MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

ESTUDIO DE LA CONVERGENCIA UNIFORME DE ESQUEMAS DE PASOS FRACCIONARIOS PARA PROBLEMAS PARABÓLICOS FORMULADOS EN FORMA VARIACIONAL

BLANCA BUJANDA Y JUAN CARLOS JORGE

Dedicado a la memoria de Chicho

Abstract. In this paper we introduce some basic topics and a small historical introduction about the Runge-Kutta methods of type Fractionary Steps. In it we also realize the study of the uniform convergence of Fractionary Step schemes that we obtain by combining a temporal discretization scheme of type RKPF with a spatial discretization of type Finite Elements or Finite Differences. We realize this study for non-stationary problems in a variational context.

1. Breve reseña histórica sobre los métodos de Pasos Fraccionarios

La aparición de los primeros ordenadores con capacidad de cálculo importante en los años 40, impulsó el desarrollo de la matemática algorítmica e hizo que el Análisis Numérico surgiera como una disciplina moderna con grandes perspectivas de desarrollo fuertemente ligadas, obviamente, al tipo y potencia de los medios de cálculo de los que se ha dispuesto.

En los años 50 y 60 se empezaron a desarrollar con gran dinamismo métodos para resolver ecuaciones algebraicas lineales con matrices tridiagonales y tridiagonales por bloques. El éxito en el desarrollo de dichos métodos llevó al diseño de algoritmos numéricos eficientes en la resolución de problemas estacionarios multidimensionales, basados en la descomposición del operador en diferencias en operadores tridiagonales. Estos métodos recibieron diversos nombres como métodos de factorización, de barrido, de descomposición («*Splitting methods*») y de Direcciones Alternadas.

Los primeros métodos de tipo Direcciones Alternadas aparecen a mediados de los 50 en los trabajos de Douglas, Peaceman y Ratchford (ver [Dou55], [PR55], [DR56]). Ante un problema de difusión, en un dominio bidimensional, modelado por la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

estos autores apuntan que el esquema explícito

$$\frac{U^{m+1} - U^m}{\Delta t} = \Delta_{x\bar{x}} U^m + \Delta_{y\bar{y}} U^m, \tag{1}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 65J10; Secondary 65M12.
Key words and phrases. Method of fractional steps, uniform convergence.

donde $\Delta_{x\bar{x}}$ y $\Delta_{y\bar{y}}$ son discretizaciones de los operadores $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, mediante diferencias centrales, es rechazable debido a que la obtención de la estabilidad numérica requiere una integración en tiempo muy lenta cuando el grosor de la malla empleada en la discretización es muy fina. Por ejemplo, en el caso de considerar el cuadrado unidad y un mallado uniforme del mismo grosor (h) en las variables x e y, es decir,

$$\begin{aligned} \Delta_{x\bar{x}} U^m(x,y) &= \frac{U^m(x-h,y) - 2\,U^m(x,y) + U^m(x+h,y)}{h^2}, \\ \Delta_{y\bar{y}} U^m(x,y) &= \frac{U^m(x,y-h) - 2\,U^m(x,y) + U^m(x,y+h)}{h^2}, \end{aligned} \tag{2}$$

el esquema (1) resulta condicionalmente estable bajo la restricción $\frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{4}$.

Douglas, Peaceman y Ratchford apuntan también que el esquema implícito clásico

$$\frac{U^{m+1} - U^m}{\Delta t} = \Delta_{x\bar{x}} U^{m+1} + \Delta_{y\bar{y}} U^{m+1},$$

aún siendo incondicionalmente estable, es igualmente rechazable, debido a que en cada nivel de tiempo se debe resolver un sistema lineal complejo en términos de costo computacional.

Por contra, el uso de los esquemas implícitos

$$\frac{U^{m+1} - U^m}{\Delta t} = \Delta_{x\bar{x}} U^{m+1} + \Delta_{y\bar{y}} U^{m},$$

y

$$\frac{U^{m+1} - U^m}{\Delta t} = \Delta_{x\bar{x}} U^{m} + \Delta_{y\bar{y}} U^{m+1},$$

da lugar a métodos económicos, ya que requieren la resolución de un conjunto de sistemas tridiagonales desacoplados y, aunque cada uno de los métodos es incondicionalmente estable, el empleo de ambos en forma alternada, es decir,

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{U^{m+\frac{1}{2}} - U^m}{\frac{1}{2}\Delta t} &= \Delta_{x\bar{x}} U^{m+\frac{1}{2}} + \Delta_{y\bar{y}} U^{m}, \\ \frac{U^{m+1} - U^{m+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\Delta t} &= \Delta_{x\bar{x}} U^{m+\frac{1}{2}} + \Delta_{y\bar{y}} U^{m+1}, \end{aligned} \right. \tag{3}$$

da lugar a un esquema incondicionalmente convergente y, a su vez, con bajo costo computacional por paso.

El esquema (3) fue el precursor de otros métodos, que bajo distintos nombres, pero con la misma idea de reducción de costos, fueron desarrollados por autores como D'yaconov, Samarskii, Kellog, Gunn y otros. Una extensa recopilación de estos métodos fue acometida por Yanenko (ver [Yan71]) a los que él denomina genéricamente como métodos de Pasos Fraccionarios (ver también [CL90]).

Aunque estos métodos surgieron en el contexto de los esquemas de diferencias finitas, también han sido posteriormente aplicados, en conexión con discretizaciones espaciales de tipo elementos finitos (ver [Dou55], [DD71]). En esta dirección son de particular interés los estudios llevados a cabo por Temam (ver [Tem68]) y Lions y Mercier (ver [LM78]), para métodos de Pasos Fraccionarios muy simples, aplicados a problemas parabólicos generales planteados en forma operacional.

Desde los primeros esquemas hasta los trabajos más recientes (ver [Hun92], [Van96], [Hun98a], [Hun98b]), los métodos de tipo Pasos Fraccionarios han sido desarrollados de forma aislada (para problemas particulares y usando técnicas básicas, muy simples, de discretización temporal), sin un marco general que los relacione y permita su análisis de forma conjunta. En [Jor92] se desarrolla por primera vez una técnica que, además de permitir un estudio riguroso de la convergencia de los métodos clásicos de Pasos Fraccionarios, abre nuevas vías para el diseño de métodos de este tipo que alcancen órdenes altos en tiempo para problemas parabólicos lineales generales. Esta línea de trabajo se ha mostrado exitosa para llevar a cabo el análisis y diseño de métodos de Pasos Fraccionarios en un contexto muy amplio de problemas parabólicos.

2. El problema a resolver y su formulación

En el resto de este artículo nos centraremos en el estudio de la convergencia de las soluciones que se obtienen al utilizar un método de tipo Runge-Kutta de Pasos Fraccionarios aplicado a una formulación variacional, más débil, de un Problema Parabólico en Ecuaciones en Derivadas Parciales cuya formulación operacional es

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{du(t)}{dt} = f(t,y) \equiv -A(t)\,u(t) + g(t),\\ u(0) = u_0,\end{array}\right. \tag{4}$$

donde $A(t) : \mathcal{D}(A(t)) \subseteq H \longrightarrow H$ es, en general, un operador diferencial de tipo elíptico, no acotado, que actúa sobre un espacio infinito dimensional de funciones definidas en un cierto dominio Ω (rango de variación de las variables espaciales). Por simplicidad, asumiremos que $\forall\, t \in [0,T]$ los operadores $A(t)$ quedan definidos sobre el mismo dominio $\mathcal{D}(A(t)) \equiv \mathcal{D} \subseteq H$, con lo que, en la práctica, estamos pensando en condiciones de contorno que no varíen con el tiempo.

