MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

EL TEOREMA DE ENUMERACIÓN DE PÓLYA

EMILIO FERNÁNDEZ MORAL Y MERCEDES SÁNCHEZ BENITO

ABSTRACT. We wish to offer here a didactic presentation, mainly based on G. Pólya's original paper and by the light of various examples, of a topic of Combinatorics: Pólya's (and Redfield's) enumeration theorem. Our excuses for it just being that an oral version was exposed in one of the sessions corresponding to the year 1991 of the "Seminario Permanente de Actualización en Matemáticas de Logroño", a meeting place for secondary teacher's and university professors that as much owes to Chicho's passion for Mathematics.

El año 1937, la revista *Acta Mathematica* publica un extenso trabajo de investigación del reconocido profesor George Pólya (1887–1985) titulado *Enumeración combinatoria para grupos, grafos y compuestos químicos*, [11]. Consta de una introducción, que comienza:

> *Este artículo presenta una continuación del trabajo hecho por Cayley. Cayley investigó repetidamente problemas combinatorios relativos a la determinación del número de ciertos árboles. Algunos de sus problemas se prestan a interpretación química: el número de árboles en cuestión es igual al número de ciertos (teóricamente posibles) compuestos químicos ...*

y de cuatro capítulos, titulados sucesivamente «Grupos», «Grafos», «Compuestos químicos» y «Evaluación asintótica del número de combinaciones», que termina dando una estimación asintótica del ... *curioso número* ρ_n *de parafinas estructuralmente isómeras* $\mathrm{C}_n\mathrm{H}_{2n+2}$ *que intrigó a Cayley.*

La primera traducción al inglés publicada, el año 1987, se debe a Ronald C. Read, que la acompaña (en [13]) de un estudio, de antecedentes y consecuentes, titulado *El legado del artículo de Pólya: cincuenta años de la teoría de Pólya*, con más de doscientas referencias bibliográficas. Es en el primer capítulo ([13, págs. 17–20]) donde Pólya expone, demostrándolo de dos maneras, su «**teorema fundamental**», hoy día un resultado clásico de la enumeración combinatoria. En la página 118, Read da noticia de los trabajos menos conocidos del matemático americano J. H. Redfield, que ya en 1927 publicó un resultado equivalente, [14].

Nuestro objetivo en este artículo es hacer una exposición didáctica del teorema de Pólya, a la luz de unos problemas de combinatoria recreativa y basada esencialmente en las primeras páginas de [13].

Para nosotros, de hecho, «todo empezó» al leer la *Revista* que, con la finalidad de motivar, interesar y entretener, formaba las «páginas amarillas» de los libros

2000 *Mathematics Subject Classification.* 05–01, 05A15.
Key words and phrases. Pólya's enumeration theorem, necklace's problem.

de Matemáticas de B.U.P. que Miguel de Guzmán, José Colera y Adela Salvador publicaron el año 1987. En la página 175 del libro de primero [9] quedaba planteado el siguiente problema:

Tienes cuentas (todas las que quieras) de tres colores (verdes, rojas y amarillas). ¿Cuántas sortijas distintas puedes hacer con 5 *cuentas?*

Por otra parte, en libros de matemática recreativa se podía encontrar la fórmula para el número de collares de n perlas de k colores ([8, pág. 323]), o enterarse de que hay 2226 cubos con las caras pintadas de alguno de entre seis colores posibles, de los que 30 tienen un color distinto en cada cara ([8, pág. 242]), que hay 24 cuadrados de fondo negro con la cara dividida en cuadrantes de 3 colores ([8, pág. 241]), que hay $\frac{n^3+2n}{3}$ triángulos de fondo negro y cara dividida en 3 partes triangulares idénticas de n colores ([7, p. 255]), o que con 12 varillas de colores distintos y de la misma longitud se pueden formar hasta 19958400 entramados cúbicos ([1, pág. 48]).

Por fortuna, el año 1990 encontramos en la librería Pons de Zaragoza el libro de R. C. Read.

Problema A_1.

- Tenemos un montón de cuentas de collar de la misma forma, unas blancas y otras negras. ¿Cuántos collares distintos se pueden formar engarzando 6 de ellas? ([13, pág. 98]).

Llamemos **configuración** (hexagonal bicolor) en este problema a cada una de las disposiciones de 6 cuentas, blancas o negras, en los vértices de un hexágono regular plano que los tiene distinguidos, por ejemplo, numerados. O bien, una **configuración hexagonal bicolor** es una aplicación $\varphi\colon \{1,2,3,4,5,6\} \to \{\circ, \bullet\}$. Nos convendrá, para abreviar, llamar Φ al conjunto de las configuraciones. Hay en total $2^6 = 64$ configuraciones distintas, por ejemplo

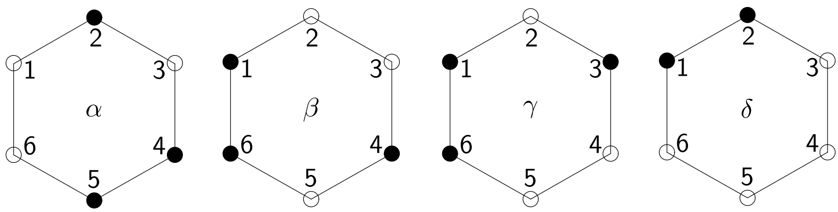
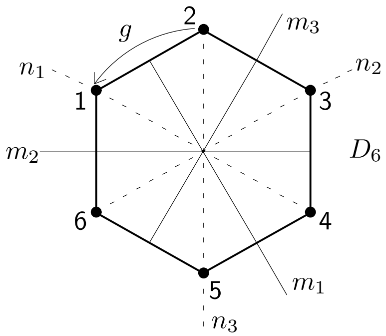


FIGURA 1

Las configuraciones no enumeran los diferentes collares, pues hay configuraciones distintas, como las tres primeras de la figura anterior, que constituyen, espacialmente, el mismo collar. Pero enseguida nos damos cuenta de que dos configuraciones constituyen el mismo collar si se puede «transformar» una en otra mediante alguno de los elementos del **grupo diédrico** D_6 de las simetrías de un hexágono regular que presentamos en la figura siguiente (las reflexiones planas de D_6 hacen el papel de los giros espaciales, de $180°$ en torno a los mismos ejes, que dan la vuelta al collar):



$$D_6 = \{1, g, g^2, g^3, g^4, g^5, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3\}$$

FIGURA 2

Así, en el caso de las configuraciones α, β y γ de la figura 1, se tienen las relaciones que escribiremos

$$\beta = g^4(\alpha)\,; \qquad \gamma = m_3(\alpha),$$

y las tres constituyen, desde luego, el mismo collar.

