MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

UN TRABAJO DE SIXTO CÁMARA, EN 1915, SOBRE TEORÍA DE GALOIS

JOSÉ JAVIER ESCRIBANO Y LUIS ESPAÑOL

Abstract. We analyze the unique algebraic paper written by Sixto Cámara (1878–1964), entitled *Substitutions in the normal algebraic Galois field* (*Sustituciones en el cuerpo algébrico normal de Galois*), produced in the Mathematical Laboratory and Seminar (Laboratorio y Seminario Matemático) of the Council for Advanced Studies and Scientific Research (Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas), and communicated to the Congress of the Spanish Association for the Advancement of Science (Congreso de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias) held at Valladolid in 1915. The paper was worked out from the two first chapters on Galois theory in H. Weber's book *Lehrbuch der Algebra* (1895).

Como todo el libro del que forma parte, nuestro trabajo está dedicado a José Javier (Chicho) Guadalupe Hernández. Una primera versión del mismo figura como capítulo 7 en la tesis doctoral [9], realizada por uno de nosotros y dirigida por el otro. En ella se trató someramente la teoría de Galois, por ser este trabajo de Cámara aislado y poco significativo dentro de su obra completa. Chicho no llegó a juzgar la tesis, pues su fallecimiento se produjo mientras hacíamos las últimas correcciones. Hemos pretendido que esta nueva versión ampliada se acerque más a su gusto internalista, aunque no podamos saber si lo hemos conseguido.

1. Cuestiones previas

1.1. Recepción de la teoría de Galois en España. La recepción de la teoría de Galois en España con J. Echegaray ha sido abordada por S. Garma [15, 16], mientras que M. Hormigón [17] ha recogido algunas notas al respecto al estudiar la obra de Z. García de Galdeano. Por su parte, L. Español [10] se ha ocupado de la evolución de los estudios de álgebra en nuestros centros superiores al hilo de sus investigaciones sobre la obra de J. Rey Pastor. Estas son las referencias generales para esta primera cuestión previa.

En 1866, un anónimo articulista —seguramente Echegaray— reclamaba, desde las páginas de la *Revista de Obras Públicas*, que en los centros españoles se impartieran cursos de álgebra superior análogos a los explicados por J. A. Serret en París,

2000 *Mathematics Subject Classification.* 01A60, 1203, 12F10.
Key words and phrases. History of mathematics, reception of Galois theory, Spain, 20th century, Sixto Cámara.
Este trabajo ha contado con una ayuda a la investigación del Instituto de Estudios Riojanos del Gobierno de La Rioja.

reflejados en su famoso *Cours d'algèbre supérieure* [28]. Este libro venía publicándose desde 1849, pero las ideas de Galois —puestas en circulación por Liouville en 1846 a través de su *Journal*— no se incorporaron al texto del profesor de La Sorbona hasta la tercera edición, que acababa de ver la luz en este mismo año de 1866. La petición de nuestro articulista suponía una clara apuesta por la modernidad en la docencia universitaria, pero sus demandas no tuvieron éxito de momento. Hasta su tardía incorporación a la enseñanza, la teoría fue abanderada o difundida por diversos autores. A título de comparación, en [20] puede verse la recepción de la teoría en Italia. García de Galdeano demostró en 1888, con *Crítica y síntesis de álgebra* [11], estar informado sobre la teoría de Galois, aunque no había conseguido, como fue su intención, publicar un libro sobre ella. Así que fue necesario esperar hasta 1896–1897 para encontrar el primer texto español, *Resolución de Ecuaciones y Teoría de Galois* [8], fruto del curso, también pionero, impartido por Echegaray en el Ateneo de Madrid. El polifacético ingeniero siguió el *Cours* de Serret, ya que, dijo, «la obra clásica de Mr. Jordan exigiría un año completo de lección diaria. Otro tanto podría decirse de la gran obra de Lie; y, sin embargo sólo de veinte lecciones podemos disponer». Echegaray aludió a también a «la Teoría de las sustituciones, de Netto … y a los libros recientes de Tannery y Vogt». La primera mención al *Lehrbuch der Algebra* [31] de Weber (1895), la encontramos en la revista *El Progreso Matemático*, en la que su editor, García de Galdeano, publicó una reseña [12] de la traducción francesa (1898) de la segunda edición alemana. Un año después, el propio Galdeano reseñó [13] las lecciones de Echegaray, que habían sido continuadas en 1898.