Mediante el análisis de la convergencia uniforme en una formulación variacional nos podemos permitir analizar en detalle una casuística mayor en lo relativo a la variación temporal de los coeficientes del problema, que la que se realiza en el caso de formulación operacional. Por ejemplo, en el caso de considerar problemas de convección-difusión-reacción del tipo

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d\Delta u + \vec{v}\,\vec{\nabla} u + ku = g, \tag{5}$$

donde d es el término de difusión, $\vec{v}$ el de convección y k el de reacción, pueden obtenerse distintos resultados según que la variación temporal de los coeficientes afecte solamente a los términos de reacción y de convección o a todos los términos incluyendo el de difusión.

Planteamos la discretización espacial del problema mediante una aproximación variacional que engloba a las técnicas típicas en Elementos Finitos y Diferencias Finitas y la integración temporal utilizando un método Runge-Kutta de Pasos Fraccionarios.

Sean V y H espacios de Hilbert reales con V denso en H; identificaremos H con su dual topológico H', de forma que se tendrá $V \subseteq H \subseteq V'$, siendo las inyecciones continuas. Denotaremos por $|\cdot|$ y $\|\cdot\|$ y por $(\cdot,\cdot)$ y $((\cdot,\cdot))$ las normas y los productos escalares en V y en H, respectivamente.

Sea $a(t;\cdot,\cdot)$ una forma bilineal, uniformemente bicontinua y coerciva en V, es decir, existen M y $\alpha > 0$, constantes independientes de t, tales que $|a(t;u,v)| \leq M|u|\,|v|$, $a(t;u,u) \geq \alpha|u|^2$, $\forall\, u,v \in V$, y $\forall\, t \in [0,T]$. Notar que de la continuidad de la inyección de V en H, se deduce inmediatamente que existe una constante, γ, independiente de t, tal que $a(t;u,u) \geq \gamma\|u\|^2, \quad \forall\, u \in V$.

Denotaremos $A(t) \in \mathcal{L}(V,V')$ al operador tal que $a(t;u,v) = \langle A(t)u, v\rangle\ \forall\, u,v \in V$, donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ indica la dualidad entre V y V'. Si definimos

$$\mathcal{D} = \{u \in V \mid A(t)u \in H\},$$

resulta que $A(t) : \mathcal{D} \subseteq H \longrightarrow H$, es un operador maximal y coercivo en H.

Así, el problema que nos vamos a plantear resolver es: dados $g : [0,T] \longrightarrow V'$ y u_0 encontrar $u : [0,T] \longrightarrow V$ solución del problema (4). Dicho problema admite una formulación variacional en la forma

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} ((u'(t),v)) + a(t;u(t),v) = \langle g(t),v\rangle, \quad \forall\, u \in V, \\ u(0) = u_0 \in V. \end{cases}$$

Notar que si $g : [0,T] \longrightarrow H$, se tiene que $\langle g(t),v\rangle = ((g(t),v))$; si además $u_0 \in \mathcal{D}$ este problema es equivalente a (4).

Para aplicar un método Runge-Kutta de Pasos Fraccionarios como aproximante del problema (6), supondremos que la forma bilineal $a(t;\cdot,\cdot)$ admite una descomposición de la forma

$$\text{(7)} \qquad a(t;\cdot,\cdot) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t;\cdot,\cdot),$$

donde, para cada $i = 1,\ldots,n$, la forma $a_i(t;\cdot,\cdot)$ es bilineal, uniformemente bicontinua y coerciva, en ciertos espacios de Hilbert V_i que contienen a V y que a su vez están contenidos en H, es decir, existen M_i y $\alpha_i > 0$, constantes independientes de t, tales que

$$\begin{cases} |a_i(t;u,v)| \leq M_i|u|_i|v|_i, \\ a_i(t;u,u) \geq \alpha_i|u|_i^2, \end{cases} \qquad \forall\, u,v \in V_i,$$

donde $(\cdot,\cdot)_i$ y $|\cdot|_i$ son los productos escalares y las normas asociadas a ellos en V_i. Asumiremos que los espacios V_i, $i = 1,\ldots,n$, verifican que: $\bigcap_{i=1}^{n} V_i = V$ y $\bigcup_{i=1}^{n} V_i' = V'$, y de forma que $V \subseteq V_i \subseteq H \subseteq V_i' \subseteq V'$ con inyección continua y cada uno denso en el siguiente, siendo las normas $|\cdot|$ y $\sum_{i=1}^{n} |\cdot|_i$ equivalentes (ver [Jor92], [Tem68]). Así, existen n constantes γ_i, independientes de t, tales que $a_i(t;u,u) \geq \gamma_i\|u\|^2$, $\forall\, u \in V_i$ para $i = 1,\ldots,n$.

Notar que, usando la descomposición (7) el problema variacional (6) se puede reescribir como

$$\tag{8} \begin{cases} ((u'(t),v)) + \sum_{i=1}^{n} a_i(t;u(t),v) = \langle g(t),v\rangle, & \forall\, u \in V, \\ u(0) = u_0 \in V. \end{cases}$$

Denotaremos $A_i(t) \in \mathcal{L}(V_i, V_i')$ al operador que verifica $a_i(t;u,v) = \langle A_i(t)u, v\rangle_i$, $\forall\, u,v \in V_i$. De este modo,

$$\tag{9} A(t)u = \sum_{i=1}^{n} A_i(t)u, \quad \forall u \in V.$$

3. La discretización

Sea h un parámetro destinado a tender a cero, típicamente h será el diámetro de los elementos que empleemos para discretizar la parte espacial. Supondremos que para cada valor de h se verifican las siguientes hipótesis:

(H1) V_h es un espacio de Hilbert finito-dimensional con norma $\|\cdot\|_h$ con $V_h \subset V$. Supondremos que las normas en V_h y H son uniformemente equivalentes, es decir, existe una constante c independiente de h, tal que $c\|u_h\| \le \|u_h\|_h \le \frac{1}{c}\|u_h\|$.

(H2) $r_h(t) : V \longrightarrow V_h$ son aplicaciones de conexión, lineales acotadas, habitualmente proyecciones de V en V_h.

(H3) $\pi_h : V' \longrightarrow V_h$ son aplicaciones de conexión entre V' y V_h verificando

$$\tag{10} \begin{array}{ll} (\pi_h g_i(t), u_h)_h = \langle g_i(t), u_h\rangle_i, & \forall\, i = 1,\dots,n,\ \forall\, g_i(t) \in V_i', \\ & \forall\, u_h \in V_h,\ \forall\, t \in [0,T], \\ (\pi_h g(t), u_h)_h = \langle g(t), u_h\rangle, & \forall\, g(t) \in V',\ \forall\, u_h \in V_h,\ \forall\, t \in [0,T]. \end{array}$$

(H4) $g_h(t)$, $g_{ih}(t)$ y u_{0h} son aproximaciones semidiscretas de $g(t)$, $g_i(t)$ y u_0, respectivamente, sobre V_h; típicamente $u_{0h} = r_h(0)u_0$.

