cada $f \in I$.

Volviendo a la propiedad relativa a un número finito de sucesiones reales acotadas, si funciones $g_i \in \mathbb{M}$, $1 \leq i \leq r$, son tales que sus imágenes forman una partición de $\mathbb{N}$, entonces el ideal $I = (g_1, \dots, g_r)$ contiene a las constantes y la m-aplicación $H : I \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definida por $H(g_i) = s_i$, con las sucesiones s_i acotadas dadas, determina una única sucesión s tal que $s \circ g_i = s_i$ para cada índice; luego la sucesión s también es acotada. Si las g_i forman un cubrimiento pero no una partición de $\mathbb{N}$, lo anterior sigue siendo válido pero las sucesiones s_i no pueden ser arbitrarias, sino que ha de ser $s_i \circ f = s_j \circ f$ siempre que $g_i \circ f = g_j \circ f$.

Diremos que un ideal I de $\mathbb{M}$ es *cubridor* si $\mathbb{N}$ queda cubierto por las imágenes de las funciones de I, y diremos que es *κ-cubridor* si contiene un número finito de funciones $g_1, \dots, g_r$ tales que

$$\mathbb{N} = \mathrm{Im} g_1 \cup \dots \cup \mathrm{Im} g_r \ .$$

Las g_i se pueden tomar de modo que el cubrimiento anterior sea una partición. Todo ideal κ-cubridor es cubridor y todo ideal cubridor contiene a las constantes. De lo anterior se sigue la siguiente propiedad:

Para cada ideal κ-cubridor I y cada m-aplicación $H : I \to \ell^\infty$, existe una única sucesión $s \in \ell^\infty$ tal que $H(f) = s \circ f$ para cada $f \in I$.

Llamaremos *b-conjunto* a todo m-conjunto E que verifique la propiedad anterior puesto en el lugar que en ella ocupa ℓ^∞. Si X es un conjunto, $X^{\mathbb{N}}$ es un b-conjunto. Por coherencia notacional, llamaremos *b-aplicaciones* a las m-aplicaciones entre b-conjuntos, que dan lugar al topos bornológico $\mathcal{B}$.

Los argumentos anteriores aplicados a ℓ^∞ valen para el b-conjunto X_β de las sucesiones β-acotadas de cualquier espacio bornológico (X, β), donde con β denotamos una bornología sobre el conjunto X. La bornología finita κ existe sobre cada conjunto X y da lugar al b-conjunto X_κ de las sucesiones con imagen finita. Igualmente, la bornología discreta τ da el b-conjunto $X_\tau = X^{\mathbb{N}}$. Nótese que $\Gamma(X_\beta) \cong X$ para cada bornología β sobre X. En particular, $\ell^\infty = \mathbb{R}_\beta$ siendo β la bornología real usual, $\mathbb{M} = \mathbb{N}_\tau$ y $\mathbb{N}_\kappa$ es un ideal de $\mathbb{M}$ que contiene a las constantes, pero que no es un ideal κ-cubridor.

Si E es un m-conjunto, un *m-subconjunto* de E será un subconjunto de E cerrado para la acción de $\mathbb{M}$, es decir, que él mismo sea un m-conjunto con la acción inducida. Los m-subconjuntos son cerrados por uniones e intersecciones, así que tenemos el retículo $\mathrm{Sub}_m(E)$ de los m-subconjuntos de E, con el caso particular $\Theta = \mathrm{Sub}_m(\mathbb{M})$. Más adelante nos interesaremos por el conjunto $\mathrm{Sub}(E)$ de los *b-subconjuntos* de un b-conjunto E, que son los m-subconjuntos de E que son también b-conjuntos. Por ejemplo, cada X_β es un b-subconjunto de $X^{\mathbb{N}}$.

En la definición anterior de b-conjunto, sólo podemos referirnos a un elemento $x \in E$ como si fuera una «sucesión» por analogía. En efecto, cada m-conjunto da lugar a una m-aplicación de E en un b-conjunto de sucesiones,

$$\mu : E \to \Gamma(E)^{\mathbb{N}}, \quad \mu(x)(n) = x \circ c_n ,$$

de modo que sólo cuando μ es inyectiva tiene propiamente sentido, al menos salvo biyección, decir que E es un espacio de sucesiones. Hay una aplicación de este tipo para cada m-conjunto E, pero sólo precisaremos la notación cuando sea imprescindible.

2.2. Bornologías y clausuras. La *extensión* $\mathrm{Ext}(U)$ de cada m-subconjunto U de $X^{\mathbb{N}}$ es la unión de las imágenes de las sucesiones $s \in U$. Es claro que U determina una bornología final β sobre su extensión, cuyos acotados son los subconjuntos $B \subseteq \mathrm{Ext}(U)$ contenidos en la unión de las imágenes de un número finito de sucesiones de U. Si asociamos a U el conjunto $\overline{U}$ de las sucesiones cuya imagen está contenida en $\mathrm{Ext}(U)$ y son β-acotadas, obtenemos una aplicación $\mathrm{Sub}_m(X^{\mathbb{N}}) \to \mathrm{Sub}_m(X^{\mathbb{N}})$ que tiene las propiedades de un operador clausura:

(C1) Es una aplicación expansiva e idempotente:

$$U \subseteq \overline{U}, \quad \overline{\overline{U}} \subseteq \overline{U}.$$

(C2) Conserva intersecciones finitas: $\overline{U \cap V} = \overline{U} \cap \overline{V}$.

Como hemos visto, cada $\overline{U}$ es un b-subconjunto de $X^{\mathbb{N}}$, así que el operador clausura transforma un m-subconjunto de $X^{\mathbb{N}}$ en un b-subconjunto de $X^{\mathbb{N}}$. Más aún, la clausura es el mínimo b-subconjunto que contiene a un m-conjunto dado y todos los b-subconjuntos son de esta forma, propiedades que se deducen fácilmente de esta otra:

> Para cada m-aplicación $u : U \to E$ en un b-conjunto E, existe una única b-aplicación $\overline{u} : \overline{U} \to E$ que extiende a u.