En 1907, García de Galdeano publicó *Exposición sumaria de las teorías matemáticas* [14], obra breve en la que condensa esquematizado «lo que está por hacer entre nosotros, lo que falta a nuestros planes de enseñanza», donde aparece un apartado de dieciocho páginas titulado «El álgebra en su relación con los grupos», en el que muestra su conocimiento de los trabajos de Galois y Kronecker y de los libros de Jordan y Weber. Por entonces regía en la universidad española el plan de estudios de 1900, que duró más de veinte años. En dicho plan, el álgebra (entendida como la resolución de ecuaciones algebraicas reales o complejas) formaba parte de la asignatura Análisis Matemático del segundo curso. En ella se explicaban los elementos de funciones de variable compleja necesarios para demostrar el teorema fundamental del álgebra, la resolución numérica de las ecuaciones (acotación, separación y aproximación de raíces), algo de eliminación y, en cuanto a la resolución algebraica, la de las ecuaciones de grado menor o igual que cuatro y alguna aproximación al teorema de Abel sobre la irresolubilidad por radicales de la ecuación de quinto grado. Los conocimientos de los profesores de la época, que no practicaban la investigación, tenían poco más alcance que los contenidos de los cursos a impartir. L. Octavio de Toledo, catedrático de Análisis de la Central escribió en 1905 un *Tratado de álgebra* [22] formado sólo por la introducción y una sección primera, pues, escribió en el prólogo, «las Secciones segunda, conteniendo la teoría elemental de funciones; tercera, teoría general y resolución de ecuaciones, y cuarta, teoría de las sustituciones y su aplicación a la resolución algébrica de ecuaciones de grados superiores, se publicarán más adelante si el público matemático de nuestro país juzga con benevolencia nuestro modesto trabajo»; pero esta ampliación no llegó a realizarse. En 1914, Octavio de Toledo ingresó en la Academia de Ciencias y con tan relevante motivo disertó sobre *Algunos de los descubrimientos realizados en la teoría y resolución de ecuaciones en el siglo XIX* [23]. En su discurso relató con soltura los avances hasta Abel, pero, en lo que se refiere a la teoría de Galois, se limitó a reproducir fragmentos de la obra original del genial francés y a concluir que «en la segunda mitad del pasado siglo la teoría de Galois ha experimentado adiciones de importancia extraordinaria, por haberse dedicado a laborar en ella matemáticos tan insignes como Jordan y Picard en Francia, Klein, Netto y Weber en Alemania, Betti y Bianchi en Italia, y tantos otros cuyos nombres no me sería difícil reunir acudiendo a cualquier bibliografía», cierre que no refleja demasiada afinidad con el tema.

Así las cosas, apareció en escena Rey Pastor, el cual, llegando mucho más lejos en la senda de su maestro García de Galdeano, inició de inmediato un serio esfuerzo de modernización de la enseñanza de las matemáticas y, además, de inicio efectivo y organizado de la investigación, para lo que contó con el soporte de la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas (JAE) fundada en 1907. Rey ganó la cátedra de Análisis Matemático de Oviedo en 1911 y a continuación pasó un curso en Berlín pensionado por la JAE. El curso siguiente ejerció su cátedra en la universidad asturiana y, acabado el periodo lectivo, ganó el acceso a la misma cátedra que ostentaba pero en la Universidad Central, repitiendo la experiencia alemana el curso siguiente, esta vez en Gotinga. En el curso 1914–15 Rey Pastor comenzó a ejercer la cátedra madrileña, a cuyo cargo estaban las asignaturas de Análisis Matemático de los cursos primero y segundo, y por tanto la enseñanza del álgebra, que había practicado por primera vez en Oviedo el curso 1912–13 y que retomó en sus lecciones del curso 1915–16 en Madrid. Estas lecciones, que circularon como apuntes, mejoraron apreciablemente el nivel expositivo de la materia en España, quedando registradas años después (1924) en la primera edición de *Lecciones de álgebra* [26]. Pero estas mejoras se refieren a los contenidos del plan de estudios vigente, así que no incluyen la teoría de Galois. Rey Pastor mencionó esta teoría en sus notables conferencias de 1915 en el Ateneo de Madrid [24], concretamente en la sexta, titulada «Sistematización de la matemática por medio de la teoría de grupos». El avance en materias no incluidas en el plan de estudios se produjo en los años siguientes a través de cursos extracurriculares (de extensión universitaria) y en el ambiente investigador del Laboratorio y Seminario Matemático (LSM), creado por la JAE en 1915 bajo la dirección de Rey Pastor. La teoría de Galois figuró entre las líneas de estudio e investigación del Laboratorio desde el mismo año de su fundación, siendo Cámara, que había llegado a Madrid un año antes, el primero que cultivó esta materia produciendo el artículo [4] que motiva nuestro trabajo. El programa del Laboratorio contemplaba la teoría de Galois, cuando Cámara se trasladó a Valencia en 1917, como parte de los temas de análisis, junto con la teoría de conjuntos y la teoría de funciones. Ese mismo año, en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central se anunciaban cursos sobre *Grupos de sustituciones* y sobre *Teoría de Galois*, impartidos por L. Octavio de Toledo y R. Araujo respectivamente. Estos movimientos muestran que dicha teoría era una asignatura pendiente en la matemática española, situación en la que se mantuvo durante demasiado tiempo.

Esta lenta recepción en nuestro país de la teoría de Galois en su estado finisecular contrasta con la rápida evolución que experimentó en manos de los algebristas alemanes, sobre todo avanzada la década de los veinte. La segunda edición de las *Lecciones de álgebra* de Rey Pastor, publicada en 1935, amplió la previa con la teoría de Galois al estilo de Weber, cuando ya el álgebra tomaba el sendero reflejado en el famoso texto de van der Waerden (1930), cuyo estilo estructural nunca fue aceptado por nuestro principal matemático.

Podemos hacer otra aproximación al artículo de Cámara que nos ocupa, esta vez desde el campo de la geometría y de nuevo en la onda de Rey Pastor [10]. Durante su segunda estancia en Alemania, Rey había preparado la memoria *Fundamentos de la geometría proyectiva superior* [25], que fue premiada por la Academia de Ciencias en 1914 y publicada dos años después. Fue una de las obras con las que el autor consolidó su predominio en la matemática nacional. La obra comienza con una brillante exposición del Programa de Erlangen de Klein, que precede a un desarrollo de la geometría proyectiva en el que juegan un papel decisivo los grupos de transformaciones. Rey Pastor difundió el concepto de grupo como unificador de diversos campos de la matemática e impulsó el estudio de los grupos, no desde el punto de vista abstracto sino prestando atención a los ejemplos más significativos. Bajo esta influencia cabe también situar el trabajo de Cámara sobre los grupos de sustituciones de una ecuación normal, al igual que el de J. Mingot [21], también miembro del LSM, sobre sustituciones lineales del plano complejo.