Como D_6 es un grupo, la relación binaria en Φ definida por $\varphi \sim \psi \iff \exists\, s \in D_6$ tal que $s(\varphi) = \psi$, es de equivalencia, y produce una partición de Φ en clases disjuntas. Estas clases sí enumeran los collares espacialmente diferentes, y se llaman las **órbitas** en la acción **del grupo** D_6 sobre el conjunto Φ.

Por ejemplo, la órbita de la configuración α de la figura 1, que designaremos por $\boldsymbol{O_\alpha}$, es el conjunto formado por las doce configuraciones siguientes:

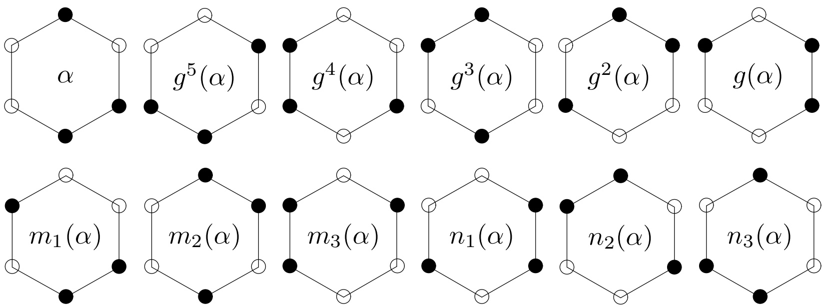


FIGURA 3

y $\boldsymbol{O_\delta}$ es el conjunto formado por estas otras seis:

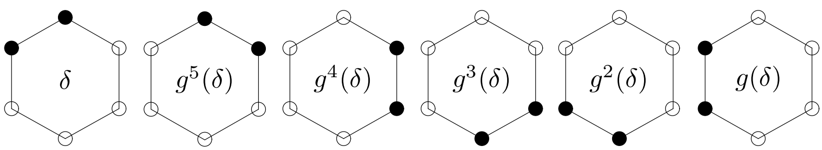


FIGURA 4

En este segundo caso, la órbita consta de menos configuraciones; el motivo es que hay, además de la identidad, otra simetría, la reflexión m_1, que deja δ invariante ($m_1(\delta) = \delta$), y las demás reflexiones convierten δ en alguna de las configuraciones $g^i(\delta)$; visto de otro modo, cada una de las 6 configuraciones de O_δ es invariante por dos simetrías: la identidad y la **conjugada** de la simetría m_1 por el giro g^i correspondiente, es decir, la simetría $g^i\, m_1\, (g^i)^{-1}$. Por ejemplo, la configuración $g(\delta)$ es invariante por la identidad y por $gm_1g^{-1} = m_2$, ya que $gm_1g^{-1}(g(\delta)) = gm_1(\delta) = g(\delta)$.

En ambos casos, y adelantando un primer resultado general que veremos a continuación, la suma, extendida a todas las configuraciones de una órbita, del número de simetrías del grupo D_6 que dejan cada configuración invariante, es igual al orden del grupo D_6: en el primer caso hay 12 configuraciones distintas, siendo cada una de ellas sólo invariante por la identidad; en el segundo hay 6 configuraciones distintas, cada una de ellas invariante por dos simetrías.

Las observaciones siguientes son de rápida comprobación:

- Para cada $\varphi \in \Phi$, las simetrías que dejan φ invariante constituyen un subgrupo H_φ de D_6.
- Para cada $\varphi \in \Phi$, el número de configuraciones de la órbita O_φ es
$$N(O_\varphi) = \frac{|D_6|}{|H_\varphi|}$$
(donde hemos usado —aquí y en lo que sigue— las notaciones $N(A)$, $|G|$ para designar el número de elementos del conjunto finito A o del grupo G). Esto es así puesto que la aplicación entre el grupo cociente D_6/H_φ de los cogrupos a izquierda módulo H_φ y el conjunto de configuraciones O_φ dada por $sH_\varphi \to s(\varphi)$ es biyectiva, y se sabe que $|D_6/H_\varphi| = \dfrac{|D_6|}{|H_\varphi|}$.
- Para cada configuración ψ equivalente a φ (sea $s \in D_6$ tal que $\psi = s(\varphi)$), el subgrupo de las simetrías que dejan invariante ψ es $H_\psi = sH_\varphi s^{-1}$, que tiene el mismo orden que H_φ.

De modo que, para una órbita cualquiera O_φ, se tiene
$$\sum_{\psi \in O_\varphi} N\big(\{s \in D_6 \mid s(\psi) = \psi\}\big) = N(O_\varphi) \cdot |H_\varphi| = |D_6| = 12.$$

Y así, la suma, extendida a las 64 configuraciones de Φ, del número de simetrías de D_6 que dejan cada configuración invariante será igual al número de órbitas, multiplicado por el valor constante, 12, de dicha suma sobre cada órbita, o sea,
$$\sum_{\varphi \in \Phi} N\big(\{s \in D_6 \mid s(\varphi) = \varphi\}\big) = 12 \times (\text{número de órbitas}).$$

Pero podemos hacer esta suma de otro modo; en vez de contar, para cada configuración, el número de simetrías que la dejan invariante, podemos contar, para cada simetría, el número de configuraciones que deja invariantes; el número (finito) total obtenido será el mismo, y se tiene así finalmente:

$$\sum_{s\in D_6} N\big(\{\varphi \in \Phi \mid s(\varphi) = \varphi\}\big) = 12 \times (\text{número de órbitas}).$$

De manera que para hallar el número de collares se puede, simplemente, «promediar» el número de configuraciones invariantes por cada simetría de D_6.

Nota. Este resultado, válido en general para la acción de un grupo finito G sobre un conjunto finito K,

$$\text{número de órbitas} = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g\in G} N\big(\{\kappa \in K \mid g(\kappa) = \kappa\}\big),$$

se conoce como **lema de Burnside** (aparece en [4]; véase [13, pág. 101]).