Dada $s \in \overline{U}$, determinaremos $\overline{u}(s) \in E$ mediante una m-aplicación $H : J \to E$ definida sobre un ideal κ-cubridor. La idea es usar el ideal $J = \{g \in \mathbb{M}; s \circ g \in U\}$ como dominio de la m-aplicación $H(g) = u(s \circ g)$ que defina $\overline{u}(s)$. Entre los detalles a probar, el más importante es que J es un ideal κ-cubridor. En efecto, por ser β-acotada la sucesión s, su imagen estará contenida en la unión de las imágenes de sucesiones $s_1, \ldots, s_r \in U$, y tomando las imágenes inversas A_i por s de las imágenes de cada s_i resulta un cubrimiento finito de $\mathbb{N}$. Tomemos ahora $g_i \in \mathbb{M}$ cuya imagen sea A_i y obtendremos que la imagen de $s \circ g_i$ está contenida en la de $s_i \in U$, de donde se sigue que g_i pertenece a J; luego J es un ideal κ-cubridor.

Conviene notar que el ideal J anterior está asociado al par (s, U), significando un cierto «valor de verdad» de la relación de pertenencia cuyo máximo es $\mathbb{M}$. Se tiene en efecto $s \in U$ si y sólo si $J = \mathbb{M}$, pero el mínimo, $J = \emptyset$, significa que la órbita $(s) = \{s \circ f; f \in \mathbb{M}\}$ no corta a U, condición mucho más exigente en general que la conjuntista $s \notin U$. Volveremos sobre esta cuestión, pero de momento nos limitaremos a dejar constancia de la siguiente notación que ya hemos usado para ideales:

$$\langle s \in U \rangle = \{f \in \mathbb{M}; s \circ f \in U\}.$$

Si llamamos $\mathbb{J}$ al conjunto de todos los ideales κ-cubridores, podemos expresar la clausura de los m-subconjuntos de sucesiones de la forma

$$\overline{U} = \{s \in X^{\mathbb{N}}; \langle s \in U \rangle \in \mathbb{J}\}.$$

Esta expresión define la clausura de m-subconjuntos de un b-conjunto E arbitrario, resultando las mismas propiedades que hemos visto en el caso $E = X^{\mathbb{N}}$, por ejemplo,

$$\mathrm{Sub}(E) = \{U \in \mathrm{Sub}_m(E); U = \overline{U}\}.$$

Es bien conocido [6] que las propiedades del operador clausura se corresponden completamente con las siguientes propiedades de $\mathbb{J}$:

> (J1) $\mathbb{J}$ es un m-subconjunto de Θ que contiene a $\mathbb{M}$.
> (J2) Si $I \in \Theta$, con $\langle g \in I \rangle \in \mathbb{J}$ para cada $g \in J \in \mathbb{J}$, entonces $I \in \mathbb{J}$.

De estas propiedades se deduce con facilidad que $\mathbb{J}$ es cerrada por intersecciones finitas y por contenidos crecientes. En la terminología de la teoría de topos, $\mathbb{J}$ es una *topología (de Grothendieck)* por verificar (J1) y (J2), un b-conjunto es un $\mathbb{J}$-*haz* y $\mathcal{B}$ es el correspondiente topos formado por estos haces. Pero en este trabajo no suponemos el conocimiento de la teoría general, así que seguiremos sumergidos en el caso particular que nos ocupa.

2.3. b-ideales. Vamos a particularizar lo anterior al b-conjunto $\mathbb{M}$. En este caso, la clausura es el valor de verdad $\overline{I} = \langle I \in \mathbb{J} \rangle$, de modo que $\mathbb{J} = \{I \in \Theta; \overline{I} = \mathbb{M}\}$. Denotaremos con la letra Ω el conjunto $\mathrm{Sub}(\mathbb{M})$ de todos los b-ideales, siendo por tanto

$$\Omega = \{\overline{I}; I \in \Theta\} = \{I \in \Theta; I = \overline{I}\}.$$

Es claro pues que $\mathbb{M}$ es el único b-ideal que es κ-cubridor. Se tiene además

$$\overline{\langle f \in I \rangle} = \langle f \in \overline{I} \rangle,$$

lo que significa que $\langle f \in I \rangle$ es b-ideal si I lo es, luego Ω es un m-subconjunto de Θ (con los mismos elementos constantes) y la clausura proporciona una m-aplicación $\Theta \to \Omega$. Es fácil verificar que Θ y Ω no son m-conjuntos de sucesiones (las aplicaciones 'μ' respectivas no son inyectivas). Además, Θ no es un b-conjunto. En efecto, tomando el ideal κ-cubridor $J = (c_0, \sigma)$ y la m-aplicación $H : J \to \Theta$ definida por $H(c_0) = C$, $H(\sigma) = \mathbb{M}$, no puede existir un ideal I tal que $H(c_0) = \langle c_0 \in I \rangle$, pues el segundo miembro de esta igualdad sólo puede valer $\emptyset$ o $\mathbb{M}$. Se tiene, sin embargo:

Ω es un b-conjunto.

En efecto, sea $J \in \mathbb{J}$ y $H : J \to \Omega$ una m-aplicación. Tomemos la clausura $\overline{I} \in \Omega$ del ideal $I = H^{-1}(\mathbb{M})$. Se comprueba sin dificultad que, para cada $g \in J$, es $H(g) = \langle g \in I \rangle$, por lo que $\langle g \in I \rangle$ es b-ideal y por tanto igual a su clausura, es decir, $H(g) = \langle g \in \overline{I} \rangle$. Si suponemos ahora que para cada $g \in J$ es $H(g) = \langle g \in I' \rangle$ con $I' \in \Omega$, tenemos que probar que $I' = \overline{I}$. Que $\overline{I} \subseteq I'$ es inmediato. Para el contenido inverso se prueba la relación $I' \cap J \subseteq I$ y se toman clausuras en ella.

Dado un b-conjunto E y un b-subconjunto U, tenemos una b-aplicación $E \to \Omega$ que asocia a cada $x \in E$ el valor de verdad $\langle x \in U \rangle$; esto nos da una aplicación $E \times \mathrm{Sub}(E) \to \Omega$. Un ejemplo interesante es la igualdad en E, que corresponde al b-conjunto $E \times E$ y al b-subconjunto diagonal; en este caso se obtiene la b-aplicación $E \times E \to \Omega$, llamada *b-igualdad*, que a cada par (x, y) asocia el b-ideal

$$\langle x = y \rangle = \{f \in \mathbb{M}; x \circ f = y \circ f\}.$$

En lo sucesivo usaremos la misma notación $\langle xRy \rangle$ para cualquier otra b-relación R en E. Cada sucesión $s \in X_\kappa$ define el ideal κ-cubridor $C_s = \langle s \in X \rangle$, donde se ha identificado X con las constantes de X_κ, lo que haremos habitualmente. Entonces resulta $\langle s = x \rangle = \emptyset$ excepto cuando sea $x \in \mathrm{Im}(s)$ y por tanto, si $\mathrm{Im}(s) = \{x_1, \ldots, x_r\}$, resulta