(H5) $a_h(t;\cdot,\cdot)$ y $a_{ih}(t;\cdot,\cdot)$ son formas bilineales sobre $V_h \times V_h$ y sus operadores lineales asociados $A_h(t) \in \mathcal{L}(V_h, V_h)$ y $A_{ih}(t) \in \mathcal{L}(V_h, V_h)$ (aproximaciones discretas de $a(t;\cdot,\cdot)$, $a_i(t;\cdot,\cdot)$, $A(t)$ y $A_i(t)$ respectivamente) que cumplen:

$$\tag{11} \begin{array}{ll} a_h(t; r_h(t)u, v_h) = a(t;u,v_h), & \forall\, u \in V,\ \forall\, v_h \in V_h,\ \forall\, t \in [0,T], \\ a_{ih}(t; r_h(t)u, v_h) = a_i(t;u,v_h), & \forall\, i = 1,\dots,n,\ \forall\, u \in V_i, \\ & \forall\, v_h \in V_h,\ \forall\, t \in [0,T], \\ a_h(t;u_h,v_h) = (A_h(t)u_h, v_h)_h, & \forall\, u_h, v_h \in V_h,\ \forall\, t \in [0,T], \\ a_{ih}(t;u_h,v_h) = (A_{ih}(t)u_h, v_h)_h, & \forall\, i = 1,\dots,n, \\ & \forall\, u_h, v_h \in V_h,\ \forall\, t \in [0,T]. \end{array}$$

Notar que, a partir de (10) y (11), es inmediato comprobar que son ciertas las siguientes relaciones:

$$\tag{12} \begin{array}{ll} A_h(t)r_h(t)u = \pi_h A(t)u, & \forall\, u \in V,\ \forall\, t \in [0,T], \\ A_{ih}(t)r_h(t)u = \pi_h A_i(t)u, & \forall\, i = 1,\dots,n,\ \forall\, u \in V_i,\ \forall\, t \in [0,T]. \end{array}$$

Con ellas, es inmediato comprobar que los diagramas que aparecen en la Figura 1 son conmutativos.

$$
\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{A(t)} & V' \\
{\scriptstyle r_h(t)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_h} \\
V_h & \xrightarrow[A_h(t)]{} & V_h
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
V_i & \xrightarrow{A_i(t)} & V_i' \\
{\scriptstyle r_h(t)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_h} \\
V_h & \xrightarrow[A_{ih}(t)]{} & V_h
\end{array}
$$

FIGURA 1

Supondremos además que las formas bilineales $a_h(t;\cdot,\cdot)$ y $a_{ih}(t;\cdot,\cdot)$ heredan las propiedades de bicontinuidad y coercividad de $a(t;\cdot,\cdot)$ y $a_i(t;\cdot,\cdot)$, es decir, existen constantes positivas $\widetilde{M}$, $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{M}_i$ y $\widetilde{\alpha}_i$, para $i = 1, \dots, n$, independientes de h y de t, tales que

$$
(13) \qquad \begin{cases} |a_h(t;u_h,v_h)| \le \widetilde{M}|u_h||v_h|, & a_h(t;u_h,u_h) \ge \widetilde{\alpha}|u_h|^2, \\ |a_{ih}(t;u_h,v_h)| \le \widetilde{M}_i|u_h|_i\,|v_h|_i, & a_{ih}(t;u_h,u_h) \ge \widetilde{\alpha}_i|u_h|_i^2, \\ \forall\, i = 1,\dots,n,\ \forall u_h, v_h \in V_h,\ \forall\, t \in [0,T]. \end{cases}
$$

Si $r_h(t)$ son proyecciones de V en V_h resulta que $r_h(t)u_h = u_h$ y a partir de (11) se verifica (13) con $\widetilde{M} = M$, $\widetilde{\alpha} = \alpha$, $\widetilde{M}_i = M_i$ y $\widetilde{\alpha}_i = \alpha_i$, para $i = 1, \dots, n$.

Definición 3.1. *Un Runge-Kutta Aditivo de s etapas y n niveles es un integrador numérico de un paso, que al ser aplicado al PVI (4) con el fraccionamiento (9) y la descomposición $g(t) = \sum_{i=1}^{n} g_i(t)$, nos lleva al esquema*

$$
(14) \qquad \begin{cases} y_0, \\ y_{m+1} = y_m + \Delta t \displaystyle\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} b_i^j f_j(t_m + c_i\Delta t, Y_i); \qquad \textit{donde} \\ Y_i = y_m + \Delta t \displaystyle\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} a_{ik}^j f_j(t_m + c_k\Delta t, Y_k), \quad i = 1,\dots,s, \end{cases}
$$

mediante el que se calcula una aproximación y_{m+1} a la solución $y(t_{m+1})$ a partir de una aproximación y_m a $y(t_m)$, con $t_{m+1} = t_m + \Delta t$. Típicamente, al parámetro Δt se le denomina paso de integración y a los vectores Y_i etapas del método.

El método RK Aditivo queda determinado por la elección de los coeficientes b_i^j, c_i y a_{ik}^j. Siguiendo una notación similar a la utilizada por Butcher para los métodos Runge-Kutta estándar (ver [But87], [HNW87]), podemos escribir los métodos RK Aditivos de forma abreviada como

$$
(15) \qquad \begin{array}{c|c|c|c|c} \mathcal{C}\,e & \mathcal{A}^1 & \mathcal{A}^2 & \dots & \mathcal{A}^n \\ \hline & (b^1)^T & (b^2)^T & \dots & (b^n)^T, \end{array}
$$

siendo $\mathcal{A}^j = (a^j_{ik})$, $b^j = (b^j_i)$, $\mathcal{C} = \mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_s)$, $e = (1, \ldots, 1)^T$ con $i, k = 1, \ldots, s$ y $j = 1, \ldots, n$. Así, podemos interpretar que un método RK Aditivo consta de n métodos RK estándar solapados, en el que, en cierto modo, cada uno se ocupa de una parte f_i de la función derivada f.

Un RK Aditivo es explícito sii $a^j_{ik} = 0$ si $k \geq i$, $j = 1, \ldots, n$. Diremos que un RK Aditivo es semiimplícito sii $a^j_{ik} = 0$ si $k > i$, $j = 1, \ldots, n$.

Dentro de los métodos RK Aditivos de tipo semiimplícito, se encuentran los desarrollados por Cooper y Sayfy (ver [CS83]) y Jorge (ver [Jor90]), para problemas Stiff no lineales, los RK particionados desarrollados por Sanz-Serna (ver [San89]), para la integración numérica de ciertos Hamiltonianos, y los métodos de tipo Pasos Fraccionarios (ver [Per93], [CL90], [Yan71]) que definimos a continuación.

Definición 3.2. *Un método Runge Kutta de Pasos Fraccionarios, que denotaremos abreviadamente RKPF, es un RK Aditivo semiimplícito verificando*

$$
(16) \qquad \begin{cases} a^j_{ii} \geq 0, \forall\, i \in \{1, \ldots, s\},\ j \in \{1, \ldots, n\}, \\ |b^k_j| + \displaystyle\sum_{i=1}^{s} |a^k_{ij}| \neq 0 \Rrightarrow |b^l_j| + \sum_{i=1}^{s} |a^l_{ij}| = 0,\ \forall\, l \neq k; \\ \qquad\qquad\qquad l, k \in \{1, \ldots, n\},\ \ i, j \in \{1, \ldots, s\}, \\ a^j_{ii} a^k_{ii} = 0 \ \textit{si}\ k \neq j;\ \ i \in \{1, \ldots, s\},\ \ j, k \in \{1, \ldots, n\}. \end{cases}
$$