Es esencial, para calcular fácilmente el número de configuraciones que deja invariantes cada simetría, y para lo que seguirá, representar las 12 simetrías del grupo D_6 como permutaciones de los 6 vértices de un hexágono regular (se está considerando, pues, $D_6 \leq S_6$, donde S_6 es el **grupo simétrico** de 6 letras; diremos que D_6 actúa sobre Φ como **grupo de permutaciones de grado 6**), y además, presentar estas permutaciones como producto de ciclos disjuntos de la manera siguiente (véase la figura 2):

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)(4)(5)(6);$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (165432);$$

$$g^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (153)(264);$$

$$g^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (14)(25)(36);$$

$$g^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (135)(246);$$

$$g^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (123456);$$

$m_1 = (12)(36)(45)$; $\qquad m_2 = (16)(25)(34)$; $\qquad m_3 = (14)(23)(56)$;

$n_1 = (1)(4)(26)(35)$; $\qquad n_2 = (3)(6)(24)(15)$; $\qquad n_3 = (2)(5)(13)(46)$.

Por ejemplo, la «permutación» n_1 deja fijos los vértices 1 y 4, e intercambia el 2 con el 6, y el 3 con el 5; n_1 es, así, el producto de dos ciclos de longitud 1, y de dos ciclos de longitud 2. Podemos contar el número de configuraciones bicolores que quedan invariantes por esta permutación si nos damos cuenta que, en una tal configuración, el vértice 1 y el vértice 4 pueden tener cualquier color, los vértices 2 y 6 deben ser del mismo color para que su intercambio no altere la configuración, y lo mismo para los vértices 3 y 5. Luego el número de configuraciones invariantes por n_1 es $2^4 = 16$.

Si, en general, la permutación s se descompone en k ciclos disjuntos, el número de configuraciones bicolores invariantes por s será 2^k. De modo que, si agrupamos las permutaciones que se descomponen en el mismo número de ciclos, sin importar la longitud de los mismos, como hay

1	permutación compuesta de	6	ciclos,	$\{1\}$
3	permutaciones compuestas de	4	ciclos,	$\{n_1, n_2, n_3\}$
4	permutaciones compuestas de	3	ciclos,	$\{g^3, m_1, m_2, m_3\}$
2	permutaciones compuestas de	2	ciclos,	$\{g^2, g^4\}$
2	permutaciones compuestas de	1	ciclos,	$\{g, g^5\}$

se tiene

$$\sum_{s \in D_6} N(\{\varphi \in \Phi \mid s(\varphi = \varphi\}) = 1 \cdot 2^6 + 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2 = 156,$$

y, por lo tanto, el número de órbitas es $\dfrac{156}{12} = 13$. Estos son los 13 collares bicolores de 6 cuentas:

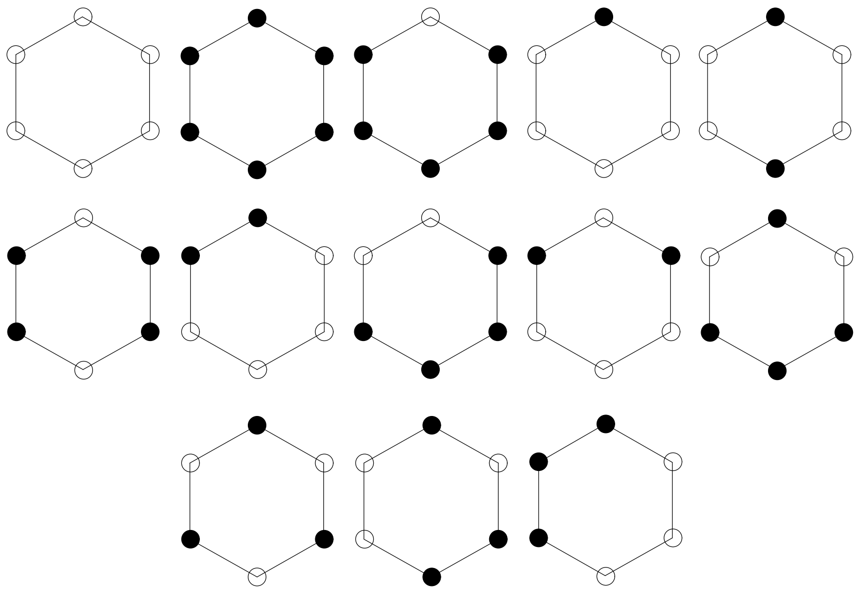


Figura 5

De modo que una forma de resolver el problema es hallar el valor, para $s = 2$, del polinomio «contador» $C(s) = \frac{1}{12}(s^6 + 3s^4 + 4s^3 + 2s^2 + 2s)$; aquí, 12 es el orden del grupo D_6, y cada simetría de D_6 contribuye a la suma entre paréntesis con un término s^k si, en su presentación como permutación de grado 6, está compuesta por un total de k ciclos disjuntos. Más en general, el número de collares de 6 cuentas de n colores ($n \geq 1$) será $C(n)$.

No supone ahora ningún esfuerzo, y a cambio su utilidad, como veremos en los próximos problemas $\boldsymbol{B_i}$, es mayor, construir otro «polinomio contador» que contiene más información sobre la estructura combinatoria del grupo, y al que **Pólya** denominó **índice de ciclos del grupo de permutaciones** (D_6 en este caso, como grupo de permutaciones de grado 6); se trata del polinomio en 6 variables, cuyo número está indicado por el grado del grupo,

$$\zeta_{D_6}(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) = \frac{1}{12}(s_1^6 + 3s_1^2 s_2^2 + 4s_2^3 + 2s_3^2 + 2s_6),$$

al que una **permutación de tipo** $[\boldsymbol{j_1, j_2, \ldots, j_6}]$, es decir, que se descompone en j_1 ciclos de longitud 1, j_2 ciclos de longitud 2, ..., j_6 ciclos de longitud 6 (siendo $j_1 + 2j_2 + \cdots + 6j_6 = 6$), contribuye con un monomio de la forma $s_1^{j_1} s_2^{j_2} \cdots s_6^{j_6}$. El número de collares de 6 cuentas y n colores es, ahora,

$$C(n) = \zeta_{D_6}(n, n, n, n, n, n).$$

Nota. En general, el índice de ciclos del grupo finito G como grupo de permutaciones de grado n es

$$\zeta_G(s_1, \ldots, s_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{j_1, \ldots, j_n \geq 0 \\ j_1 + 2j_2 + \cdots + nj_n = n}} h_{j_1 \ldots j_n} s_1^{j_1} s_2^{j_2} \cdots s_n^{j_n},$$

donde $h_{j_1 \ldots j_n}$ es el número de elementos de tipo $[j_1, j_2, \ldots, j_n]$ que hay en G. (El índice de ciclos caracteriza «combinatoriamente» el grupo de permutaciones; véase [13, p. 27].)