$$C_s = \langle s = x_1 \rangle \cup \cdots \cup \langle s = x_r \rangle.$$

Es claro que la intersección de b-ideales es de nuevo un b-ideal, pero no sucede lo mismo con las uniones. Por ejemplo, C_s es un ideal κ-cubridor que es unión finita de b-ideales pero no es un b-ideal salvo en el caso $C_s = \mathbb{M}$, que corresponde a las sucesiones constantes. No obstante, Ω tendrá los supremos que corresponden a las intersecciones arbitrarias, que son las clausuras de las uniones de b-ideales; resulta así que Ω es un álgebra de Heyting completa. Dados b-ideales I, J, denotaremos su supremo mediante

$$I \vee J = \overline{I \cup J}\ .$$

3. El topos bornológico

Ya estamos en condiciones de abordar las propiedades básicas del topos bornológico, la subcategoría plena $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}$ formada por los b-conjuntos. Como la categoría $\mathcal{S}$ no es una subcategoría de $\mathcal{B}$, lo primero que haremos será ocuparnos de la relación entre los conjuntos ordinarios y los b-conjuntos. Luego veremos la manera en que el topos bornológico se parece a la categoría de los conjuntos al modo intuicionista.

3.1. Funtores básicos. Las relaciones inmediatas entre los topos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{S}$ son los funtores

$$(-)_\kappa : \mathcal{S} \to \mathcal{B}\,, \quad \Gamma : \mathcal{B} \to \mathcal{S}\,, \quad (-)^{\mathbb{N}} : \mathcal{S} \to \mathcal{B}\,,$$

cuya definición sobre los objetos ya conocemos y que se completan sobre los morfismos del modo natural. Por ejemplo, la aplicación $\Gamma(H) : \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ es la restricción a los elementos constantes de la b-aplicación $H : E \to E'$. En particular, dado $x \in E$, la b-aplicación $H : \mathbb{M} \to E$ definida por $H(id) = x$, da lugar a $\Gamma(H) : C \to \Gamma(E)$, que coincide con $\mu(x) : \mathbb{N} \to \Gamma(E)$ salvo biyección.

El funtor $(-)_\kappa$ es adjunto a izquierda de Γ. Un hecho esencial de esta propiedad es que para cada X hay una aplicación inyectiva obvia (constantes) $c : X \to X_\kappa$ con la siguiente propiedad universal:

> Para cada b-conjunto E y cada aplicación $u : X \to \Gamma(E)$ existe una única b-aplicación $\hat{u} : X_\kappa \to E$ tal que $\hat{u} \circ c = u$.

Para definir $\hat{u}(s) \in E$ se toman el ideal C_s y la m-aplicación $H : C_s \to E$, $H(f) = u(x)$, donde x es el valor constante de $s \circ f$. Por ser E un b-conjunto, existe un único $\hat{u}(s) \in E$ tal que $\hat{u}(s) \circ f = u(x)$ para cada $f \in C_s$. Definida $\hat{u}$, se comprueba sin dificultad que cumple las propiedades requeridas.

Queda así establecida una biyección entre las b-aplicaciones de X_κ en E y la aplicaciones de X en $\Gamma(E)$. En particular, las sucesiones de elementos constantes en un b-conjunto E, $\mathbb{N} \to \Gamma(E)$, se corresponden con las b-aplicaciones $\mathbb{N}_\kappa \to E$ (recordar que las «sucesiones» $x \in E$ lo hacen con las b-aplicaciones $\mathbb{M} \to E$). Si nos fijamos en $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \cong 2_\kappa$, las b-aplicaciones $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to E$ están en biyección con los pares de elementos constantes de E. Esto significa que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es el coproducto del b-conjunto final 1 consigo mismo en el topos bornológico, es decir, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ juega en $\mathcal{B}$ uno de los papeles que 2 juega en $\mathcal{S}$, el de ser la unión disjunta de dos copias del conjunto final 1. El otro papel que 2 juega en $\mathcal{S}$ es clasificar los subconjuntos mediante las aplicaciones características. Veremos que en $\mathcal{B}$ este papel está reservado a Ω y no a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$; así que, como ya hemos notado respecto a 1, los dos papeles conjuntistas que juega 2 corresponden a b-conjuntos diferentes.

Por otra parte, Γ es adjunto a izquierda de $(-)^{\mathbb{N}}$, siendo la unidad de la adjunción la transformación natural definida por las b-aplicaciones μ definidas en la sección anterior para cada b-conjunto E. Al lector no familiarizado con esta terminología le bastará saber que se tiene la siguiente propiedad universal:

> Para cada b-aplicación $H : E \to X^{\mathbb{N}}$ existe una única $h : \Gamma(E) \to X$ tal que $h^{\mathbb{N}} \circ \mu = H$.

La prueba se basa en tomar la aplicación h restringiendo H a las constantes y luego $h^{\mathbb{N}}(s) = h \circ s$. En particular, las b-aplicaciones $Y^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$ se corresponden biyectivamente con las aplicaciones $Y \to X$.

Las adjunciones anteriores implican que el funtor $(-)^{\mathbb{N}}$ conserva límites, que Γ conserva límites y colímites y que $(-)_\kappa$ conserva colímites; además se prueba sin dificultad que $(-)_\kappa$ conserva límites finitos.

3.2. Partes de un b-conjunto. Además de los b-ideales ya tratados, tiene sentido que consideremos familias de b-ideales parametrizadas por un conjunto X arbitrario, es decir, aplicaciones (conjuntistas) de la forma $a : X \to \Omega$; denotamos con la notación exponencial habitual Ω^X el conjunto de todas ellas, que convertimos en un m-conjunto con la acción $a \odot f$ dada por

$$(a \odot f)(x) = \langle f \in a(x) \rangle.$$

Por tanto, $\Gamma(\Omega^X) \cong \mathcal{P}(X)$ y la representación de Ω^X en un b-conjunto de sucesiones es la m-aplicación

$$\mu : \Omega^X \to \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}} \ \ , \ \ \mu(a)(n) = \{x \in X; c_n \in a(x)\}.$$

Ω^X no es un m-conjunto de sucesiones: si a es la constante en $\mathbb{N}_\kappa$ y b la constante en $\mathbb{M}$ se tiene $\mu(a) = \mu(b)$, luego μ no es inyectiva. Pero

Ω^X es un b-conjunto.