1.2. El artículo de Cámara en el conjunto de su obra. En este apartado daremos unas pinceladas sobre la evolución de la obra de Cámara en un entorno de 1915, que pueden ampliarse consultando [9]. El trabajo que comentamos forma parte del conjunto de las comunicaciones que el LSM presentó al V Congreso de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, celebrado en Valladolid en octubre de 1915; por ausencia de su autor, fue leído por Rey Pastor en la sesión del día 21. El LSM aportó seis de los nueve trabajos presentados en la Sección de Exactas [3], a los que hay que añadir el famoso discurso inaugural de la sección pronunciado por Rey Pastor y alguna comunicación más en otras secciones. Esto sucedía en el año fundacional del LSM, por lo que la participación en dicho congreso de varios de sus miembros significó la presentación en público del primer grupo español de investigación matemática oficialmente constituido.

En junio de 1913, Cámara había ganado una plaza de Auxiliar de Geometría y Mecánica en la Universidad Central; con este motivo, había cambiado su residencia de Zaragoza a Madrid, pidiendo la excedencia como Capitán de Infantería; desde entonces su vida profesional fue universitaria. Esta nueva ubicación le permitió incorporarse al LSM desde su creación; en él formó, junto con A. Saldaña y R. Fages, la sección de «Trabajos gráficos y nomográficos», de la que era el director. Esta orientación se corresponde con una serie de trabajos sobre balística realizados por Cámara en consonancia con su primera profesión militar. De hecho, presentó en el congreso de Valladolid, Sección de Ciencias de la Aplicación, un segundo trabajo titulado *Círculos calculadores del Oficial de Infantería*. Desde que leyera la tesis doctoral en 1908, realizada siguiendo la pauta de E. Torroja en geometría sintética, las publicaciones de Cámara versaron bien sobre este tipo de geometría, bien sobre balística.

Estas ocupaciones parecen indicar que dedicarse a la teoría de Galois fue para él una novedad fruto de la programación del LSM propuesta por Rey Pastor, ajena en principio a sus experiencias y prioridades, pues el tipo de álgebra requerida para la geometría universitaria estaba más bien ligada a la teoría de invariantes, destacando las clasificaciones de los entes algebraicos lineales. En 1917, Cámara ganó la cátedra de Geometría Analítica en la Universidad de Valencia, donde permaneció hasta que en 1935 volvió a la Central para sustituir a M. Vegas. Esto motivó su alejamiento del LSM y de la teoría de Galois. Por ello el trabajo de álgebra que nos ocupa aparece aislado en la obra matemática de su autor. No obstante, debemos decir que Cámara se ocupó desde su cátedra del álgebra ahora llamada lineal, como puso de manifiesto desde la primera edición (1920) de su conocido texto *Elementos de geometría analítica* [5], en el que aparece la clasificación de cónicas por vía algebraica, aunque no expuesta de un modo completo.

Interesa decir también que Cámara fue nombrado en octubre de 1914 secretario de la Sociedad Matemática Española, entonces presidida por Echegaray. Desde esta posición, estuvo inmerso en el debate que se produjo sobre el nivel que debieran tener los artículos que se publicaran en la *Revista* de la sociedad, enfrentando a los partidarios de una revista de investigación, para elevar el nivel de la matemática española, y los partidarios de un tono más elemental que reflejara lo que la comunidad matemática española era realmente. En este contexto cobra valor observar que, como veremos con más detalle, Cámara escribió sobre un tema de álgebra superior haciendo un esfuerzo por introducirlo de un modo pedagógico, actitud profesoral que se aprecia en toda su obra matemática.

1.3. El libro de Weber. No está de más incluir aquí una breve descripción del *Lehrbuch* de Weber en relación con el tema que nos ocupa. El lector que desee más detalles sobre esta obra, considerada como un texto codificador y difusor del estado de un fragmento importante del álgebra al final del siglo XIX, los encontrará en [7] o en [19], donde se analiza además el papel relevante que dicho texto tuvo en las primeras décadas del siglo XX, hasta que fue desplazado por el enfoque estructural asentado a partir de *Moderne Algebra* (1930), de B. L. van der Waerden [30]. Digamos en primer lugar que el libro de Weber consta de tres volúmenes (1895, 1896, 1908), pero a los efectos de este trabajo consideramos exclusivamente el primero. El segundo tomo contiene la teoría de los grupos finitos y los números algebraicos a la manera de Dedekind, mientras que el tercero, de aparición más tardía, está dedicado a las funciones elípticas y de nuevo a los números algebraicos. El primer volumen, que según su autor contiene la parte elemental del álgebra, fue el más difundido y el que más influyó en la enseñanza superior del álgebra, pues ya tuvo en 1898 una segunda edición (sin cambios importantes) que apareció traducida al francés ese mismo año. Esta edición francesa fue la más difundida en España y es también la manejada por los autores de este trabajo.