Problema $\boldsymbol{A_2}$.

- ¿Cuántos collares distintos, de n cuentas, se pueden formar con cuentas de k colores? ([6, núm. 275]).

Vamos a calcular el índice de ciclos del grupo diédrico D_n de orden $2n$, de las simetrías del n-gono regular, que actúa aquí como grupo de permutaciones de grado n sobre el conjunto Φ de las k^n configuraciones posibles.

El grupo D_n está formado por n reflexiones y n giros, en éstos se incluye la identidad. Si n es impar, cada una de las n reflexiones se descompone en producto de 1 ciclo de longitud 1 y $\frac{n-1}{2}$ ciclos de longitud 2, siendo entonces la contribución total de las reflexiones al índice de ciclos igual a $\frac{1}{2} s_1 s_2^{\frac{n-1}{2}}$.

En cambio, si n es par (recordemos el caso hexagonal), la mitad de las reflexiones son producto de $\frac{n}{2}$ ciclos de longitud 2, y la otra mitad son producto de 2 ciclos de longitud 1 y $\frac{n-2}{2}$ ciclos de longitud 2; la contribución de las reflexiones al índice de ciclos es, en este caso,

$$\frac{1}{2n}\left(\frac{n}{2} s_2^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} s_2^{\frac{n}{2}-1} s_1^2\right) = \frac{1}{4} s_2^{\frac{n}{2}-1}(s_1^2 + s_2).$$

Los n giros de D_n, que constituyen el subgrupo cíclico C_n, son, sobre los vértices $i = 1, 2, \ldots, n$, las permutaciones $g_m(i) = i + m$ (módulo n), para $m = 1, 2, \ldots, n$.

Fijemos m; si $k \geq 1$ es el menor entero tal que $km \equiv 0$ (módulo n), es fácil ver que entonces g_m se descompone en $\frac{n}{k}$ ciclos de longitud k. Sea $\mathrm{mcd}(m, n) = d$, tal menor entero $k \geq 1$ es obviamente $k = \frac{n}{d}$, y la permutación g_m se descompone, pues, en d ciclos de longitud $\frac{n}{d}$.

Agrupemos las g_m que tienen el mismo tipo de descomposición en producto de ciclos. Para ello, denotemos con $\varphi(h)$ al número de enteros positivos menores que h y primos con h (función φ de Euler). De este modo, para cada divisor d de n hay $\varphi(\frac{n}{d})$ números m, entre 1 y n, tales que $\mathrm{mcd}(m, n) = d$.

De modo que, por cada divisor d de n, hay $\varphi(\frac{n}{d})$ permutaciones que contribuyen con un término $s_{\frac{n}{d}}^{d}$ al índice de ciclos. La contribución de los n giros es, entonces,

$$\frac{1}{2} \cdot \zeta_{C_n}(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) s_{\frac{n}{d}}^{d} = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \varphi(d) s_d^{\frac{n}{d}},$$

y, finalmente, el índice de ciclos de D_n actuando como grupo de permutaciones de grado n es ([13, pág. 22])

$$\zeta_{D_n}(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \varphi(d) s_d^{\frac{n}{d}} + \frac{1}{2} \cdot \begin{cases} s_1 s_2^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \frac{1}{2} s_2^{\frac{n}{2}-1}(s_1^2 + s_2) & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Luego, el número de collares de n cuentas y k colores es ([8, pág. 323])

$$\zeta_{D_n}(k, k, \overset{(n}{\ldots}, k) = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \varphi(d) k^{\frac{n}{d}} + \frac{1}{2} \cdot \begin{cases} k^{\frac{n+1}{2}} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \frac{1}{2} k^{\frac{n}{2}}(k+1) & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Si $k = 2$ y n es un número primo impar, el número de collares es ([8, pág. 320])

$$\frac{1}{2n}(2^n + 2(n-1)) + \frac{1}{2} 2^{\frac{n+1}{2}} = \frac{2^{n-1} - 1}{n} + 2^{\frac{n-1}{2}} + 1.$$

Adjuntamos una pequeña tabla de índices de ciclos que permitirá resolver alguno de los problemas mencionados al principio:

$$\zeta_{C_3}(s_1, s_2, s_3) = \tfrac{1}{3}(s_1^3 + 2s_3) \qquad \zeta_{D_3}(s_1, s_2, s_3) = \tfrac{1}{6}(s_1^3 + 3s_1 s_2 + 2s_3)$$

$$\zeta_{C_4}(s_1, \ldots, s_4) = \tfrac{1}{4}(s_1^4 + s_2^2 + 2s_4) \qquad \zeta_{D_4}(s_1, \ldots, s_4) = \tfrac{1}{8}(s_1^4 + 2s_1^2 s_2 + 3s_2^2 + 2s_4)$$

$$\zeta_{C_5}(s_1, \ldots, s_5) = \tfrac{1}{5}(s_1^5 + 4s_5) \qquad \zeta_{D_5}(s_1, \ldots, s_5) = \tfrac{1}{10}(s_1^5 + 5s_1 s_2^2 + 4s_5)$$

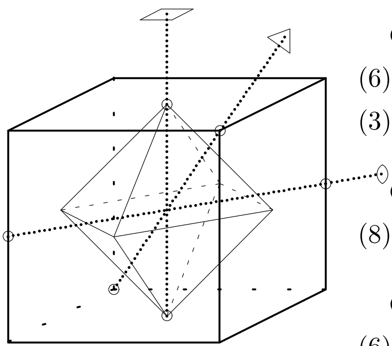
En problemas n-gonales bicolores, el menor n para el que el número de órbitas en la acción de los grupos C_n y D_n es distinto es precisamente $n = 6$, el caso presentado en el problema $\boldsymbol{A_1}$.

Problema A_3.

- (a) Queremos pintar cada cara de un cubo con un color, pudiendo repetir colores, y tenemos n colores distintos. ¿Cuántos cubos distintos podríamos conseguir? ([8, pág. 242 y 315]).
- (b) Lo mismo, pero con un octaedro regular.

Sobre el conjunto de configuraciones del apartado (a) actúa el **grupo octaédrico O**, de orden 24, de los giros que dejan invariante un cubo (o un octaedro), como grupo de permutaciones, de grado 6, de las 6 caras del cubo (o de los 6 vértices del octaedro inscrito en las caras del cubo). En cambio en (b), es el mismo grupo O, pero como grupo de permutaciones, de grado 8, de las 8 caras del octaedro (o de los 8 vértices del cubo circunscrito).