Realizando la discretización temporal mediante un integrador de tipo RKPF obtenemos una aproximación a la solución del problema (4) mediante un esquema que admite la siguiente expresión en forma variacional:

$$
(17) \qquad \begin{cases} U^0_h = r_h(0)(u_0), \\ ((U^{m,i}_h, v))_h = ((U^m_h, v_h))_h - \Delta t \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{s} a^k_{ij}\, a_{kh}(t_{m,j}; U^{m,j}_h, v) \\ \qquad\qquad + \Delta t \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{s} a^k_{ij}\, ((g_{kh}(t_{m,j}), v))_h, \\ \qquad\qquad \forall\, v \in V_h,\ \text{para } i = 1, \ldots, s, \\ ((U^{m+1}_h, v))_h = ((U^m_h, v))_h - \Delta t \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{s} b^k_i\, a_{kh}(t_{m,i}; U^{m,i}_h, v) \\ \qquad\qquad + \Delta t \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{s} b^k_i\, ((g_{kh}(t_{m,i}), v))_h, \forall\, v \in V_h, \end{cases}
$$

donde U^{m+1}_h pueden ser consideradas aproximaciones a la solución exacta $u(t)$ en los instantes $t_m + \Delta t$, y donde las etapas $U^{m,i}_h$ pueden considerarse también como aproximaciones de $u(t)$ en los puntos $t_{m,i} = t_m + c_i \Delta t$.

4. Existencia y unicidad de solución

Probaremos en primer lugar que este proceso de discretización está bien definido, es decir, admite solución única, que además está acotada independientemente de la elección del paso, Δt, que empleemos. Para hacerlo de forma legible utilizaremos la siguiente notación tensorial:

$$G_{ih}^m = (g_{ih}(t_{m,1}), g_{ih}(t_{m,2}), \dots, g_{ih}(t_{m,s}))^T \in V_h^s, \ \forall\, i = 1, \dots, n,$$
$$\widetilde{U}_h^m = \left(U_h^{m,1}, U_h^{m,2}, \dots, U_h^{m,s}\right)^T \in V_h^s;$$

dados $M \equiv (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{s\times s}$ y $v \equiv (v_i) \in \mathbb{R}^s$ denotamos

$$\bar{M} \equiv \begin{pmatrix} m_{11} I_H & \dots & m_{1s} I_H \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{s1} I_H & \dots & m_{ss} I_H \end{pmatrix} \in H^{s\times s}, \quad \bar{v} \equiv \begin{pmatrix} v_1 I_H \\ \vdots \\ v_s I_H \end{pmatrix} \in H^s;$$

$$\hat{A}_{ih}^m = \begin{pmatrix} A_{ih}(t_{m,1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{ih}(t_{m,2}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{ih}(t_{m,s}) \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_i, V_h)^{s\times s}, \tag{18}$$
$\forall\, i = 1, \dots, n,$

$$\bar{A}_{ih}^m = \begin{pmatrix} A_{ih}(t_m) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{ih}(t_m) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{ih}(t_m) \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_i, V_h)^{s\times s},$$
$\forall\, i = 1, \dots, n.$

A continuación damos, sin demostración (ver [Buj99]), la siguiente proposición que nos permite ver que el operador $\big(\bar{I} + \Delta t \sum_{i=1}^n \overline{\mathcal{A}^i} \hat{A}_{ih}^m\big)$ es inversible.

Proposición 4.1. *Sean un RKPF con todas sus etapas implícitas y n formas bilineales y coercivas $a_{ih}(t;\cdot,\cdot)$ para $i = 1, \dots, n$, cuyo sistema de operadores asociado es $\{A_{ih}(t)\}_{i=1}^n$. Entonces el operador $\big(\bar{I} + \Delta t \sum_{i=1}^n \overline{\mathcal{A}^i} \hat{A}_{ih}^m\big) : V_h^s \longrightarrow V_h^s$, definido a partir de dicho RKPF, es inversible, y el operador inverso está acotado independientemente de h y de Δt. Además, se tiene*

$$\big|\widetilde{U}_h\big|_{V_{k_1}\times\dots\times V_{k_s}} \le \frac{C}{\sqrt{\Delta t}} \Big\| \big(\bar{I} + \Delta t \sum_{i=1}^n \overline{\mathcal{A}^i} \hat{A}_{ih}^m\big) \widetilde{U}_h \Big\|_h. \tag{19}$$

Proposición 4.2. *Bajo las mismas hipótesis de la Proposición 4.1, el operador $T_h^m \equiv \Delta t \sum_{i=1}^n \overline{(b^i)^T} \hat{A}_{ih}^m \big(\bar{I} + \Delta t \sum_{j=1}^n \overline{\mathcal{A}^j} \hat{A}_{jh}^m\big)^{-1} : V_h^s \longrightarrow V_h$ está acotado independientemente de Δt y h, es decir, $\|T_h^m \widetilde{U}_h\|_h \le C\, \|\widetilde{U}_h\|_h, \quad \forall\, \widetilde{U}_h \in V_h^s$.*

Notar que esta proposición (ver demostración en [Buj99]) garantiza que el esquema (17) tiene solución única acotada independientemente de Δt y de h, siempre que $\|g_{ih}(t)\|_h \le C$ y $\|r_h(0) u_0\|_h \le C$.

Para realizar el estudio de la estabilidad debemos acotar también la norma del operador $\big(\bar{I} + \Delta t \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{A}^i} \bar{A}^m_{ih}\big)^{-1}$, siendo $\bar{A}^m_{ih}$ el dado en (18). Siguiendo un proceso análogo al de la Proposición 4.1 (ver demostración en [Buj99]), se prueba la siguiente

Proposición 4.3. *Bajo las mismas hipótesis de la Proposición 4.1, el operador* $\big(\bar{I} + \Delta t \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{A}^i} \bar{A}^m_{ih}\big) : V_h^s \longrightarrow V_h^s$ *es inversible, y además el operador inverso está acotado independientemente de* Δt *y de* h.

5. Estabilidad

A continuación vamos a realizar el estudio de la estabilidad del esquema totalmente discreto (17); para ello y con el fin de abreviar las expresiones obtenidas introducimos el operador de transición

$$\widetilde{R}(-\Delta t\, \hat{A}^m_{1h}, \ldots, -\Delta t\, \hat{A}^m_{nh}) = \bar{I} - \Delta t \sum_{i=1}^{n} \overline{(b^i)^T} \hat{A}^m_{ih} \big(\bar{I} + \Delta t \sum_{j=1}^{n} \overline{\mathcal{A}^j} \hat{A}^m_{jh}\big)^{-1} \bar{e} \tag{20}$$

y la siguiente expresión donde almacenamos la aportación del término fuente

$$\widetilde{G}^m_h = -\sum_{i=1}^{n} \overline{(b^i)^T} \hat{A}^m_{ih} \big(\bar{I} + \Delta t \sum_{j=1}^{n} \overline{\mathcal{A}^j} \hat{A}^m_{jh}\big)^{-1} \big(\Delta t \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathcal{A}^k} G^m_{kh}\big) + \sum_{i=1}^{n} \overline{(b^i)^T} G^m_{ih}. \tag{21}$$

Utilizando estas dos notaciones la solución U_h^{m+1} de (17), puede escribirse como $U_h^{m+1} = \widetilde{R}(-\Delta t\, \hat{A}^m_{1h}, \ldots, -\Delta t\, \hat{A}^m_{nh}) U_h^m + \Delta t\, \widetilde{G}^m_h$.