El Weber, un grueso volumen de ochocientas páginas, es un libro de álgebra en el sentido de la época, que ahora decimos clásico, cuyo objetivo es resolver las ecuaciones algebraicas con coeficientes reales o complejos. El problema era caracterizar las resolubles mediante radicales, una vez que Abel había probado que dicha solución es imposible para la ecuación general de grado cinco. El autor, que reconoce la influencia de Dedekind y Klein, presenta su libro como una actualización del de Serret [28], que considera excelente para la época en que fue publicado (tuvo ediciones a lo largo de la segunda mitad del siglo XIX, incluso después). El libro de Weber se abre con una amplia introducción en la que se construyen los sistemas de números, en particular los reales mediante las cortaduras de Dedekind. Al finalizar la introducción, el autor afirma que el procedimiento más importante del álgebra es el «cálculo literal [cuyo] empleo es tan general que se toma a menudo como sinónimo de álgebra», palabras que suenan ahora como un vago anuncio de las estructuras. Sigue el cuerpo central de la obra, dividido en tres partes de las que indicamos el contenido siguiendo más o menos los títulos de los capítulos que contienen:

1. Libro I. *Los principios.* Polinomios y funciones racionales, determinantes, teorema fundamental del álgebra, funciones simétricas, invariantes por una transformación lineal, transformación de Tschirnhausen.
2. Libro II. *Las raíces.* Raíces reales, teorema de Sturm, acotación, separación y aproximación de las raíces, fracciones continuas, raíces n-ésimas de la unidad.
3. Libro III. *Los elementos algebraicos.* Teoría de Galois, aplicación de los grupos de permutaciones a las ecuaciones, ecuaciones cíclicas, división del círculo en partes iguales, resolución algebraica de las ecuaciones, raíces de las ecuaciones metacíclicas.

Nos interesan especialmente los dos primeros capítulos, unas ochenta páginas del libro tercero que alcanza más de doscientas, porque a ellos se refiere el trabajo de Cámara. Llama la atención que Weber no coloca el rótulo emblemático «teoría de Galois» sobre todo el Libro III, sino exclusivamente sobre su primer capítulo, el XIII en el total de la obra, dedicado a poner de manifiesto que a partir de una ecuación algebraica surgen una ampliación del cuerpo de coeficientes y un grupo de sustituciones cuyas propiedades se corresponden, conexión que se perfecciona en el capítulo siguiente aplicando propiedades de grupos de permutaciones de las raíces de la ecuación (isomorfos a los anteriores grupos de sustituciones). Veamos esto con algún detalle.

La noción de cuerpo que utiliza Weber es ciertamente abstracta, pero previa al concepto axiomático sintetizado una década después por Steinitz [29]. Dice Weber que «un cuerpo es un sistema de elementos con los que se pueden realizar las cuatro operaciones dentro del sistema». Esta definición es abstracta en un sentido simplemente descriptivo, pues trata de formular de modo unificado la esencia de los dos tipos de ejemplos que da previamente, por una parte los cuerpos de números ya considerados por Dedekind, es decir, los cuerpos intermedios entre los racionales y los complejos, y por otra los cuerpos de funciones (racionales con coeficientes en un cuerpo numérico). Por eso el autor, al razonar sobre esta noción de cuerpo, concluye que todo cuerpo contiene a los racionales, es decir, supone implícitamente que, con expresión moderna, los cuerpos son de característica cero.

El punto de partida de la teoría de Galois, según Weber, es una ecuación $F(x) = 0$ de grado m con coeficientes en un cuerpo Ω. En virtud del Libro I, para tal ecuación «está permitido hablar de m raíces», que se suponen siempre distintas, de modo que, de nuevo con lenguaje moderno, Weber sólo va a considerar el caso separable. Una extensión algebraica de Ω es entonces un cuerpo $\Omega(\alpha)$ obtenido adjuntando a Ω una raíz de F que no le pertenece. Si $f(x)$ es el factor irreducible (siempre mónico) de $F(x)$ correspondiente a la raíz α, se llama grado de la extensión al grado n de f. Weber prueba que f está determinado de modo único usando la divisibilidad de polinomios, en la que toda la teoría se apoya fuertemente. Resulta pues que Weber considera extensiones algebraicas finitas y separables de un cuerpo Ω de característica cero. Lo primero que prueba es que adjuntando sucesivamente todas las raíces de $F(x) = 0$ se obtiene una extensión, el cuerpo de Galois de la ecuación, que de hecho es una extensión simple $\Omega(\rho)$ engendrada por un elemento primitivo. Si ρ no es primitivo, $\Omega(\rho)$ es una extensión intermedia de Ω cuyo grado divide a n, siendo toda extensión intermedia de este tipo. También demuestra que no existen extensiones intermedias si y sólo si los únicos elementos no primitivos del cuerpo ampliado son los de Ω. Seguidamente afirma que «los grandes progresos que el álgebra debe a Galois provienen esencialmente de que los cuerpos se pueden reducir a cuerpos normales». Esto quiere decir que, en el cuerpo de Galois $\Omega(\rho)$, el elemento primitivo ρ es raíz de un polinomio $g(t)$ irreducible en Ω y de grado μ cuyas raíces se expresan en función de una cualquiera de ellas, razón por la que se dice que $g(t) = 0$ es una ecuación normal, una resolvente de Galois de $F(x) = 0$; entonces los cuerpos (conjugados) $\Omega(\rho_i)$ correspondientes a las demás raíces de g (los elementos conjugados de ρ) son todos iguales y la extensión $\Omega(\rho)$ se llama también normal. Así termina el estudio de las extensiones algebraicas de Ω y Weber pasa a ocuparse de los cuerpos normales.