El grupo completo de las simetrías de un cubo, o de un octaedro, es de orden 48, pues también están las simetrías especulares. Pero tendremos dos cubos (octaedros) distintos cuando no se pueda hacer coincidir uno con otro por un giro espacial, y las simetrías actuantes se reducen a los 24 elementos del grupo octaédrico. En el lado derecho de la siguiente figura tabulamos el tipo de cada uno de ellos, como permutación de grado 6 y como permutación de grado 8:



	Tipo en S_6	**Tipo en S_8**
Giros en los 3 ejes □		
(6) giros $\pm 90°$:	$[2,0,0,1,0,0]$	$[0,0,0,2,0,0,0,0]$
(3) giros $180°$:	$[2,2,0,0,0,0]$	$[0,4,0,0,0,0,0,0]$
Giros en los 4 ejes △		
(8) giros $\pm 120°$:	$[0,0,2,0,0,0]$	$[2,0,2,0,0,0,0,0]$
Giros en los 6 ejes ◊		
(6) giros $180°$:	$[0,3,0,0,0,0]$	$[0,4,0,0,0,0,0,0]$

Figura 6

(a) El índice de ciclos del grupo de permutaciones es (ver la tabla)

$$\zeta_O(s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6) = \frac{1}{24}(s_1^6 + 6s_1^2 s_4 + 3s_1^2 s_2^2 + 8s_3^2 + 6s_2^3),$$

y el número de cubos,

$$\zeta_O(n,n,n,n,n,n) = \frac{1}{24}(n^6 + 3n^4 + 12n^3 + 8n^2) = \frac{1}{24}n^2(n+1)(n^3 - n^2 + 4n + 8).$$

(b) En este caso, el índice de ciclos del grupo de permutaciones es

$$\zeta_O(s_1,s_2,\ldots,s_8) = \frac{1}{24}(s_1^8 + 9s_2^4 + 8s_1^2 s_3^2 + 6s_4^2),$$

y el número de octaedros,

$$\zeta_O(n, n, \overset{(8}{\ldots}, n) = \frac{n^2}{24}(n^6 + 17n^2 + 6).$$

Nota 1. La representación del grupo O como grupo de permutaciones de menor grado es la de grado 4, ya que $O \cong S_4$, a cada giro de O le corresponde en este isomorfismo una de las 4! permutaciones de las diagonales del cubo (o del octaedro). El índice de ciclos de O como grupo de permutaciones de grado 4 es (la fórmula siguiente se generaliza de modo obvio para conseguir el índice de ciclos $\zeta_{S_n}(s_1, \ldots, s_n)$):

$$\begin{aligned}\zeta_O(s_1, s_2, s_3, s_4) &= \frac{1}{24} \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3, j_4 \geq 0 \\ j_1 + 2j_2 + 3j_3 + 4j_4 = 4}} \frac{4!}{j_1!\, 2^{j_2} j_2!\, 3^{j_3} j_3!\, 4^{j_4} j_4!} s_1^{j_1} s_2^{j_2} s_3^{j_3} s_4^{j_4} \\ &= \frac{1}{24}\left(s_1^4 + 6s_1^2 s_2 + 8s_1 s_3 + 3s_2^2 + 6s_4\right).\end{aligned}$$

Por otro lado, también se puede considerar la actuación de los elementos del grupo O permutando las doce aristas del cubo. El índice de ciclos de O como grupo de grado 12 es

$$\zeta_O(s_1, s_2, \ldots, s_{12}) = \frac{1}{24}\left(s_1^{12} + 9s_4^3 + 8s_3^4 + 6s_1^2 s_2^5\right).$$

Nota 2. El **grupo tetraédrico $\boldsymbol{T}$**, de los 12 giros que dejan invariante un tetraedro regular[1] (el grupo completo de simetrías es de orden 24, pues además de los 4 ejes de giro ternarios que pasan por un vértice y el centro de la cara opuesta, y los 3 binarios que pasan por los puntos medios de dos aristas opuestas, hay simetrías especulares respecto de los planos perpendiculares a una arista que pasan por su punto medio), es isomorfo al **grupo alternado $\boldsymbol{A_4}$** de grado 4 (los giros son las permutaciones pares de las caras del tetraedro). El índice de ciclos de T como grupo de permutaciones de grado 4 es

$$\begin{aligned}\zeta_T(s_1, s_2, s_3, s_4) &= \frac{1}{24} \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3, j_4 \geq 0 \\ j_1 + 2j_2 + 3j_3 + 4j_4 = 4}} \frac{4!\big(1 + (-1)^{j_2 + j_4}\big)}{j_1!\, 2^{j_2} j_2!\, 3^{j_3} j_3!\, 4^{j_4} j_4!} s_1^{j_1} s_2^{j_2} s_3^{j_3} s_4^{j_4} \\ &= \frac{1}{12}\left(s_1^4 + 8s_1 s_3 + 3s_2^2\right).\end{aligned}$$

Esta fórmula se puede generalizar para el índice de ciclos $\zeta_{A_n}(s_1, \ldots, s_n)$; véase [13, pág. 22]).

Nota 3. Los índices de ciclos del **grupo icosaédrico $\boldsymbol{I}$**, de los 60 giros que dejan invariante un icosaedro (o un dodecaedro) regular, como grupo de permutaciones de grado 12 (vértices del icosaedro o caras del dodecaedro) o de grado 20 (caras del icosaedro o vértices del dodeacaedro) son, respectivamente,

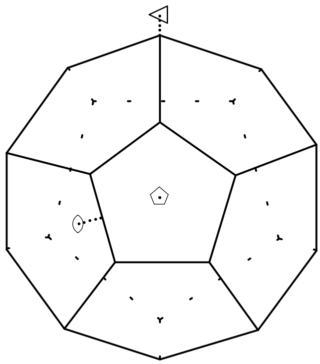
$$\zeta_I(s_1, s_2, \ldots, s_{12}) = \frac{1}{60}(s_1^{12} + 24s_1^2 s_5^2 + 20s_3^4 + 15s_2^6),$$

[1] Véase un problema relacionado con este grupo en [8, pág. 315].

y

$$\zeta_I(s_1, s_2, \ldots, s_{20}) = \frac{1}{60}(s_1^{20} + 24s_5^4 + 20s_1^2 s_3^6 + 15s_2^{10}),$$

como se pueden escribir a partir de la tabla siguiente:



Tipo en S_{12}	**Tipo en S_{20}**
Giros en los 6 ejes ⬠	
$[2, 0, 0, 0, 2, 0, \ldots, 0]$	$[0, 0, 0, 0, 4, 0, \ldots, 0]$
Giros en los 10 ejes △	
$[0, 0, 4, 0, \ldots, 0]$	$[2, 0, 6, 0, \ldots, 0]$
Giros en los 15 ejes ◊	
$[0, 6, 0, \ldots, 0]$	$[0, 10, 0, \ldots, 0]$

FIGURA 7

El grupo I es isomorfo (véase, por ejemplo, [5, pág. 50]) al alternado A_5 de grado 5, y su índice de ciclos como grupo de permutaciones de grado 5 puede obtenerse a partir de la fórmula general señalada en la nota anterior.