La demostración se basa en la dada para Ω (caso $X = 1$) utilizando que una m-aplicación $J \to \Omega^X$ equivale a una familia de m-aplicaciones $J \to \Omega$ parametrizada por X.

Es notorio que se puede obtener de igual modo un b-conjunto E^X para cada b-conjunto E. Entonces, dar una b-aplicación $F \to E^X$ equivale a dar una b-aplicación $X \times F \to E$. Por otra parte, siendo F un b-conjunto, la b-aplicación $c \times id : X \times F \to X_\kappa \times F$ tiene la misma propiedad universal que ya demostramos para c (la prueba sigue el esquema de la dada entonces) y por tanto dar una b-aplicación $X \times F \to E$ equivale a dar una b-aplicación $X_\kappa \times F \to E$. Se tiene en definitiva, como sucede en la exponenciación conjuntista:

Dar una b-aplicación $u : F \to E^X$ equivale a dar una b-aplicación $\hat{u} : X_\kappa \times F \to E$, siendo $\hat{u}((s,y))$ el único elemento de E tal que

$$\hat{u}((s,y)) \circ f = u(y \circ f)(x),$$

para cada $f \in C_s$, con $s \circ f = x$.

El lector que conozca la teoría de topos habrá advertido que en este artículo no desarrollamos la exponenciación general del topos, de la forma E^F con E y F b-conjuntos. Cuando $F = X_\kappa$ esta exponenciación general equivale a la variante E^X que hemos expuesto.

Vamos a buscar una caracterización de $\mathcal{P}(X)$ en el lenguaje de las categorías aplicado a $\mathcal{S}$, para luego reproducirla en el topos $\mathcal{B}$ de los b-conjuntos. Dado X, resulta que $\mathcal{P}(X)$ es un conjunto con una relación $(\in) \subseteq X \times \mathcal{P}(X)$ que tiene esta propiedad universal:

> Para cada conjunto Y y cada relación $R \subseteq X \times Y$ existe una única aplicación $r : Y \to \mathcal{P}(X)$ tal que xRy si y sólo si $x \in r(y)$, es decir, $(id \times r)^{-1}(\in) = R$.

En la categoría $\mathcal{B}$ los productos finitos, las imágenes inversas y las relaciones son como en los conjuntos y los m-conjuntos, tomando las acciones evidentes en cada caso, y podemos reproducir la propiedad anterior. Dado un b-conjunto E, buscamos un b-conjunto $\mathcal{P}_b(E)$ con una b-relación $(\in) \subseteq E \times \mathcal{P}_b(E)$, es decir, un b-subconjunto de dicho producto, tal que para cada b-conjunto E' y b-relación $R \subseteq E \times E'$ exista una única b-aplicación $r : E' \to \mathcal{P}_b(E)$ verificando xRx' si y sólo si $(id \times r)^{-1}(\in) = R$, es decir, $x \in r(x')$. Este b-conjunto cumplirá

$$\Gamma(\mathcal{P}_b(E)) \cong \mathrm{Sub}(E).$$

En el caso $E = 1$ esto equivale a encontrar en el topos bornológico el análogo del conjuntista $\mathcal{P}(1) \cong 2$ como clasificador de subconjuntos a través de las aplicaciones características. Con lo que ya sabemos, es natural sospechar que será $\mathcal{P}_b(1) = \Omega$. Se tiene, en efecto:

> Para cada b-subconjunto $U \subseteq E$, existe una única b-aplicación $\varphi : E \to \Omega$ tal que $U = \varphi^{-1}(\mathbb{M})$; a saber, $\varphi(x) = \langle x \in U \rangle$.

Resulta pues que 2 es el conjunto de los valores de verdad en $\mathcal{S}$, mientras que Ω lo es en $\mathcal{B}$, siendo el primero biyectivo con el conjunto de los elementos constantes del segundo. Nótese que la m-aplicación característica anterior está definida con valores en Θ para cada m-subconjunto U y que factoriza por Ω si y sólo si U es un b-conjunto.

Ahora pasamos al caso general, pero lo haremos tan sólo (como en la exponenciación) para b-conjuntos de la forma X_κ, por razones de brevedad y dado que el ejemplo de aplicación que tenemos a la vista es $\mathbb{Q}_\kappa$. Ya que un subconjunto de X viene dado por su aplicación característica $X \to 2$, es plausible pensar que ahora deberíamos tomar el b-conjunto

$$\mathcal{P}_b(X_\kappa) = \Omega^X.$$

A su vez, la analogía conjuntista sugiere definir $(\in) \subseteq X_\kappa \times \Omega^X$ de modo que su b-aplicación característica $\varepsilon : X_\kappa \times \Omega^X \to \Omega$ esté asociada por exponenciación con la identidad en Ω^X. El cálculo exponencial nos conduce a tomar

$$\varepsilon((s,a)) = \bigvee_i [\langle s = x_i \rangle \cap a(x_i)],$$

de modo que la b-relación $(\in)$ queda descrita por

$$s \in a \text{ si y sólo si } \langle s = x_i \rangle \subseteq a(x_i)\ ,\ 1 \leq i \leq r\ .$$

Comprobar que esta b-relación tiene la propiedad universal requerida es una mera aplicación de la conversión exponencial.

3.3. La lógica de los b-conjuntos. El conjunto Ω de los valores de verdad del topos bornológico tiene estructura de álgebra de Heyting completa; en realidad de b-álgebra, pues todas sus operaciones son b-aplicaciones. En el retículo Ω se define la implicación $I \Rightarrow J$ como el supremo de los b-ideales K tales que $K \cap I \subseteq J$ y resulta ser el valor en el par (I, J) de la b-aplicación característica de la relación de orden en Ω, es decir,

$$(I \Rightarrow J) = \{f \in \mathbb{M}; \langle f \in I \rangle \subseteq \langle f \in J \rangle\}.$$

Una implicación particular es la negación $\neg I = (I \Rightarrow \emptyset)$, siendo la doble negación

$$\neg\neg I = \{f \in \mathbb{M}; \forall g \in \mathbb{M}, \exists h \in \mathbb{M}, f \circ g \circ h \in I\}.$$

Notando que $\neg\neg\mathbb{N}_\kappa = \mathbb{M}$ se observa el carácter no booleano de Ω. Los ideales complementados (iguales a su doble negación) forman la parte booleana de Ω, que es isomorfa a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Las operaciones lógicas de Ω se trasladan a cada conjunto $\mathrm{Sub}(E)$ a través de las b-aplicaciones características. De este modo quedan sentadas las bases del cálculo de proposiciones intuicionista interpretable en b-conjuntos. Cada fórmula $P(x)$ con una variable libre x de tipo E tendrá como tabla de verdad la b-aplicación característica $\varphi : E \to \Omega$ del b-subconjunto $U = \{x; P(x)\}$ extensión de la fórmula. Ahora extenderemos estas consideraciones a los cuantificadores.