Los conjugados ρ_i de ρ tienen la forma $\rho_i = \theta_i(\rho)$, siendo cada θ_i un polinomio con coeficientes en Ω y grado a lo sumo $\mu - 1$. Weber llama sustitución $\sigma_i = (\rho, \rho_i)$ al cambio de ρ por uno de sus conjugados, lo que produce una aplicación de $\Omega(\rho)$ en $\Omega(\rho_i)$, pero al ser los cuerpos conjugados iguales en una extensión normal, se obtiene una transformación entre los elementos de $\Omega(\rho)$, en la que ρ y sus conjugados resultan permutados y los únicos elementos invariantes son los de Ω. Estas sustituciones forman un grupo de orden μ que Weber llama «grupo de las sustituciones» de $\Omega(\rho)$. Dice que es un grupo porque cumple tres propiedades: la existencia de composición, que ésta es asociativa y que cada ecuación $\sigma\sigma' = \sigma''$ se puede resolver si dos cualesquiera de las sustituciones son dadas. Para formular la composición y operar con ella, prueba que una sustitución σ_i es de la forma más general $\sigma_i = (\rho_h, \rho_k)$ cumpliendo el par (h, k) ciertas condiciones. Weber trata pues el grupo de las sustituciones como un ejemplo de grupo abstracto, pero para trabajar con él lo transforma en un grupo (isomorfo) de permutaciones de las m raíces α_i de $F(x) = 0$, el grupo de Galois de la ecuación. Los «grupos de permutaciones» son definidos como subconjuntos de permutaciones cerrados por composición, probándose luego que tienen unidad e inversos. Según Weber, «cuando la resolvente de Galois se hace reducible por la adjunción a Ω de un elemento algebraico, se encuentra una resolvente de grado inferior ... Se aproxima así la resolución de la ecuación», que se alcanza cuando la resolvente llega a ser de grado uno. Añade que «la manera como Galois ha enfocado el problema de la resolución de una ecuación $F(x) = 0$ consiste en disminuir progresivamente el grupo por la adjunción sucesiva de elementos algebraicos lo más simples que sea posible». Pasa enseguida a demostrar que la ecuación $F(x) = 0$ es irreducible si y sólo si su grupo de Galois es transitivo. El capítulo termina probando, en el caso transitivo, que el cuerpo es primitivo si y sólo si el grupo es primitivo (el conjunto de las raíces no admite particiones estables no triviales).

Hasta aquí el capítulo titulado «teoría de Galois», en el cual pretende haber demostrado el autor, así lo proclama al empezar el capítulo siguiente, que «una comprensión más profunda del álgebra exige un estudio detallado de los grupos de permutaciones», por lo que les dedica buena parte de dicho capítulo, el XIV del libro. Tras este estudio (ciclos, subgrupos, partición de un grupo en clases según un subgrupo, conjugación, etc.) desarrolla los teoremas de reducción de la resolvente por adjunción de un elemento algebraico, introduce los subgrupos normales y expone la reducción del grupo de Galois por adjunción de un elemento del cuerpo de Galois. Por tanto este capítulo completa el anterior y podría ser considerado también «teoría de Galois».

En el resto del libro Weber estudia ecuaciones particulares y la resolución por radicales. Este planteamiento se sitúa en la línea histórica de atención creciente a las estructuras que comienza en Dedekind y culmina con Artin [1, 2]. En efecto, en Weber todo gira en torno a las ecuaciones, la que se pretende resolver y sus resolventes, pero, antes de abordar el problema de las soluciones por radicales, presenta un estudio previo, de cierta amplitud y autonomía, sobre la relación entre los cuerpos y los grupos asociados. Esta parte aparece como una teoría de la que el objetivo final, la resolución de las ecuaciones, se deriva como una aplicación. Sabido es que el enfoque propio del álgebra moderna llegó cuando Artin dejó en segundo plano las ecuaciones al ver con claridad que las transformaciones de $\Omega(\rho)$ en sí mismo, producidas en el planteamiento de Weber por las sustituciones, eran exactamente los automorfismos de la extensión, que se podían definir autónomamente.

2. Descripción y análisis del artículo

2.1. Estructura, objetivos y fuentes. El artículo de Cámara, *Sustituciones en el cuerpo algébrico normal de Galois*, es relativamente extenso, ocupa treinta y tres páginas de las Actas del Congreso de Valladolid de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, precedidas por una portadilla en la que, además de título, autor (presentado como «Profesor Auxiliar en la Facultad de Ciencias de Madrid») y fecha de lectura («sesión de 21 de Octubre de 1915») aparece el siguiente «Sumario: 1. Exposición.- 2. Definiciones.- 3. Propiedades de los elementos primitivos.- 4. Sustituciones entre elementos primitivos.- 5. Sustituciones distintas S y S_1 compuestas de ciclos con elementos comunes.- 6. Producto de dos sustituciones S y S_1.- 7. Elementos comunes a un ciclo de S o de S_1 y otro de SS_1.- 8. Subgrupo $[S, S_1]$.- 9. Elementos imprimitivos del cuerpo $\Omega(\rho)$.- 10. Sistemas de elementos primitivos e imprimitivos contenidos en $\Omega(\rho)$.- 11. Sustituciones entre elementos imprimitivos y entre sistemas de imprimitividad.- 12. Subcuerpos del $\Omega(\rho)$.- 13. Reducción de la resolvente de Galois por adjunción de un cuerpo $\Omega(\theta)$.- 14. Cuerpo y ecuación normal.- 15. Descomposición de las raíces de una ecuación $F(x) = 0$ en sistemas imprimitivos.- 16. El grupo de Galois de una ecuación $F(x) = 0$».