Si ahora queremos resolver problemas como, ¿cuántos collares distintos hay, de n cuentas y k colores, pero que contengan α_1 cuentas de color «1»,…, α_k cuentas de color «k» (siendo $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = n$)? o bien, ¿cuántos cubos hay con tres caras rojas, dos azules y una amarilla?, necesitamos dar un paso más. La solución no requiere una técnica muy complicada, sólo «subirnos a hombros» de Pólya, que ahora muestra toda la potencia del índice de ciclos de un grupo de permutaciones, al poderse conjugar con el uso de funciones generatrices en su teorema.

Lo expondremos en la solución del problema siguiente. Es oportuno empezar con palabras del propio Pólya ([12], «Sobre pictografía»):

… La pictografía es quizá la fuente remota de los alfabetos griego, latino y gótico cuyas letras utilizamos corrientemente como símbolos matemáticos. Deseo observar que también la pictografía primitiva puede ser de alguna utilidad en la matemática. En lo que sigue, quiero mostrar cómo el método de funciones generatrices, importante en el análisis combinatorio, puede desarrollarse de un modo bastante intuitivo a partir de «series figuradas», en las que los términos son dibujos (o, con más precisión, variables representadas por dibujos) …

Problema B_1.

- ¿Cuántos collares distintos, de n cuentas, se pueden hacer con k cuentas blancas y $n - k$ negras, siendo $0 \le k \le n$?

Llamemos A_{kl} a los números que buscamos. Construyamos[2] su, como la llama Pólya, **serie generatriz «figurada»**

$$F(\circ, \bullet) = \sum_{\substack{0\leq k,l\leq n\\ k+l=n}} A_{kl}\, \circ^k \bullet^l,$$

que vendría a ser la «suma» de los collares del problema $\boldsymbol{A_2}$, con los términos «semejantes» (collares que tienen la misma composición de cuentas blancas y negras) agrupados; por ejemplo, en el caso $n = 6$ (problema $\boldsymbol{A_1}$), dicha «serie» es

$$1 \cdot \circ^6 \bullet^0 + 1 \cdot \circ^5 \bullet^1 + 3 \cdot \circ^4 \bullet^2 + 3 \cdot \circ^3 \bullet^3 + 3 \cdot \circ^2 \bullet^4 + 1 \cdot \circ^1 \bullet^5 + 1 \cdot \circ^0 \bullet^6,$$

donde $\circ^k$ indica la presencia de k cuentas blancas, y $\bullet^l$ la de l negras, en el collar (la concatenación de cuentas se asimila a un producto algebraico conmutativo de las figuras que las representan).

Ahora, A_{kl} es (recordemos el problema $\boldsymbol{A_2}$) el número de órbitas correspondientes a configuraciones n-gonales bicolores formadas con k cuentas blancas y l negras, **configuraciones** que llamaremos, para abreviar, **de contenido $\boldsymbol{(k, l)}$**.

Aplicando un «lema de Burnside parcial» a la acción de D_n sobre el conjunto Φ_{kl} de las configuraciones de contenido (k, l), se tiene

$$A_{kl} = \frac{1}{|D_n|} \sum_{s\in D_n} N(\{\varphi \in \Phi_{kl} \mid s(\varphi) = \varphi\}),$$

de manera que

$$\begin{aligned} F(\circ, \bullet) &= \sum_{k,l} \left(\frac{1}{2n} \sum_{s\in D_n} N(\{\varphi \in \Phi_{kl} \mid s(\varphi) = \varphi\}) \right) \circ^k \bullet^l \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{s\in D_n} \left(\sum_{k,l} N(\{\varphi \in \Phi_{kl} \mid s(\varphi) = \varphi\})\, \circ^k \bullet^l \right). \end{aligned}$$

Veamos que, si la permutación $s \in D_n$ de grado n es de tipo $[j_1, j_2, \ldots, j_n]$, entonces

$$\sum_{k,l} N(\{\varphi \in \Phi_{kl} \mid s(\varphi) = \varphi\})\, \circ^k \bullet^l = (\circ + \bullet)^{j_1} (\circ^2 + \bullet^2)^{j_2} \cdots (\circ^n + \bullet^n)^{j_n}.$$

Una tal permutación s puede visualizarse en la forma siguiente:

$$s = \overbrace{(x)(x)\cdots(x)}^{j_1}\, \overbrace{(xx)(xx)\cdots(xx)}^{j_2} \cdots \overbrace{(x\overset{(n}{\cdots}x)}^{j_n\leq 1}.$$

Una configuración α, de contenido cualquiera, será invariante por esta permutación s si y sólo si su «expresión figurada» es

$$\alpha = \overbrace{(\otimes)(\otimes)\ldots(\otimes)}^{j_1}\, \overbrace{(\otimes\otimes)(\otimes\otimes)\ldots(\otimes\otimes)}^{j_2} \ldots \overbrace{(\otimes\overset{(n}{\ldots}\otimes)}^{j_n\leq 1},$$

[2] De acuerdo con [12], hemos modificado la forma de la serie figurada que se da en [13].

donde, dentro de cada paréntesis, las «bolitas» son del mismo color (condición necesaria y suficiente para que el correspondiente ciclo de s deje la configuración α invariante).