Supongamos un b-subconjunto $W = \{(x, y); P(x, y)\}$ de $E \times F$ y vamos a calcular el b-subconjunto de E

$$\forall_y W = \{x; (\forall y)P(x, y)\}.$$

Siguiendo la analogía conjuntista, este b-subconjunto estará caracterizado por ser, usando siempre b-conjuntos, $U \subseteq \forall_y W$ si y sólo si $U \times F \subseteq W$. Por tanto, dado $x \in E$, será $x \in \forall_y W$ si y sólo si $(x) \times F \subseteq W$, es decir:

> Se verifica $x \in \forall_y W$ si y sólo si para cada $f \in \mathbb{M}$ y para cada $y \in F$ se tiene $(x \circ f, y) \in W$.

Haremos ahora lo mismo con el b-subconjunto de E

$$\exists_y W = \{x; (\exists y)P(x, y)\},$$

siendo en este caso $\exists_y W \subseteq U$ si y sólo si $W \subseteq U \times F$. Esto significa que $\exists_y W$ es la clausura en E de la proyección de W, es decir:

> Se verifica $x \in \exists_y W$ si y sólo si existe un ideal $J \in \mathbb{J}$ tal que para cada $g \in J$ existe $y \in F$ tal que $(x \circ g, y) \in W$.

Veamos algunos ejemplos. Cada b-conjunto $\mathbb{R}_\beta$ es un anillo (que entenderemos siempre conmutativo y unitario) y la suma y el producto son b-aplicaciones, así que es un anillo en la categoría $\mathcal{B}$, es decir, un *b-anillo*. La fórmula $x = 0$ será satisfecha por aquellas sucesiones s tales que para cada $f \in \mathbb{M}$ se verifique $s \circ f = 0$, lo que, usando las constantes, equivale a decir $s(n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$; de modo que la b-igualdad coincide con la igualdad conjuntista. Pero no sucede lo mismo si negamos la igualdad, pues una sucesión s satisface la fórmula $\neg(x = 0)$ si para cada $f \in \mathbb{M}$ verifica $s \circ f \neq 0$, lo que equivale a decir $s(n) \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esta condición es mucho más exigente que la desigualdad conjuntista, por eso conviene mantener notaciones diferenciadas, aunque coincidan en las constantes. Notar que $\{0\} \cup \neg\{0\} \neq \mathbb{R}_\beta$, pero $\{0\} \vee \neg\{0\} = \mathbb{R}_\beta$, es decir, $\mathbb{R}_\beta$ satisface la fórmula

$$x = 0 \quad \vee \quad \neg(x = 0).$$

En conjuntos, el anillo $\mathbb{R}_\beta$ tiene divisores de cero, es decir, no verifica la fórmula

$$xy = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \;\vee\; y = 0.$$

En cambio, en el topos bornológico resulta que $\mathbb{R}_\beta$ es un b-anillo sin divisores de cero. En efecto, dadas $s, t \in \mathbb{R}_\beta$ tales que $st = 0$, los conjuntos de naturales en los que cada sucesión se anula, respectivamente A, B, cubren $\mathbb{N}$ y puede suponerse que son las imágenes de sendas funciones $g, h \in \mathbb{M}$; así que el ideal (g, h) está en $\mathbb{J}$ y es $s \circ g = 0,\ t \circ h = 0$. El mismo razonamiento se aplica cambiando s, t por $s \circ f,\ t \circ f$ para cada $f \in \mathbb{M}$, de modo que la fórmula propuesta queda satisfecha. Por tanto, si calculamos el b-subconjunto E_β de los elementos idempotentes en el b-anillo $\mathbb{R}_\beta$ obtendremos las sucesiones que verifican

$$x = 0 \;\vee\; x = 1,$$

es decir, las sucesiones e_A que valen 1 si $n \in A$ y 0 en caso contrario, con $A \subseteq \mathbb{N}$. Resulta pues $E_\beta \cong \mathcal{P}(\mathbb{N})$, lo que nos dice que $\mathbb{R}_\beta$ no tiene idempotentes «no triviales».

Finalmente unos ejemplos con $\Omega^{\mathbb{Q}}$. Tomemos $\mu : \Omega^{\mathbb{Q}} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ y denotemos la sucesión $\mu(a)$ de la forma $\{A_n\}$, siendo $A_n = \{q \in \mathbb{Q}; c_n \in a(q)\}$. Una vez fijada la aplicación $c_\emptyset$ constante en el ideal vacío, escribir la condición conjuntista $a \neq c_\emptyset$ significa que existe un racional q tal que $a(q)$ es un b-ideal no vacío; por tanto existen un natural n y un racional q tales que $q \in A_n$. Más selectiva es la condición $\neg(a = c_\emptyset)$ de la lógica interna del topos bornológico, pues significa que para cada $f \in \mathbb{M}$ existen $q \in \mathbb{Q}$ y $g \in \mathbb{M}$ tales que $f \circ g \in a(q)$. Con $f = id$ se obtiene la desigualdad conjuntista y con las constantes resulta que para cada natural n existe un racional q_n tal que $c_n \in a(q_n)$, es decir, cada A_n es no vacío. Todavía más fuerte es la condición

$$\exists x\,, \quad x \in a\,,$$

referida a $\mathbb{Q}_\kappa \times \Omega^{\mathbb{Q}}$. Que a satisface esta fórmula significa que existe un ideal $J \in \mathbb{J}$ tal que para cada $g \in J$ existe una sucesión $s \in \mathbb{Q}_\kappa$ tal que $s \in a \odot g$, es decir, $\langle s = q\rangle \subseteq \langle g \in a(q)\rangle$ para cada q en la imagen (finita) de s.

4. Cortaduras de Dedekind

Repasaremos la construcción de los primeros b-conjuntos numéricos y veremos que $\mathbb{Q}_\kappa$ es el b-conjunto de los racionales y tiene una relación de orden total estricto a partir de la cual se establecen las fórmulas de las cortaduras, que terminaremos calculando.