Los apartados 12–16 aparecen numerados como 14–18 en el interior, en el que faltan los que serían el 12 y el 13; esto puede ser un error tipográfico causado tal vez por la supresión de una parte del texto original. En la exposición de motivos que abre la comunicación, el autor refleja fielmente sus objetivos. Como no es muy larga se puede reproducir íntegra:

«Nos proponemos en estas páginas exponer, en forma hasta cierto punto intuitiva, las principales propiedades del cuerpo algébrico normal de Galois, deducidas de las sustituciones que automáticamente se realizan entre los elementos de este cuerpo algébrico cuando se sustituye un elemento primitivo por otro.

»Partiendo de la conocida propiedad de expresarse racionalmente los elementos primitivos en función de uno de ellos y de la propiedad fundamental relativa a la divisibilidad de las funciones en Ω por una irreducible dada en este mismo cuerpo, deducimos el grupo de sustituciones entre elementos primitivos y el carácter abeliano de este grupo; el estudio de los ciclos, con elementos comunes o no, y de las sustituciones cíclicas o no cíclicas, conduce, naturalmente, a los conjuntos de elementos imprimitivos, y podría servir de base para una clasificación de los citados grupos; las sustituciones entre elementos imprimitivos y sistemas de imprimitividad aparecen automáticamente, llegándose a la reducción de la resolvente de Galois por adjunción de un cuerpo $\Omega(\theta)$; y, finalmente, como aplicación de lo anterior, viene la descomposición de las raíces de una ecuación en sistemas imprimitivos de transitividad y el grupo de Galois de la ecuación algébrica.

»Este es, en resumen, el contenido del presente trabajo, hecho en el Laboratorio y Seminario Matemático dirigido por nuestro querido amigo D. Julio Rey Pastor, y que presentamos al Congreso de Valladolid sólo con el deseo de aportar un grano de arena al progreso científico de nuestra Patria.

»Muy conocida es entre los congresistas la teoría de Galois para encontrar propiedades desconocidas en este trabajo. No pretendemos haber descubierto nada nuevo. Nuestra labor se reduce a tomar un punto de vista de carácter hasta cierto punto intuitivo, repetimos, y de dar cierto aspecto de juego matemático con el empleo de cuadros y gráficos al estudio de estas bellas y curiosísimas propiedades de la teoría de las ecuaciones algébricas que inmortalizaron el nombre de Galois.

»Supone lo expuesto a continuación el conocimiento de la teoría de los grupos de sustituciones discretas y las primeras nociones de cuerpos algébricos. No obstante ser éstas muy conocidas para la generalidad de los lectores, damos a continuación las definiciones principales para los no iniciados, extractadas del Álgebra de Weber».

Esta mención final es la única que el autor hace del Weber, pero en las notaciones, en los supuestos previos y en el propio contenido queda claro que ese libro es la referencia utilizada por Cámara. Sólo otra obra es citada en este artículo, *Istituzioni di analisi algebrica* de Capelli [6], un grueso volumen de casi mil páginas que es una de las obras básicas de consulta de diversos autores españoles de textos para los primeros cursos universitarios; por ejemplo Octavio de Toledo, Rey Pastor, o el propio Cámara. El objeto de la cita es justificar un argumento cuando se prueba, en el apartado 16, que el cuerpo de Galois de una ecuación es normal sobre el cuerpo de coeficientes.

Aunque el autor no da otras referencias, seguramente tuvo ante sí otras obras. Señalaremos a este respecto, al margen de las obras ya clásicas entonces, que en el primer volumen (1911–12) de la *Revista de la Sociedad Matemática Española* se nombró socio correspondiente al norteamericano G. A. Miller, especialista en teoría de grupos y en historia de las matemáticas, al que la sociedad agradecía el envío de separatas de sus obras para la incipiente biblioteca social y de un artículo, *Grupos, nomenclatura y notación*, para la propia revista, que lo publicó en su número de abril de 1914. En relación con la incipiente matemática norteamericana, diremos también que entre las reseñas bibliográficas de los cinco primeros volúmenes de la revista aparecieron una obra sobre grupos finitos y sus aplicaciones de G. A. Miller, H. F. Blichfeldt y L. E. Dickson, y los textos sobre la teoría de ecuaciones de Dickson y de F. Cajori, ambos de los primeros años del siglo. También se dio cumplida noticia en la revista de la aparición de los volúmenes de la traducción francesa de la *Enciclopedia* de Teubner dirigida por Klein.

2.2. Análisis del contenido. Tras la exposición de motivos, el segundo apartado, de un par de páginas, se limita a recoger algunas de las definiciones que hemos visto al repasar el contenido del Weber. Llama la atención que para Cámara los cuerpos son «conjuntos de números», lo que limita la generalidad que Weber dio en su libro a este concepto, a pesar de haberse publicado ya la memoria de Steinitz [29]. Con el nombre de «teorema fundamental en la teoría de Galois», Cámara enuncia: «Si los coeficientes de una función irreducible $f(x)$ y de otra $F(x)$ (ambas polinomios enteros) pertenecen a un mismo cuerpo Ω, $f(x)$ y $F(x)$ no pueden tener divisor común a menos que $F(x)$ sea divisible por $f(x)$». Justifica este nombre porque en él «apoyamos las demostraciones contenidas en el presente trabajo». Las definiciones terminan poniendo al lector frente a una extensión normal $\Omega(\rho)$, donde ρ es una raíz de una ecuación normal $g(t)$ de grado μ, que por ser irreducible tiene todas sus raíces distintas. Este es el «cuerpo algébrico normal de Galois» del título de la comunicación, que se ajusta más bien a los apartados 3–13 (según la numeración del sumario), en los que se estudia esta extensión y su grupo de Galois Σ.