Es inmediato comprobar que en este contexto variacional el sistema de operadores $\{A_{ih}(t)\}_{i=1}^n$ asociado a las formas bilineales y coercivas $a_{ih}(t;\cdot,\cdot)$ para $i = 1, \ldots, n$, verifica el siguiente

Lema 5.1. *Para todo sistema* $\{A_{ih}(t)\}_{i=1}^n$ *de operadores lineales, monótonos y maximales y para todo RKPF con todas sus etapas implícitas se tiene:*

(a) $\widetilde{R}(-\Delta t\, \hat{A}^m_{1h}, \ldots, -\Delta t\, \hat{A}^m_{nh}) = \bar{I} - \overline{\tau^T}\, \bar{e} + \overline{\tau^T} \big(\bar{I} + \Delta t \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{A}^i}\, \hat{A}^m_{ih}\big)^{-1} \bar{e}.$

(b) $R(-\Delta t\, A_{1h}(t_m), \ldots, -\Delta t\, A_{nh}(t_m)) = \bar{I} - \overline{\tau^T}\, \bar{e} + \overline{\tau^T} \big(\bar{I} + \Delta t \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{A}^i}\, \bar{A}^m_{ih}\big)^{-1} \bar{e}.$

(c) $\widetilde{R}(-\Delta t \hat{A}^m_{1h}, \ldots, -\Delta t\, \hat{A}^m_{nh}) = R(-\Delta t\, A_{1h}(t_m), \ldots, -\Delta t\, A_{nh}(t_m)) + \Delta t\, \overline{\tau^T}$

$\cdot \big(\bar{I} + \Delta t \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{A}^i}\, \bar{A}^m_{ih}\big)^{-1} \big(\sum_{j=1}^{n} \overline{\mathcal{A}^j}\, \bar{A}^m_{jh} - \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathcal{A}^k}\, \hat{A}^m_{kh}\big) \big(\bar{I} + \Delta t \sum_{l=1}^{n} \overline{\mathcal{A}^l}\, \hat{A}^m_{lh}\big)^{-1} \bar{e},$

con $\tau^T = \sum_{i=1}^{n} (b^i)^T \big(\sum_{j=1}^{n} \mathcal{A}^j\big)^{-1}$ *y donde* $R(z_1, \ldots, z_n)$ *es la función de amplificación asociada al RKPF.*

En las proposiciones que aparecen a continuación, desarrollaremos de forma más detallada distintas condiciones que podemos imponer para obtener estabilidad en problemas de convección-difusión-reacción del tipo (5). Así, la Proposición

5.4 podrá ser aplicada, entre otros, en los casos en los haya únicamente variación temporal en el término de reacción, siempre que ésta sea regular. Las Proposiciones 5.2 y 5.3 podrán utilizarse en aquellos casos en los que no haya variación temporal en el término de difusión, admitiendo ciertas variaciones temporales regulares en los términos de convección y de reacción. Comenzaremos con la Proposición 5.1, cuya demostración puede verse en [Buj99], con la situación más general donde admitiremos que haya variación temporal regular en todos los términos.

Proposición 5.1. *Dados un RKPF A-estable con todas sus etapas implícitas y n formas bilineales y coercivas $a_{ih}(t;\cdot,\cdot)$, con $i=1,\ldots,n$, para las que el sistema de operadores asociado $\{A_{ih}(t)\}_{i=1}^n$ es conmutativo y admite dilatación unitaria para cada $t\in[0,T]$. Si existen n constantes M_i, independientes de h, tal que*

$$\begin{gathered}|a_{ih}(t;u_h,v_h)-a_{ih}(t';u_h,v_h)|\le M_i\,|t-t'|\,|a_{ih}(t;u_h,v_h)|,\\ \forall\, i=1,\ldots,n,\quad \forall u_h,v_h\in V_h,\quad \forall\, t,t'\in[0,T],\end{gathered}\tag{22}$$

se tiene la siguiente acotación:

$$\big\|\widetilde{R}(-\Delta t\,\hat{A}^m_{1h},\,\ldots,\,-\Delta t\,\hat{A}^m_{nh})\big\|_h\le e^{\beta\Delta t},\tag{23}$$

siendo β una constante independiente de Δt y de h.

Proposición 5.2. *Bajo las mismas condiciones de la Proposición 5.1, si sustituimos la hipótesis (22) por*

$$\begin{gathered}|a_{ih}(t;u_h,v_h)-a_{ih}(t';u_h,v_h)|\le|t-t'|\,M_i\,\|u_h\|_h\,|v_h|_i,\\ \forall\, i=1,\ldots,n,\quad \forall\, u_h,v_h\in V_h,\quad \forall\, t,t'\in[0,T],\end{gathered}\tag{24}$$

se tiene la acotación (23).

Demostración. Teniendo en cuenta la descomposición realizada en el Lema 5.1 para el operador de transición, reescribimos este operador en la forma

$$\widetilde{R}(-\Delta t\hat{A}^m_{1h},\ldots,\,-\Delta t\,\hat{A}^m_{nh})=R(-\Delta t\,A_{1h}(t_m),\,\ldots,\,-\Delta t\,A_{nh}(t_m))+\Delta t\,T^3_h\,T^2_h\,T^1_h,$$

donde

$$T^3_h\equiv\overline{\tau^T}\big(\bar{I}+\Delta t\sum_{i=1}^n\overline{\mathcal{A}^i}\,\bar{A}^m_{ih}\big)^{-1}\big(\sum_{j=1}^n\overline{\mathcal{A}^j}\,\bar{A}^m_{jh}\big):V^s_h\longrightarrow V_h,$$

$$T^2_h\equiv\big(\sum_{i=1}^n\overline{\mathcal{A}^i}\,\bar{A}^m_{ih}\big)^{-1}\big(\sum_{j=1}^n\overline{\mathcal{A}^j}\,\bar{A}^m_{jh}-\sum_{k=1}^n\overline{\mathcal{A}^k}\,\hat{A}^m_{kh}\big):V^s_h\longrightarrow V^s_h,$$

$$T^1_h\equiv\big(\bar{I}+\Delta t\sum_{i=1}^n\overline{\mathcal{A}^i}\,\hat{A}^m_{ih}\big)^{-1}\bar{e}:V_h\longrightarrow V^s_h.$$

Como el sistema de operadores $\{A_{ih}(t)\}_{i=1}^n$ es coercivo, conmutativo y admite dilatación unitaria y el RKPF es A-estable, sabemos que

$$\big\|R(-\Delta t\,A_{1h}(t_m),\,\ldots,\,-\Delta t\,A_{nh}(t_m))\big\|_h\le 1.\tag{25}$$

Veamos ahora que $\|T_h^3\, T_h^2\, T_h^1\|_h \leq C$. A partir de la Proposición 4.1 deducimos inmediatamente que

$$\|T_h^1\|_h \leq C_1, \tag{26}$$

con C_1 una constante independiente de Δt y de h.