4.1. Los b-racionales y el orden. Si transformamos la aplicación sucesor $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por el funtor $(-)_\kappa$ resulta la b-aplicación $\sigma_\kappa : \mathbb{N}_\kappa \to \mathbb{N}_\kappa\ ,\ \sigma_\kappa(f) = \sigma \circ f$. Con ella se puede comprobar directamente la primera de las tres afirmaciones siguientes, relativas a los primeros objetos numéricos en el topos bornológico:

> $\mathbb{N}_\kappa$, $\mathbb{Z}_\kappa$, $\mathbb{Q}_\kappa$ son, respectivamente, los b-conjuntos de números naturales, enteros y racionales.

Las dos últimas son consecuencia de propiedades de conservación de colímites y de límites finitos por parte del funtor $(-)_\kappa$, pero no entraremos ahora en estos detalles técnicos. El objetivo final de este artículo es probar que aplicando las cortaduras a $\mathbb{Q}_\kappa$ se obtiene ℓ^∞ y no $\mathbb{R}_\kappa$, lo que sucede porque $(-)_\kappa$ no conserva toda la lógica.

Definimos del modo natural la relación de orden estricto $s < t$ en $\mathbb{Q}_\kappa$:

$$s(n) < t(n) \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Obtenemos así una relación $(<) \subset \mathbb{Q}_\kappa \times \mathbb{Q}_\kappa$, que es precisamente la extensión universal (recordar que $(-)_\kappa$ conserva productos finitos) de la relación de orden estricto ordinaria de $\mathbb{Q}$. La relación $s < t$ satisface las siguientes fórmulas de la lógica interna del topos bornológico:

(O1) $\forall x,\ \ \neg(x < x)$
(O2) $\forall x,\ \forall y,\ \ (x < y) \vee (y < x) \vee (x = y)$
(O3) $\forall x,\ \forall y,\ \forall z,\ \ (x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)$

Nos fijaremos tan sólo en la segunda. Si los racionales p_i forman la imagen (finita) de s, sea $A_i = s^{-1}(p_i)$. Análogamente, usaremos letras q, B para otra sucesión t. Con esta notación $s < t$ equivale a

$$\langle s = p_i\rangle \cap \langle t = q_j\rangle \neq \emptyset \quad \text{implica} \quad p_i < q_j\,.$$

En general, dadas dos sucesiones s y t, tenemos el ideal κ-cubridor

$$C_s \cap C_t = \bigcup_{i,j} \langle s = p_i\rangle \cap \langle t = q_j\rangle$$

y estas intersecciones las podemos agrupar en tres bloques aplicando la tricotomía a las relaciones $p_i < q_j$, de modo que $C_s \cap C_t$ queda como unión de tres ideales, cada uno de los cuales nos da la condición correspondiente entre las requeridas en la fórmula (O2).

Ahora podemos definir $x \leq y$ como una abreviatura de $(x < y) \vee (x = y)$ y también comprobar que dicha fórmula equivale a $\neg(y < x)$ y que se interpreta como el b-subconjunto de los pares se sucesiones s, t tales que $s(n) \leq t(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como es habitual, con estas relaciones de orden podemos definir intervalos, por ejemplo $(s,t) = \{x \in \mathbb{Q}_\kappa; s < x < t\}$, y también valores de verdad, es decir, b-ideales como $\langle s < t\rangle = \{f \in \mathbb{M}; s \circ f < t \circ f\}$. Es claro que estas relaciones de orden pueden definirse de igual modo en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y en otros b-conjuntos intermedios entre éste y $\mathbb{Q}_\kappa$. Así, con $s \in \mathbb{Q}_\kappa$ y $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, se tendrán, entre otros, intervalos de la forma (s,r) o valores de verdad de la forma $\langle s < r\rangle$; en particular, si q es un racional identificado con la sucesión constante en dicho valor, será $\langle q < r\rangle = \{f \in \mathbb{M}; q < r \circ f\}$. Pero debe notarse que la propiedad (O2) no se verifica en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y tampoco en ℓ^∞, aunque sí en $\mathbb{R}_\kappa$.

4.2. Cortaduras de b-racionales. Una *b-cortadura* de $\mathbb{Q}_\kappa$ es un par

$$(a,b) \in \mathcal{P}_b(\mathbb{Q}_\kappa) \times \mathcal{P}_b(\mathbb{Q}_\kappa)$$

que verifica la fórmula (D) que resulta como conjunción de las siguientes:

(D1) $\forall x, \forall y\,,\ (x \in a\ \wedge\ y \in b\ \ \Rightarrow\ \ x < y)$
(D2) $\forall x, \forall y\,,\ (x < y\ \ \Rightarrow\ \ x \in a\ \vee\ y \in b)$
(D3) $\forall x\,,\ (x \in a\ \ \Rightarrow\ \ \exists z\,,\ z \in a\ \wedge\ x < z)$
(D4) $\forall y\,,\ (y \in b\ \ \Rightarrow\ \ \exists z\,,\ z \in b\ \wedge\ z < y)$
(D5) $(\exists x\,,\ x \in a)\ \wedge\ (\exists y\,,\ y \in b)$

La interpretación de esos axiomas es la siguiente:

(D1) Para cada $f \in \mathbb{M}$, cada $s, t \in \mathbb{Q}_\kappa$ y cada $g \in \mathbb{M}$, si $s \circ g \in a \odot (f \circ g)$ y $t \circ g \in b \odot (f \circ g)$ entonces $s \circ g < t \circ g$.

(D2) Para cada $f \in \mathbb{M}$, cada $s, t \in \mathbb{Q}_\kappa$ y cada $g \in \mathbb{M}$, si $s \circ g < t \circ g$ entonces existe un ideal $I \in \mathbb{J}$ tal que para cada $h \in I$ se tiene o bien $s \circ g \circ h \in a \odot (f \circ g \circ h)$ o bien $t \circ g \circ h \in b \odot (f \circ g \circ h)$.

(D3) Para cada $f \in \mathbb{M}$, $s \in \mathbb{Q}_\kappa$ y cada $g \in \mathbb{M}$, si $s \circ g \in a \odot (f \circ g)$ entonces existe un ideal $I \in \mathbb{J}$ tal que para cada $h \in I$ existe una sucesión s' tal que $s' \in a \odot (f \circ g \circ h)$ y $s \circ g \circ h < s'$.