Cámara retoma en los apartados finales 14–16 (ver el sumario) el punto de vista de una ecuación general $F(x) = 0$, de la que ρ es un elemento primitivo raíz de la resolvente $g(t)$ y $\Omega(\rho)$ el cuerpo de Galois. Resulta anecdótico que se olvida de precisar desde el principio que las raíces de $F(x) = 0$ han de ser distintas, pero en algún momento se puede leer (p. 64) «... y dos de las raíces α de $F(x)$ serían iguales contra la hipótesis». En estos apartados finales Cámara ve que el cuerpo de descomposición de F es normal y por tanto tiene el grupo Σ, que interpreta como (es isomorfo a) un grupo de permutaciones de las raíces, para demostrar finalmente el resultado que cierra su trabajo: «La ecuación $F(x) = 0$ será reducible o irreducible, según que su grupo de Galois sea intransitivo o transitivo». Este teorema es precisamente, como hemos visto, uno de los últimos del capítulo titulado «teoría de Galois» en el libro de Weber.

La aportación personal de Cámara consiste en recrear la exposición de Weber intercalando un estudio detallado, referido a la ecuación normal g, de la relación entre los cuerpos intermedios de la extensión y los subgrupos del grupo de Galois. Weber dejaba este estudio, referido a una ecuación general F y a los grupos de permutaciones de sus raíces (distintas), para el capítulo siguiente; pero Cámara empieza directamente con esta relación el caso particular de la ecuación normal, en el que el número de permutaciones y de elementos permutados coincide. Pero no menciona «subgrupos» sino «sistemas de imprimitividad», que son las particiones del conjunto de las raíces que corresponden a cada subgrupo. Cámara (apartados 3 y 4) escribe las raíces de g formando una fila

$$\rho\,,\ \rho_1 = \theta_1(\rho)\,,\ \ldots\,,\ \rho_{\mu-1} = \theta_{\mu-1}(\rho)\,,$$

bajo la cual coloca otra que empieza por ρ_1 y sigue con sus transformados por las funciones θ_i (sustitución de ρ por ρ_i) en la primera fila; y así sucesivamente hasta completar un cuadro $\mu \times \mu$, demostrando que se trata de μ permutaciones (Cámara dice «sustituciones») de las μ raíces de g, que forman un grupo Σ; prueba además que el grupo es transitivo y, usando esta propiedad y las descomposiciones en ciclos, que es abeliano. Los apartados 5-8 contienen un estudio de Σ basado en los ciclos, que termina con el subgrupo engendrado por dos permutaciones. En el apartado 9 reaparece el cuerpo $\Omega(\rho)$ para demostrar que cada uno de sus elementos imprimitivos «es una función simétrica de los elementos ρ que figuran en un ciclo de una de las sustituciones del grupo Σ». En el apartado 10 se resalta una importante consecuencia del resultado anterior: «el conocimiento de este grupo Σ equivale al del cuerpo normal $\Omega(\rho)$, pues la clasificación de todos los elementos de este cuerpo $\Omega(\rho)$ se hace por medio de las sustituciones de Σ y de los sistemas imprimitivos». Este apartado es extenso porque contiene varios ejemplos detallados de la obtención de los sistemas imprimitivos, tablas numéricas que dan al trabajo el estilo «intuitivo», o de «juego matemático», al que aludía el autor en la introducción. En el apartado 11 hay una breve alusión a que cada elemento de Σ provoca una transformación entre los elementos del cuerpo «en la que los únicos que no se cambian por otros son los del cuerpo Ω». El apartado siguiente (12 en el sumario) contiene el resultado final de este bloque principal del trabajo de Cámara: «En el cuerpo $\Omega(\rho)$ hay tantos subcuerpos como sistemas de imprimitividad hay en el grupo Σ». Queda un apartado, el 13 del sumario, en el que se demuestra que si θ es un elemento imprimitivo que determina una extensión intermedia $\Omega(\theta)$ de grado ν_1, entonces $\Omega(\rho)$ es una extensión de $\Omega(\theta)$ de grado μ_1, siendo $\mu = \nu_1\mu_1$.

2.3. Balance. Como conclusión, podemos decir que este artículo no está exento de elaboración personal, si bien más en cuestiones expositivas (selección y ordenación de temas) y aclaratorias (ejemplos detallados) que de fondo. Es interesante constatar que Cámara se fijó en la conexión estructural y la desarrolló en primer lugar para la ecuación normal, lo que significa que captó el vector de modernidad por el que Weber había dirigido la teoría; pero lo hizo sólo parcialmente, al sustituir una de las estructuras, los subgrupos, por los sistemas imprimitivos en que se divide el conjunto de las raíces. Por otra parte, apenas hizo énfasis en que las sustituciones significaban transformaciones globales del cuerpo (sólo habló de cuerpos de números). Si la teoría de Galois fuera tan conocida por el público como afirmaba protocolariamente el autor en su exposición de motivos, no estaría justificado un artículo como éste en un congreso del máximo nivel nacional; su aparición en tal escenario sólo se explica por el escaso conocimiento de la materia que había en el ambiente. Fue un trabajo de iniciación que podríamos considerar esperanzador, pero que, como tantas veces en la matemática española, las circunstancias del autor truncaron la continuidad y las condiciones de la comunidad nacional de los matemáticos no facilitaron que el testigo fuera inmediatamente recogido por otra persona o grupo con la intensidad necesaria.