Así que poniendo $(\circ\circ) = \circ^2$, $(\bullet\bullet) = \bullet^2$, etc., las configuraciones α invariantes por s (en número de $2^{j_1+j_2+\cdots+j_n}$, como se ha visto en el problema $\boldsymbol{A_1}$) son todas las de la forma

$$\alpha = \overbrace{\otimes\otimes\ldots\otimes}^{j_1}\,\overbrace{\otimes^2\otimes^2\ldots\otimes^2}^{j_2}\ \ldots\ \overbrace{\otimes^n}^{j_n\leq 1},$$

luego son, en efecto, los términos del producto algebraico

$$(\circ+\bullet)^{j_1}(\circ^2+\bullet^2)^{j_2}\cdots(\circ^n+\bullet^n)^{j_n}.$$

Ahora, si se introduce la función auxiliar

$$f(\circ,\bullet) = \circ+\bullet$$

a la que Pólya llama **función generatriz de la colección de figuras** y se pone $f_i(\circ,\bullet) = f(\circ^i,\bullet^i)$, se tiene finalmente

$$F(\circ,\bullet) = \tfrac{1}{2n}\sum_{j_1+\cdots+nj_n=n} h_{j_1j_2\ldots j_n}\big[f_1(\circ,\bullet)\big]^{j_1}\cdots\big[f_n(\circ,\bullet)\big]^{j_n} = \zeta_{D_n}(f_1,f_2,\ldots,f_n),$$

donde $h_{j_1j_2\ldots j_n}\geq 0$ es el número de permutaciones de D_n de tipo $[j_1,j_2,\ldots,j_n]$.

El resultado al que se ha llegado, que constituye la forma particular del teorema de Pólya para el caso que estamos tratando, dice que la función generatriz del número de collares de contenido (k,l) se obtiene substituyendo la correspondiente $f_i(\circ,\bullet)$ en el lugar de la indeterminada s_i en el índice de ciclos del grupo D_n.

En particular, para $n=6$, como el índice de ciclos del grupo D_6 era:

$$\zeta_{D_6}(s_1,s_2,\ldots,s_6) = \frac{1}{12}(s_1^6+3s_1^2s_2^2+4s_2^3+2s_3^2+2s_6),$$

la función generatriz $F(\circ,\bullet)$ queda, en este caso «reescrita», en la forma

$$F(\circ,\bullet) = \frac{1}{12}\big[(\circ+\bullet)^6+3(\circ+\bullet)^2(\circ^2+\bullet^2)^2+4(\circ^2+\bullet^2)^3+2(\circ^3+\bullet^3)^2+(\circ^6+\bullet^6)\big],$$

y el coeficiente de $\circ^k\bullet^{6-k}$ en el polinomio homogéneo de grado 6 que se obtiene es, desde luego, el número de collares de 6 cuentas con k cuentas blancas y $6-k$ cuentas negras.

En el caso general, sustituyendo la generatriz de figuras $f(\circ,\bullet) = \circ+\bullet \equiv 1+x$ en el índice de ciclos $\zeta_{D_n}(s_1,\ldots,s_n)$, se obtiene la función generatriz de los números que buscamos, llamémosles solamente A_k, en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=0}^{n} A_k x^k = \xi_{D_n}(1+x,1+x^2,\ldots,1+x^n)\\ &= \frac{1}{2n}\sum_{d|n}\varphi(d)(1+x^d)^{\frac{n}{d}} + \begin{cases} \frac{1}{2}(1+x)(1+x^2)^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ es impar,}\\[2ex] \frac{1}{2}(1+x+x^2)(1+x^2)^{\frac{n}{2}-1} & \text{si } n \text{ es par.}\end{cases}\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de x^k, se sigue:

$A_0 = 1$; ya que $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$, basta contar las fracciones $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$.

Y, para $k \geq 1$, teniendo en cuenta que:

- En $(1+x^d)^{n/d}$ sólo aparecerá un término x^k si $k = rd$, es decir si d también divide a k, y el coeficiente será $\binom{n/d}{r} = \binom{n/d}{k/d}$.
- En la expresión que aparece en el caso n impar,

$$(1+x^2)^{\frac{n-1}{2}}(1+x) = 1 + \tfrac{n-1}{2}x^2 + \binom{\frac{n-1}{2}}{2}x^4 + \cdots + x^{n-1}$$
$$+ x + \tfrac{n-1}{2}x^3 + \binom{\frac{n-1}{2}}{2}x^5 + \cdots + x^n,$$

el coeficiente de x^k es $\binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{k}{2}}$ si k es par, o $\binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{k-1}{2}}$ si k es impar.

- En la expresión que aparece en el caso n par,

$$(1+x^2)^{\frac{n}{2}-1}(1+x+x^2) = (1+x^2)^{\frac{n}{2}} + x(1+x^2)^{\frac{n}{2}-1}$$
$$= \sum_{l=0}^{n/2} \binom{n/2}{l} x^{2l} + \sum_{l=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{\frac{n}{2}-1}{l} x^{2l+1},$$

el coeficiente de x^k es $\binom{\frac{n}{2}}{\frac{k}{2}}$ si k es par, o $\binom{\frac{n}{2}-1}{\frac{k-1}{2}}$ si k es impar.

Por lo tanto, abreviando algo la expresión final mediante la función parte entera,

$$A_k = \frac{1}{2n} \sum_{d|\ \mathrm{mcd}(n,k)} \varphi(d)\binom{n/d}{k/d} + \begin{cases} \frac{1}{2}\binom{\frac{n}{2}}{\frac{k}{2}} & \text{si } n \text{ es par y k es par,} \\ \frac{1}{2}\binom{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por ejemplo (tomado de [15]) cuando $n = 12$, $0 \leq k \leq 12$, la fórmula anterior da

$$A_k = \frac{1}{24} \sum_{d|\ \mathrm{mcd}(12,k)} \varphi(d)\binom{12/d}{k/d} + \begin{cases} \frac{1}{2}\binom{6}{\frac{k}{2}} & \text{si } k \text{ es par,} \\ \frac{1}{2}\binom{5}{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor} & \text{si } k \text{ es impar,} \end{cases}$$

así que, sucesivamente, $A_0 = A_{12} = 1$, $A_1 = A_{11} = 1$, $A_2 = A_{10} = 6$, $A_3 = A_9 = 12$, $A_4 = A_8 = 29$, $A_5 = A_7 = 38$ y $A_6 = 50$.

Problema B_2.

- (a) Vamos a suponer que tenemos seis bolas de tres colores distintos, tres rojas, dos azules, una amarilla. Las bolas del mismo color no se pueden distinguir. ¿De cuántas maneras se pueden asignar las seis bolas a los seis vértices de un octaedro regular que se puede mover libremente en el espacio? ([13, pág. 2].) [3]

- (b) Tenemos 6 colores para pintar las caras de un cubo, ¿cuántos cubos distintos se pueden hacer, cuyas caras tengan entre todas los 6 colores, uno en cada cara? ([10, págs. 42–46], según [8, pág. 239]).