La fórmula (D4) es como (D3) y (D5) se dio como ejemplo al final de la sección anterior. Hay que tener en cuenta que al verificar estas fórmulas será suficiente considerar el caso $f = g = id$.

El b-subconjunto obtenido como extensión de la fórmula (D) lo denotaremos

$$\mathbb{R}_b \subset \mathcal{P}_b(\mathbb{Q}_\kappa) \times \mathcal{P}_b(\mathbb{Q}_\kappa),$$

de modo que será $\Gamma(\mathbb{R}_b) \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \times \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Pero Γ conserva (salvo isomorfismos) todas las construcciones del topos que se requieren para la lógica, así que $\Gamma(\mathbb{R}_b) \cong \mathbb{R}$. La m-aplicación «$\mu$» correspondiente a $\mathbb{R}_b$ será la restricción de la correspondiente al producto de $\mathcal{P}_b(\mathbb{Q}_\kappa)$ consigo mismo, que denotaremos μ_2 y asocia a cada par (a, b) un par $(\{A_n\}, \{B_n\})$ de sucesiones de subconjuntos de los racionales. Si (a, b) verifica (D), entonces cada par (A_n, B_n) será una cortadura conjuntista y definirá por tanto un número real r_n, dando lugar a una sucesión real r. El resultado que motiva este trabajo es el siguiente:

TEOREMA. $\mu : \mathbb{R}_b \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ induce un b-isomorfismo $\mathbb{R}_b \cong \ell^\infty$.

Organizaremos la demostración en varios pasos usando el b-subconjunto R_b obtenido como extensión de (D1) a (D4), de modo que $\mathbb{R}_b$ es el b-subconjunto de R_b extensión de la fórmula (D5). Los pasos serán estos cuatro:

Paso 1. μ factoriza por ℓ^∞.
Paso 2. μ es inyectiva.
Paso 3. Existe $\gamma : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to R_b$ tal que $\mu_2(\gamma(r)) = r$.
Paso 4. $\gamma(\ell^\infty) \subseteq \mathbb{R}_b$.

Vamos con la demostración paso a paso:

Paso 1. Sea (a, b) una b-cortadura. Ya que a verifica la primera parte de (D5), existen funciones $g_1, \ldots, g_r$ tales que sus imágenes cubren $\mathbb{N}$ y para cada índice $1 \le i \le r$ existe una sucesión s_i de racionales con imagen finita $\{q_{i1}, \ldots, q_{ik_i}\}$, verificándose $\langle s_i = q_{ij} \rangle \subseteq \langle g_i \in a(q_{ij}) \rangle$. Cada $n \in \mathbb{N}$ será de la forma $n = g_i(m)$ con $s_i(m) = q_{ij}$, así que $c_m \in \langle s_i = q_{ij} \rangle \subseteq \langle g_i \in a(q_{ij}) \rangle$ y $c_n = g_i \circ c_m \in a(q_{ij})$, es decir, $q_{ij} \in A_n$. Si Q es el conjunto (finito) de todos los racionales q_{ij}, entonces se tiene $Q \cap A_n \neq \emptyset$ para cada n. Pero cada A_n es una sección inferior, pues (A_n, B_n) es una cortadura, así que basta tomar el mínimo de Q para encontrar un racional que está en todos los A_n. En conclusión, $\bigcap_n A_n \neq \emptyset$, lo que quiere decir que la sucesión $r = \mu((a,b))$ es acotada inferiormente. Por análogas razones será $\bigcap_n B_n \neq \emptyset$, luego la sucesión r es acotada.

Paso 2. Sea una b-cortadura (a,b) y sea $r = \{(A_n, B_n)\}$ la sucesión real correspondiente. Veamos que esta sucesión permite recuperar la b-cortadura en la forma

$$a(q) = \bigcup_{q<p} \langle p < r \rangle \ \ , \ \ b(q) = \bigcup_{q>p} \langle p > r \rangle \ ,$$

siendo $\langle p < r \rangle = \{f \in \mathbb{M}; p \in \bigcap_n A_{f(n)}\}$, que es un b-ideal que contiene al ideal $a(p)$. Análogas propiedades tendrán los ideales $\langle p > r \rangle$. Desde luego, bastará verificar una de las dos igualdades anteriores, así que tomaremos la correspondiente a la primera componente del par (a,b).

Probaremos un contenido viendo que si $q < p$ entonces $\langle p < r \rangle$ está contenido en $a(q)$. Para ello, apliquemos la propiedad (D2) de la b-cortadura (a,b) con las sucesiones $q < p$ y una función $f \in \langle p < r \rangle$, de modo que p no estará en ninguno de los subconjuntos $B_{f(n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Resulta entonces que existen funciones $g_1, \ldots, g_k$ que cubren $\mathbb{N}$ tales que para cada índice o bien se tiene $q \in a \odot (f \circ g_i)$ o bien $p \in b \odot (f \circ g_i)$, pero esta segunda posibilidad significa que p está en los $B_{f(g_i(n))}$, $n \in \mathbb{N}$, lo que no puede darse; luego tendremos la primera posibilidad para todos los índices, es decir, $f \in a(q)$.

Para el contenido inverso suponemos $f \in a(q)$, es decir $q \in a \odot f$, y aplicamos la propiedad (D3) de la b-cortadura (a,b), lo que nos da funciones $g_1, \ldots, g_k$ que cubren $\mathbb{N}$ tales que para cada índice existe una sucesión s_i tal que $s_i \in a \odot (f \circ g_i)$ y $q < s_i$. Será pues $q < p$ si p es el mínimo de los valores p_{ij} tomados por las funciones g_i. Sólo falta probar que $f \in \langle p < r \rangle$, es decir, que $c_{f(n)} \in a(p)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pero es claro que se tendrá $c_{f(n)} \in a(p_{ij})$ para ciertos índices, así que basta notar que $a(p_{ij})$ está contenido en $a(p)$; si $p = p_{ij}$ esto es obvio y si $p < p_{ij}$ entonces $a(p_{ij})$ está contenido en $\langle p_{ij} < r \rangle$, que a su vez está contenido en $a(p)$ por el argumento usado antes con la propiedad (D2).