Ahora acotaremos el operador $T_h^3\, T_h^2$; llamando $\widetilde{W} = (W^1, \ldots, W^s)^T \in V_h^s$, a la imagen por T_h^2 de $\widetilde{U} = (U^1, \ldots, U^s)^T \in V_h^s$, como el RKPF posee todas sus etapas implícitas podemos asegurar que $W^i = \big(A_{k_ih}(t_m)\big)^{-1}(A_{k_ih}(t_m) - A_{k_ih}(t_{m,i}))U^i$, $\forall\, i = 1, \ldots, s$. De la coercividad de la forma bilineal $a_{k_ih}(t;\cdot,\cdot)$ deducimos que

$$\begin{aligned}
|W^i|_{k_i}^2 &\leq \frac{1}{\widetilde{\alpha}_{k_i}}\big(\big(A_{k_ih}(t_m)\, W^i, W^i\big)\big)_h \\
&= \frac{1}{\widetilde{\alpha}_{k_i}}\big(\big((A_{k_ih}(t_m) - A_{k_ih}(t_{m,i}))U^i, W^i\big)\big)_h \\
&= \frac{1}{\widetilde{\alpha}_{k_i}}\big[a_{k_ih}(t_m; U^i, W^i) - a_{k_ih}(t_{m,i}; U^i, W^i)\big], \quad \forall\, i = 1, \ldots, s,
\end{aligned}$$

y aplicando ahora la hipótesis (24), llegamos a

$$|W^i|_{k_i}^2 \leq \frac{1}{\widetilde{\alpha}_{k_i}}|t_{m,i} - t_m| M_{k_i} \|U^i\|_h |W^i|_{k_i}, \quad \forall\, i = 1, \ldots, s,$$

luego $|W^i|_{k_i} \leq \dfrac{1}{\widetilde{\alpha}_{k_i}}\, c_i\, \Delta t\, M_{k_i} \|U^i\|_h, \quad \forall\, i = 1, \ldots, s.$

Sea ahora $\widetilde{X} \in V_h^s$, la imagen por T_h^3 de $\widetilde{W}$, teniendo en cuenta que el operador $\big(\bar{I} + \Delta t \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{A}^i}\bar{A}_{ih}^m\big)$ es inversible, con inverso uniformemente acotado, se deduce que $\big\|\widetilde{X}\big\|_h \leq \dfrac{C_3}{\Delta t}\big\|\widetilde{W}\big\|_h$, siendo C_3 una constante independiente de Δt y de h; y teniendo en cuenta la equivalencia entre las normas de V_h y H, y la continuidad uniforme en h en la inclusión de V_i en H, es decir, $\|\cdot\|_h \leq C_i |\cdot|_i$, con C_i constante independiente de Δt y de h, se llega a la acotación

$$\big\|T_h^3\, T_h^2 \widetilde{U}\big\|_h \leq \widetilde{C}\, M\, \big\|\widetilde{U}\big\|_h, \tag{27}$$

donde $M = \max\limits_{i=1,\ldots,s} \Big\{\dfrac{1}{\alpha_{k_i}}\, c_i\, M_{k_i}\Big\}$, y $\widetilde{C}$ es $\max\limits_{i=1,\ldots,n}\{C_i\}\, C_3\, \|\tau^T\|_1$.

Reuniendo (25), (26) y (27) se llega a $\big\|\widetilde{R}(-\Delta t\, \hat{A}_{1h}^m, \ldots, -\Delta t\, \hat{A}_{nh}^m)\big\|_h \leq 1 + \beta\, \Delta t \leq e^{\beta\, \Delta t}$, siendo $\beta = \widetilde{C}\, C_1\, M$. □

Proposición 5.3. *Bajo las mismas condiciones de la Proposición 5.1, si sustituimos la hipótesis (22) por*

$$\begin{aligned}
&|a_{ih}(t; u_h, v_h) - a_{ih}(t'; u_h, v_h)| \leq |t - t'| M_i |u_h|_i\, \|v_h\|_h, \\
&\qquad \forall\, i = 1, \ldots, n, \quad \forall\, u_h, v_h \in V_h, \quad \forall\, t, t' \in [0, T],
\end{aligned} \tag{28}$$

se tiene la siguiente acotación:

$$\big\|\widetilde{R}(-\Delta t\, \hat{A}_{1h}^m, \ldots, -\Delta t\, \hat{A}_{nh}^m)\big\|_h \leq e^{\beta\, \Delta t\, \sqrt{\Delta t}}. \tag{29}$$

Demostración. Es similar a la de la proposición anterior, salvo que para acotar el operador $T_h^3\, T_h^2\, T_h^1$ lo descompondremos en la forma $\hat{T}_h^3\, \hat{T}_h^2\, T_h^1$, donde

$$\hat{T}_h^3 \equiv \overline{\tau^T}\big(\bar{I} + \Delta t \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{A}^i}\, \bar{A}_{ih}^m\big)^{-1} : V_h^s \longrightarrow V_h,$$

$$\hat{T}_h^2 \equiv \big(\sum_{j=1}^{n} \overline{\mathcal{A}^j}\, \bar{A}_{jh}^m - \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathcal{A}^k}\, \hat{A}_{kh}^m\big) : V_h^s \longrightarrow V_h^s.$$

□

Proposición 5.4. *Bajo las mismas condiciones de la Proposición 5.1, si sustituimos la hipótesis (22) por*

$$|a_{ih}(t; u_h, v_h) - a_{ih}(t'; u_h, v_h)| \le |t - t'|\, M_i\, \|u_h\|_h\, \|v_h\|_h, \quad \forall\, i = 1, \dots, n, \quad \forall\, u_h, v_h \in V_h, \quad \forall\, t, t' \in [0, T], \tag{30}$$

se tiene la acotación (29).

Demostración. Se deduce inmediatamente a partir de la Proposición 5.3 teniendo en cuenta que $\|u_h\|_h \le C_i |u_h|_i$, $\forall\, i = 1, \dots, n$, con C_i constante independiente de Δt y de h. □

Debemos hacer notar que en los casos en los que el RKPF sea además fuertemente A-estable, se podrá llegar a obtener, para valores de M suficientemente pequeños, valores de β negativos en (23) y (29) y, en consecuencia, la contractividad del esquema totalmente discreto (17).

6. Consistencia y convergencia

Para realizar el estudio de la consistencia del esquema totalmente discreto (17), definimos el error local en el instante t_{m+1} como

$$e_h^{m+1} = r_h(t_{m+1}) u(t_{m+1}) - \breve{U}_h^{m+1},$$

siendo $\breve{U}_h^{m+1}$ la solución obtenida al dar un paso con (17) tomando como punto de partida $r_h(t_m)u(t_m)$, es decir,

$$e_h^{m+1} = r_h(t_{m+1}) u(t_{m+1}) - \widetilde{R}(-\Delta t\, \hat{A}_{1h}^m, \dots, -\Delta t\, \hat{A}_{nh}^m)\, r_h(t_m) u(t_m) - \Delta t\, \widetilde{G}_h^m.$$

Aplicando π_h a las contribuciones al error de las fórmulas de cuadratura de cada etapa (a_{ij}^k, c_j) descritas en

$$\xi^{m,j} = u(t_{m,j}) - u(t_m) + \Delta t \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{s} a_{jk}^i \big(A_i(t_{m,k}) u(t_{m,k}) - g_i(t_{m,k})\big), \tag{31}$$

y a las contribuciones de las fórmulas de cuadratura (b_j^i, c_j) descritas en

$$\varsigma^{m+1} = u(t_{m+1}) - u(t_m) + \Delta t \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{s} b_j^i \big(A_i(t_{m,j}) u(t_{m,j}) - g_i(t_{m,j})\big), \tag{32}$$

y teniendo en cuenta que los operadores discretos $\{A_{ih}(t)\}_{i=1}^{n}$ verifican la relación de aproximación (12), podemos reescribir (31) como

$$\begin{aligned} r_h(t_{m,j})u(t_{m,j}) = {} & \big(r_h(t_{m,j}) - \pi_h\big)u(t_{m,j}) - \big(r_h(t_m) - \pi_h\big)u(t_m) \\ & - \Delta t \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} a_{jk}^{i}\big(A_{ih}(t_{m,k})r_h(t_{m,k})u(t_{m,k}) - \pi_h g_i(t_{m,k})\big) \\ & + \pi_h \xi^{m,j} + r_h(t_m)u(t_m), \quad \forall\, j = 1,\dots,s, \end{aligned} \tag{33}$$

y, de forma similar, podemos reescribir (32) como

$$\begin{aligned} r_h(t_{m+1})u(t_{m+1}) = {} & \big(r_h(t_{m+1}) - \pi_h\big)u(t_{m+1}) - \big(r_h(t_m) - \pi_h\big)u(t_m) \\ & - \Delta t \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s} b_j^{i}\big(A_{ih}(t_{m,j})r_h(t_{m,j})u(t_{m,j}) - \pi_h g_i(t_{m,j})\big) \\ & + \pi_h \varsigma^{m+1} + r_h(t_m)u(t_m). \end{aligned} \tag{34}$$