(a) El índice de ciclos del grupo O actuando como grupo de permutaciones sobre los 6 vértices de un octaedro es

$$\zeta_O(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) = \frac{1}{24}(s_1^6 + 6s_1^2 s_4 + 3s_1^2 s_2^2 + 8s_3^2 + 6s_2^3).$$

La función generatriz de la colección de figuras (bola roja, bola azul, bola amarilla) es $f(x, y, z) = x + y + z$, y el número que queremos es el coeficiente de x^3y^2z en el polinomio generador

$$\begin{aligned} F(x,y,z) = \frac{1}{24}\big[&(x+y+z)^6 + 6(x+y+z)^2(x^4+y^4+z^4) \\ &+ 3(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2)^2 + 8(x^3+y^3+z^3)^2 + 6(x^2+y^2+z^2)^3\big]. \end{aligned}$$

Dicho coeficiente es

$$A_{321} = \frac{1}{24}\left(\frac{6!}{3!\,2!\,1!} + 3\cdot 2\cdot 2\right) = 3,$$

lo que contesta el problema.

(b) Con el mismo índice de ciclos que en el apartado (a), la función generatriz de la colección de figuras es ahora $f(a, b, c, d, e, f) = a + b + c + d + e + f$, y queremos el coeficiente de *abcdef* en el correspondiente polinomio generador $F(a, b, c, d, e, f)$; para esto, es obvio que nos podemos limitar a considerar sólo el primer término, $\frac{1}{24}(a + b + c + d + e + f)^6$, donde dicho coeficiente es $\frac{1}{24}\,6!$. Son 30 los cubos, y este problema, en particular, admite una solución más sencilla (véase [8, pág. 242]). [4]

Nota. Más en general, sea $[\Phi]$ un conjunto finito o numerable de distintos objetos ϕ', ϕ'', …, $\phi^{(\lambda)}$, … llamados figuras; hay una propiedad de las figuras, llamada su contenido, expresable mediante un multiíndice $\kappa = (k_1, \dots, k_m)$, donde $m \geq 1$ y los k_i $(i = 1, \dots, m)$ son enteros no negativos, que divide $[\Phi]$ en subconjuntos finitos. La serie

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\kappa} a_\kappa x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m},$$

donde a_κ es el número de figuras de contenido κ, se llama función generatriz de $[\Phi]$.[5]

---

[3] Este es el primer ejemplo que da, e inmediatamente resuelve, presentando así su teorema, Pólya.

[4] Con un cálculo del todo similar, utilizando el índice de ciclos $\zeta_O(s_1, \dots, s_{12})$, se puede probar que son $\frac{1}{24}\,12!$, como citábamos al comienzo, los diferentes entramados cúbicos formados por 12 varillas de distinto color.

[5] En [13], Pólya considera también conjuntos infinitos de figuras. Por ejemplo, dado un objeto B, el conjunto $[\Phi] = \{\phi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, donde ϕ_n es la «figura» formada por n copias de B, cuya función generatriz es $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Sea G un grupo de permutaciones de grado n, y $\zeta_G(s_1, \ldots, s_n)$ su índice de ciclos. Sea A_κ el número de órbitas de contenido κ en la acción de G sobre el conjunto de las aplicaciones $\varphi\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to [\Phi]$, o configuraciones. (El contenido de la configuración φ es la suma de los contenidos de las figuras $\varphi(1)$, ..., $\varphi(n)$.) Se tiene que

$$\sum_\kappa A_\kappa x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m} = \zeta_G\big(f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)\big),$$

siendo $f_i(x_1, \ldots, x_m) = f(x_1^i, \ldots, x_m^i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Es decir:

Teorema de Pólya. *La función generatriz para las configuraciones no equivalentes con respecto a* $\boldsymbol{G}$ *se obtiene sustituyendo la función generatriz de* $[\Phi]$ *en el índice de ciclos de* $\boldsymbol{G}$.

El lector interesado puede ampliar su información sobre el teorema de Pólya en libros como [17], [3] y [2]. Además, en el artículo [16] se puede encontrar una exposición del tema que, en algunos aspectos, se asemeja a la aquí efectuada.

Referencias

[1] W. W. R. Ball y H. S. M. Coxeter, *Mathematical recreations and essays*, Dover, Nueva York, 1987.
[2] C. Berge, *Principes de combinatoire*, Dunod, París, 1968.
[3] N. L. Biggs, *Discrete mathematics*, Oxford University Press, Nueva York, 1991.
[4] W. Burnside, *Theory of groups of finite order*, 2.ª ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1911.
[5] H. S. M. Coxeter, *Regular polytopes*, 3.ª ed., Dover, Nueva York, 1973.
[6] H. E. Dudeney, *536 Puzzles and curious problems*, Londres, 1931.
[7] M. Gardner, *Festival mágico-matemático*, Alianza, Madrid, 1984.
[8] M. Gardner, *Nuevos pasatiempos matemáticos*, 5.ª ed., Alianza, Madrid, 1984.
[9] M. de Guzmán, J. Colera y A. Salvador, *Matemáticas. Bachillerato 1*, Anaya, Madrid, 1987.
[10] P. A. McMahon, *New mathematical pastimes*, Cambridge, 1921.
[11] G. Pólya, Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, *Acta Mathematica* **68** (1937), 145–254.
[12] G. Pólya, On picture-writing, *Amer. Math. Monthly* **63** (1956), 689–697.
[13] G. Pólya y R. C. Read, *Combinatorial enumeration of groups, graphs, and chemical compounds*, Springer-Verlag, Nueva York, 1987.
[14] J. H. Redfield, The theory of group reduced distributions, *Amer. J. Math.* **49** (1927), 433–455.
[15] D. L. Reiner, Enumeration in music theory, *Amer. Math. Monthly* **92** (1985), 51–54.
[16] A. Tucker, Polya's enumeration formula by example, *Mathematical Magazine* **47** (1974), 248–256.
[17] A. Tucker, *Applied combinatorics*, John Wiley and Sons, Nueva York, 1980.

I. E. S. Práxedes Mateo Sagasta, Glorieta del Dr. Zubía s/n, 26003 Logroño (La Rioja), Spain

———, Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Edificio J. L. Vives, Calle Luis de Ulloa s/n, 26004 Logroño, Spain
Correo electrónico: emilio.fernandez@dmc.unirioja.es

Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid, 28040 Madrid, Spain
Correo electrónico: merche_sanchez@mat.ucm.es