Referencias

[1] E. Artin, *Foundations of Galois theory*, New York University, Nueva York, 1938.

[2] E. Artin, *Galois theory*, University of Notre Dame Press, Notre Dame, 1942. (Traducción al español: R. Rodríguez Vidal, Vicens-Vives Barcelona, 1970.)

[3] E. Ausejo, Rey Pastor y sus discípulos en la primera etapa de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias (1908–1936), en *Estudios sobre Julio Rey Pastor (1888–1962)* (L. Español, ed.), Instituto de Estudios Riojanos, Logroño (1990), 105–114.

[4] S. Cámara, Sustituciones en el cuerpo algébrico normal de Galois, en *Congreso de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias* (Valladolid 1915), Imprenta de Fortanet, Madrid, 1916. Tomo III, Sección 1.ª, Ciencias Matemáticas, 35–67.

[5] S. Cámara, *Elementos de geometría analítica*, Imprenta Militar, Valencia, 1920.

[6] A. Capelli, *Istituzioni di analisi algebrica*, 4.ª ed., Perellano, Nápoles, 1909.

[7] L. Corry, *Modern algebra and the rise of mathematical structures*, Birkhäuser, Bassel, 1996.

[8] J. Echegaray, *Resolución de ecuaciones y teoría de Galois*, Imprenta y Fundición y Fábrica de Tintas de los Hijos de J. A. García, Madrid, 1897. (Lecciones explicadas en el Ateneo de Madrid.)

[9] J. J. Escribano, *Estudio histórico de la obra matemática de Sixto Cámara Tecedor (1878–1964) en el contexto de la matemática española*, Tesis Doctoral, Universidad de La Rioja, Logroño, 2000.

[10] L. Español, Julio Rey Pastor ante los cambios en el álgebra de su tiempo, en *Matemática y región: La Rioja. Sobre matemáticos riojanos y matemáticas en La Rioja* (L. Español, ed.), Instituto de Estudios Riojanos, Logroño (1998), 63–122.

[11] Z. García de Galdeano, *Crítica y síntesis de álgebra*, Imp. y Lib. de J. Peláez, Toledo, 1888.

[12] Z. García de Galdeano, Reseña de H. Weber: Traité d'algèbre supérieure, 1898, *El Progreso Matemático (2.ª serie)* **1** (1898), 26–28.

[13] Z. García de Galdeano, Reseña de J. Echegaray: Lecciones sobre resolución de ecuaciones y teoría de Galois, 1898–99, *El Progreso Matemático (2.ª serie)* **2** (1900), 220–226.

[14] Z. García de Galdeano, *Exposición sumaria de teorías matemáticas*, Casañal, Zaragoza, 1907.

[15] S. Garma, La primera exposición de la teoría de Galois en España, *Llull* **2** (3) (1979), 7–14.

[16] S. Garma, Echegaray y la teoría de Galois, en *Cinquanta anys de ciència i tècnica a Catalunya. Entorn l'activitat científica d'E. Terradas (1883–1950)*, Institut d'Estudis Catalans, Barcelona (1987), 149–161.

[17] M. Hormigón, García de Galdeano's works on algebra, *Historia Mathematica* **18** (1991), 1–15.

[18] C. Jordan, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Gauthiers-Villars, París, 1870. (Reedición: Gabay, París, 1989.)

[19] B. M. Kierman, The development of Galois theory from Lagrange to Artin, *AHES* **8** (1971), 40–154.

[20] L. Martini, The first lectures in Italy on Galois theory: Bologna, 1886–1887, *Historia Mathematica* **26** (1999), 201–223.

[21] J. Mingot, Sustituciones lineales y sus aplicaciones, *Revista de la Sociedad Matemática Española* **5** (1916), 283–292; **5** (1917), 66–74.

[22] L. Octavio de Toledo, *Tratado de álgebra*, Madrid, 1905.

[23] L. Octavio de Toledo, *Discurso en su recepción pública* (contesta M. Vegas), Real Academia de Ciencias, Madrid, 1914.

[24] J. Rey Pastor, *Introducción a la matemática superior. Estado actual, métodos y problemas*, Biblioteca Corona, Madrid, 1916. (Reimpresión: Instituto de Estudios Riojanos, Logroño, 1983.)

[25] J. Rey Pastor, *Fundamentos de la geometría proyectiva superior*, Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas, Imprenta Fortanet, Madrid, 1916.

[26] J. Rey Pastor, *Lecciones de álgebra*, A. Medina (Toledo), Madrid, 1924. (También: 2.ª ed. modificada y ampliada, 1935.)

[27] J. M. Sánchez Ron (editor), José Echegaray: matemático y físico-matemático, Fundación Banco Exterior, Madrid, 1990.

[28] J. A. Serret, *Cours d'algèbre supérieure*, Bachelier, París, 1849.

[29] E. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, *J. für die reine und angewandte Math.* **137** (1910), 167–309.

[30] B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra*, 2 vols., Springer, Berlín, 1930.

[31] H. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, T. I. Braunschweig, F. Vieweg und Sohn, 1895. (También: 2.ª ed., 1898. Traducción de la 2.ª ed. alemana por J. Griess: *Traité d'algèbre supérieure*, Gauthier-Villars, París, 1898.)

Instituto Valle del Cidacos, Calle Basconia s/n, 26500 Calahorra, Spain
Correo electrónico: `jesbriba@boj.pntic.mec.es`

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Edificio Vives, Calle Luis de Ulloa s/n, 26004 Logroño, Spain
Correo electrónico: `luis.espanol@dmc.unirioja.es`