Denotando

$$\begin{aligned} & \mathcal{U}_h^m = (r_h(t_{m,1})u(t_{m,1}),\dots,r_h(t_{m,s})u(t_{m,s}))^T, \\ & \pi_h \Xi^m = (\pi_h \xi^{m,1},\dots,\pi_h \xi^{m,s})^T, \\ & \pi_h G_i^m = (\pi_h g_i(t_{m,1}),\dots,\pi_h g_i(t_{m,s})) \\ & \text{y} \quad \tau_h \mathcal{U}_h^m = \begin{pmatrix} \big(r_h(t_{m,1}) - \pi_h\big)u(t_{m,1}) - \big(r_h(t_m) - \pi_h\big)u(t_m) \\ \vdots \\ \big(r_h(t_{m,s}) - \pi_h\big)u(t_{m,s}) - \big(r_h(t_m) - \pi_h\big)u(t_m) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{35}$$

podemos compactar (33) en

$$\begin{aligned} \big(\bar{I} - \Delta t \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{A}^i}\hat{A}_{ih}^m\big)\mathcal{U}_h^m = {} & \bar{e}\, r_h(t_m)u(t_m) + \tau_h \mathcal{U}_h^m \\ & + \Delta t \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{A}^i}\pi_h G_i^m + \pi_h \Xi^m. \end{aligned} \tag{36}$$

Asimismo, podemos reescribir (34) como

$$\begin{aligned} r_h(t_{m+1})u(t_{m+1}) = {} & \big(r_h(t_{m+1}) - \pi_h\big)u(t_{m+1}) - \big(r_h(t_m) - \pi_h\big)u(t_m) \\ & - \Delta t \sum_{i=1}^{n} \overline{(b^i)^T}\hat{A}_{ih}^m \mathcal{U}_h^m + \Delta t \sum_{i=1}^{n} \overline{(b^i)^T}\pi_h G_i^m + \pi_h \varsigma^{m+1} \\ & + r_h(t_m)u(t_m). \end{aligned} \tag{37}$$

Si el operador $\big(\bar{I} + \Delta t \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{A}^i}\hat{A}_{ih}^m\big)$ es inversible, podemos despejar $\mathcal{U}_h^m$ de (36), y sustituir la expresión (37), obteniéndose la siguiente expresión para el error local:

$$e_h^{m+1} = e_{1h}^{m+1} + e_{2h}^{m+1}, \tag{38}$$

$$
\begin{aligned}
&\text{con} \quad e_{1h}^{m+1} = S_{1h} + S_{2h} + S_{3h} + S_{4h},\\
&\text{siendo}\\
&S_{1h} = \big(r_h(t_{m+1}) - \pi_h\big)u(t_{m+1}) - \big(r_h(t_m) - \pi_h\big)u(t_m),\\
&S_{2h} = -\Delta t \sum_{i=1}^{n} \overline{(b^i)^T} \hat{A}_{ih}^m \big(\bar{I} + \Delta t \sum_{j=1}^{n} \overline{\mathcal{A}^j} \hat{A}_{jh}^m\big)^{-1} \tau_h \mathcal{U}_h^m,\\
&S_{3h} = -\Delta t \sum_{i=1}^{n} \overline{(b^i)^T} \hat{A}_{ih}^m \big(\bar{I} + \Delta t \sum_{j=1}^{n} \overline{\mathcal{A}^j} \hat{A}_{jh}^m\big)^{-1}\\
&\qquad \cdot \Delta t \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathcal{A}^k} (\pi_h G_k^m - G_{kh}^m),\\
&S_{4h} = \Delta t \sum_{i=1}^{n} \overline{(b^i)^T} (\pi_h G_i^m - G_{ih}^m),\\
&\text{y con} \quad e_{2h}^{m+1} = \pi_h \varsigma^{m+1} - \Delta t \sum_{i=1}^{n} \overline{(b^i)^T} \hat{A}_{ih}^m \big(\bar{I} + \Delta t \sum_{j=1}^{n} \overline{\mathcal{A}^j} \hat{A}_{jh}^m\big)^{-1} \pi_h \Xi^m,\\
&\text{donde} \quad G_i^m = (g_i(t_{m,1}), g_i(t_{m,2}), \ldots, g_i(t_{m,s}))^T \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{39}
$$

Notar que, en la expresión dada en (38) para el error local, hemos separado, en cierto modo, la contribución de la parte espacial e_{1h}^{m+1}, de la contribución de la parte temporal e_{2h}^{m+1}. A continuación damos, sin demostración (ver [Buj99]), el siguiente Teorema, en el que obtenemos la cota

$$\|e_{1h}^{m+1}\|_h \leq C\, \Delta t\, h^q. \tag{40}$$

Teorema 6.1. *Sean un RKPF con todas sus etapas implícitas, y n formas bilineales y coercivas $a_{ih}(t;\cdot,\cdot)$ con $i = 1, \ldots, n$, cuyo sistema de operadores asociado es $\{A_{ih}(t)\}_{i=1}^n$ y $\{g_{ih}(t)\}_{i=1}^n$ n aproximaciones consistentes de orden q, de los términos $\{g_i(t)\}_{i=1}^n$ en los que se ha fraccionado el término fuente, es decir,*

$$\|g_{ih}(t) - \pi_h g_i(t)\|_h \leq C\, h^q. \tag{41}$$

Si las aplicaciones de conexión π_h y $r_h(t)$ verifican las propiedades

$$
\begin{aligned}
&\big\|\big(r_h(t) - r_h(t')\big)u(t)\big\|_h \leq C|t - t'|\, h^q, \quad \forall\, t, t' \in [0, T],\\
&\big\|\big(r_h(t) - \pi_h\big)u'(t')\big\|_h \leq C\, h^q, \quad \forall\, t, t' \in [0, T],
\end{aligned} \tag{42}
$$

entonces se verifica (40).

A continuación damos, sin demostración (ver [Buj99]), dos teoremas que nos permiten acotar e_{2h}^{m+1}. Estas cotas sobre e_{2h}^{m+1}, que concentra la aportación al error de la discretización temporal, son del tipo $C\, \Delta t^{p+1}$, con C independiente de h. Esta independencia de h surgirá del hecho de que los operadores $\{A_{ih}(t)\}_{i=1}^n$ preserven las propiedades de maximalidad y monotonía de los operadores $\{A_i(t)\}_{i=1}^n$ y de que las D.E.F., que intervienen en los desarrollos de Taylor (en t), que empleemos, una vez proyectadas en V_h, estén acotadas independientemente de h.