Paso 3. Dada una sucesión real r de término general $r_n = (A_n, B_n)$ y un racional q, podemos formar el ideal $a(q)$ como en el paso 2, que ahora será tan sólo una unión de b-ideales. Pero un razonamiento estándar prueba que también $a(q)$ es b-ideal y por tanto $\gamma_1(r) = a$ define una aplicación $\gamma_1 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}_b(\mathbb{Q}_\kappa)$, que desde luego es una b-aplicación. Calculando $a \odot c_n$ resulta $\mu(a) = \{A_n\}$. Del mismo modo se obtiene γ_2 con $\gamma_2(r) = b$ que cumple $\mu(b) = \{B_n\}$. Con las dos b-aplicaciones anteriores como componentes se forma una b-aplicación $\gamma : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}_b(\mathbb{Q}_\kappa) \times \mathcal{P}_b(\mathbb{Q}_\kappa)$, que verifica $\gamma(\mu(r)) = r$ para cada sucesión real r. Veamos que γ factoriza por R_b, es decir, que cada $(a,b) = \gamma(r)$ satisface (D1) a (D4). Por la semejanza entre (D3) y (D4) bastará probar la primera de ellas.

(D1) Probemos que si $s \in a$ y $t \in b$ entonces $s < t$. Dado n, $s \in a$ implica que $c_n \in a(s(n))$, luego $c_n \in \langle p < r \rangle$ con $p > s(n)$; es decir, $s(n) < p < r(n)$. Análogamente, $t \in b$ implica que existe q tal que $t(n) > q > r(n)$. Luego $s(n) < t(n)$.

(D2) Probaremos que si $s < t$ entonces el ideal $\langle s \in a \rangle \cup \langle t \in b \rangle$ está en $\mathbb{J}$. En efecto, tomemos sucesiones s', t' en $\mathbb{Q}_\kappa$ tales que $s < s' < t' < t$. Podemos cubrir

$\mathbb{N}$ con los subconjuntos $A = \{n; r(n) > s'(n)\}$, $B = \{n; r(n) < t'(n)\}$ y tomar funciones $f, g \in \mathbb{M}$ cuyas imágenes sean respectivamente A, B; entonces es fácil ver que $f \in \langle s \in a\rangle$ y que $g \in \langle t \in b\rangle$, de modo que la unión de ambos ideales está en $\mathbb{J}$.

(D3) Sea $s \in a$ y tomemos $C_s \in \mathbb{J}$. Si $g \in C_s$ entonces $s \circ g = p$ (constante) y por tanto $g \in a(p)$, así que $g \in \langle p' < r\rangle$ para algún $p' > p$. Tomando otro racional q entre éstos resulta $g \in a(q)$, luego $q \in a \odot g$, y también $s \circ g < q$.

Paso 4. En el proceso anterior, si r es acotada entonces $(a, b) = \gamma(r)$ satisface además (D5). En efecto, basta probar la parte relativa a la primera componente. Por ser r acotada, existirá un número racional p tal que $p \in a$, pero entonces también será $q \in a \odot f$ para cada $f \in \mathbb{M}$. Luego se cumple (D5) tomando como ideal κ-cubridor el propio $\mathbb{M}$.

De los pasos 2 y 4 se concluye pues que μ es inyectiva y $\mu \circ \gamma = id$, luego μ es un b-isomorfismo y el teorema queda probado.

4.3. Comentarios finales. La construcción de las cortaduras en el topos bornológico produce un b-conjunto con propiedades algebraicas débiles en un cierto sentido. Por ejemplo, ya dijimos antes que no se verifica la propiedad tricotómica del orden. En cuanto a la estructura algebraica, sea el b-subconjunto de las unidades

$$U_\beta = \{x \in \mathbb{R}_\beta; (\exists y)(xy = 1)\}.$$

Es claro que se verifica $U_\beta = \neg\{0\}$ en $\mathbb{R}_\beta$ en los casos $\beta = \kappa$ y $\beta = \tau$, pero en ℓ^∞ sólo se cumple $U_\beta \subseteq \neg\{0\}$, como se observa con la sucesión de los inversos de los naturales (tomar 1 como inverso de 0). La fórmula

$$x = 0 \ \ \vee \ \ x \in U_\beta$$

identifica, junto con la condición $1 \neq 0$, a los llamados *b-cuerpos geométricos*. Razonando como más arriba, se prueba que $\mathbb{R}_\beta$ es un b-cuerpo geométrico en los casos $\beta = \kappa$ y $\beta = \tau$ (también $\mathbb{Q}_\kappa$) mientras que ℓ^∞ sólo es lo que se llama un *b-cuerpo de fracciones*, que es un b-anillo que verifica, además de $1 \neq 0$, la fórmula

$$\neg(x \in U_\beta) \ \ \Rightarrow \ \ x = 0.$$

Es claro que esta fórmula y la anterior son equivalentes con lógica clásica, pero no lo son con lógica intuicionista de los topos en general. Un fácil razonamiento intuicionista prueba que todo b-cuerpo geométrico es un b-cuerpo de fracciones, pero el recíproco no es cierto, pues acabamos de ver que ℓ^∞ es un contraejemplo. También es fácil deducir que un b-cuerpo de fracciones verifica la fórmula

$$x \in U_\beta \ \ \vee \ \ \neg(x \in U_\beta)$$

si y sólo si es un b-cuerpo geométrico, luego ℓ^∞ no satisface dicha fórmula.

Finalmente, recordemos que en cada topos se puede construir el objeto de los reales por sucesiones, según Cauchy, resultando en general (ver [4]) un objeto más reducido que el correspondiente a las cortaduras de Dedekind. Pero en el topos bornológico se puede demostrar que ambas construcciones dan b-conjuntos isomorfos, como sucede en los conjuntos clásicos.

Referencias

[1] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra. 3. Categories of sheaves*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **52**, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
[2] E. Dubuc, Logical opens and real numbers in topoi, *J. Pure Appl. Algebra* **32** (1986), 129–143.
[3] L. Español y L. Lambán, *On bornologies, locales and toposes of M-sets*, prepublicación (1999).
[4] P. T. Johnstone, *Topos theory*, London Mathematical Society Monographs **10**, Academic Press, Londres, 1977.
[5] L. Lambán, *Construcciones en topos que extienden relaciones entre categorías de espacios topológicos y bornológicos*, Tesis doctoral, Publ. Sem. Mat. García de Galdeano, ser. II, sec. 2, núm. **27**, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, 1990.
[6] S. Mac Lane y I. Moerdijk, *Sheaves in geometry and logic. A first introduction to topos theory*, Universitext, Springer-Verlag, Nueva York, 1992.

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Edificio Vives, Calle Luis de Ulloa s/n, 26004 Logroño, Spain
Correo electrónico: `luis.espanol@dmc.unirioja.es, carmen.minguez@dmc.unirioja.es`