Teorema 6.2. *Si empleamos un RKPF con todas sus etapas implícitas, las condiciones de orden $(b^i)^T (\mathcal{C})^{k-1} e = \dfrac{1}{k}$, $\forall\, i = 1, \ldots, n$, $\forall\, k = 1, \ldots, p$, y las reducciones*

$(\mathcal{C})^k e - k\mathcal{A}^i(\mathcal{C})^{k-1}e = 0$, $\forall\, i = 1,\dots,n$, $\forall\, k = 1,\dots,p$, para discretizar un problema variacional del tipo (8), junto con una discretización espacial que cumpla (H1), (H2), (H3), (H4) y (H5), de forma que la solución de (8) verifica

$$\|\pi_h u_i^{(p+1)}(t)\|_h \le C, \quad \forall\, i = 1,\dots,n, \quad \forall\, t \in [0,T], \tag{43}$$

donde $u_i^{(p+1)}(t)$ se deduce a partir de $u_i'(t) = -(A_i(t)u(t) - g_i(t))$, entonces

$$\|e_{2h}^{m+1}\|_h \le C(\Delta t)^{p+1}. \tag{44}$$

Teorema 6.3. *Si empleamos un RKPF con todas sus etapas implícitas, las condiciones de orden*

$$\begin{cases} (b^{i_1})^T\mathcal{C}^{\rho_1}\mathcal{A}^{i_2}\mathcal{C}^{\rho_2}\cdots\mathcal{A}^{i_r}\mathcal{C}^{\rho_r}e = \displaystyle\prod_{j=1}^{r}\frac{1}{(r-j+1)+\displaystyle\sum_{k=j}^{r}\rho_k} \\ \forall\, \rho_1,\dots,\rho_r \in \{0,\dots,p-1\} \text{ verificando } \displaystyle\sum_{k=1}^{r}\rho_k = i - r \text{ con } i = 1,\dots,p, \\ \text{y } \forall\, i_1, i_2,\dots,i_r \in \{1,2,\dots,n\}, \end{cases}$$

y las reducciones $(\mathcal{C})^k e - k\mathcal{A}^i(\mathcal{C})^{k-1}e = 0$, $\forall\, i = 1,\dots,n$, $\forall\, k = 1,\dots,p$, para discretizar un problema variacional del tipo (8), junto con una discretización espacial que cumpla (H1), (H2), (H3), (H4) y (H5), de forma que la solución de (8) verifica (43) y la hipótesis

$$\begin{cases} \|A_{i_1h}^{(\rho_1)}(t)\cdots A_{i_{l+1}h}^{(\rho_{l+1})}(t)\,\pi_h u_{i_{l+2}}^{(k)}(t)\|_h \le C, \quad \forall\, i_\bullet \in \{1,\dots,n\}, \\ l \in \{0,\dots,p-k+1\}, \quad \forall\, k \in \{\text{máx}\{1,k_0\},\dots,p\}, \quad \forall\, t \in [0,T], \\ \text{y } \rho_1 + \cdots + \rho_l \le p - k - l + 1; \\ \|\pi_h u_i^{(p+1)}(t)\|_h \le C, \quad \forall\, i = 1,\dots,n, \quad \forall\, t \in [0,T], \end{cases}$$

entonces, se obtiene la cota (44).

Para finalizar realizaremos el estudio de la convergencia del esquema totalmente discreto (17). Concretamente veremos que este esquema es convergente de orden q en espacio y orden p en tiempo. Este resultado de convergencia se demuestra combinando los resultados de estabilidad y consistencia que hemos obtenido en esta sección (ver [Buj99]).

Teorema 6.4 (Convergencia del esquema totalmente discreto)**.** *Si el problema (4) posee solución única suficientemente regular y es discretizado mediante un esquema del tipo (17), de forma que se verifican las acotaciones uniformes (23), (40) y (44), entonces el error global verifica*

$$E_h^m \le C(\Delta t^p + h^q).$$

Referencias

[Buj99] B. Bujanda, *Métodos Runge-Kutta de pasos fraccionarios de orden alto para la resolución de problemas evolutivos de convección-difusión-reacción*, Tesis doctoral, Universidad Pública de Navarra, Secc. 2, n. 15 (1999), 1–174.

[But87] J. C. Butcher, *The numerical analysis of ordinary differential equations*, Wiley & Sons, 1987.

[CL90] P. G. Ciarlet y J. L. Lions, *Handbook of numerical analysis*, Vol. I, North Holland, 1990.

[CS83] G. J. Cooper y A. Sayfy, Additive Runge-Kutta methods for stiff ordinary differential equations, *Math. Comp.* **40** (1983), 207–218.

[Dou55] J. Douglas, On the numerical integration of $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ by implicit methods, *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **3** (1955), 42–65.

[DD71] J. Douglas y T. Dupont, Alternating directions Galerkin methods on rectangles, en *Numerical Solution of Partial Differential Equations, II (SYNSPADE 1970)* (Proc. Sympos., Univ. of Maryland, 1970), Academic Press, Nueva York (1971), 133–214.

[DR56] J. Douglas y H. H. Rachford, On the numerical solution of heat conduction problems in two- and three-space variables, *Trans. Amer. Math. Soc.* **82** (1956), 421–439.

[HNW87] E. Hairer, S. P. Nørsett y G. Wanner, *Solving ordinary differential equations I*, *Springer-Verlag*, 1987.

[Hun92] W. Hundsdorfer, Unconditional convergence of some Crank-Nicolson lod methods for initial-boundary value problems, *Math. Comp.* **58** (1992), 33–53.

[Hun98a] W. Hundsdorfer, A note on stability of the Douglas splitting method, *Math. Comp.* **67** (1998), 183–190.

[Hun98b] W. Hundsdorfer, Trapezoidal and midpoint splittings for initial-boundary value problems, *Math. Comp.* **67** (1998), 1047–1062.

[Jor90] J. C. Jorge, *Métodos de Runge-Kutta adtitivos para la integración de ecuaciones diferenciales ordinarias stiff*, Publicaciones del seminario matemático García de Galdeano, Universidad de Zaragoza, 1990.

[Jor92] J. C. Jorge, *Los métodos de pasos fraccionarios para la integración de problemas parabólicos lineales: formulación general, análisis de la convergencia y diseño de nuevos métodos*, Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza, 1992.

[LM78] J. L. Lions y B. Mercier, *Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators*, Raport interne num. 29 du Centre de Math. Appl., Ecole Polytechnique, París, 1978.

[PR55] D. W. Peaceman y H. H. Rachford, The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **3** (1955), 28–41.

[Per93] J. B. Perot, An analysis of the fractional step method, *J. Comput. Phys.* **108** (1993), 51–58.

[San89] J. M. Sanz-Serna, The numerical integration of Hamiltonian system, en *Computational ordinary differential equations* (Proceedings, Londres, 1989), *Inst. Math. Appl. Conf. Ser. New Ser.* **39**, Oxford Univ. Press, Nueva York (1992), 437–449.

[Tem68] R. Temam, Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionaires, *Annali Mat. Pura Appl. (4)* **79** (1968), 191–379.

[Van96] P. J. van der Houwen, The development of Runge-Kutta methods for partial differential equations, *Appl. Numer. Math.* **20** (1996), 261–272.

[Yan71] N. N. Yanenko, *The method of fractional steps. The solution of problems of mathematical physics in several variables*, Springer-Verlag, Nueva York, 1971.

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Edificio Vives, Calle Luis de Ulloa s/n, 26004 Logroño (La Rioja), Spain

Correo electrónico: `bbujanda@dmc.unirioja.es`

Departamento de Matemática e Informática, Universidad Pública de Navarra, Edificio Los Acebos, Campus Arrosadía s/n, 31006 Pamplona (Navarra), Spain

Correo electrónico: `jcjorge@unavarra.es`