MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

CONVERGENCIA RELATIVA DE POLINOMIOS ORTOGONALES VARIANTES

BERNARDO DE LA CALLE YSERN Y GUILLERMO LÓPEZ LAGOMASINO

En recuerdo de los buenos momentos pasados con Chicho

ABSTRACT. We consider the relative asymptotic behaviour of orthogonal polynomials with respect to varying measures supported on the real line and the unit circle. The main feature of the results is the generality of the class of measures studied.

1. INTRODUCCIÓN

Consideraremos el problema de la convergencia relativa para medidas cuyo soporte esté contenido en la circunferencia unidad, si bien es posible describirlo sin dificultad en una situación más general. Sea ρ una medida de Borel finita y positiva en $[0,2\pi]$. Sea h una función no negativa en $[0,2\pi]$ tal que $h \in L^1(d\rho)$. Denotamos por $\varphi_n(d\rho)$ al n-ésimo polinomio ortonormal respecto a la medida $d\rho$ y por $\varphi_n(h\,d\rho)$ al correspondiente polinomio de la medida $h\,d\rho$. El problema de la convergencia relativa (o comparativa) consiste en encontrar condiciones para que exista $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(h\,d\rho)/\varphi_n(d\rho)$ y calcular su expresión.

Si la medida ρ cumple $\log\rho' \in L^1[0,2\pi]$ se dice que ρ pertenece a la CLASE DE SZEGŐ y se define la FUNCIÓN DE SZEGŐ asociada a ρ, $S(\rho';\cdot)$, mediante la expresión

$$S(\rho';z) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{w+z}{w-z}\log\rho'(\theta)\,d\theta\right\}, \quad w = e^{i\theta}, \quad |z| \neq 1.$$

La clase de Szegő aparece en la resolución del así llamado problema extremal de Szegő (para información sobre el mismo pueden consultarse, por ejemplo, [Fr], [Ni] y [Sz]). Si φ_n es el n-ésimo polinomio ortonormal respecto a la medida ρ se cumple el conocido teorema de Szegő (véase [Fr], capítulo V)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n(z)}{z^n} = S(\rho';z), \tag{1}$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\{z : |z| > 1\}$. De este modo, el problema de la convergencia relativa puede considerarse una extensión de la teoría de Szegő ya que si $d\rho = d\theta/(2\pi)$ se tiene $\varphi_n(d\rho) = z^n$.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 42C05, 30E15; Secondary: 30E10.

Key words and phrases. Orthogonal polynomials, varying measures, relative asymptotics.

El trabajo de los dos autores ha sido parcialmente financiado por la Dirección General de Investigación, Ministerio de Ciencia y Tecnología, a través del proyecto BFM2000-0206-C04-01 y además, en el caso de G. López, por el INTAS.

En el caso de que las medidas $h\,d\rho$ y $d\rho$ pertenezcan ambas a la clase de Szegő, la aplicación directa de la fórmula (1) implica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n(h\,d\rho)(z)}{\varphi_n(d\rho)(z)} = \frac{S(h\rho';z)}{S(\rho';z)} = S(h;z), \quad |z|>1. \tag{2}$$

Este resultado no es completamente satisfactorio, pues para la existencia del segundo miembro de la igualdad anterior sólo es necesario que $\log h \in L^1[0,2\pi]$. Por ello, las investigaciones se han centrado en buscar las condiciones más débiles posibles para que se verifique (2). En [Ra], Rakhmanov anuncia sin demostrar que la condición necesaria $\log h \in L^1[0,2\pi]$ no es suficiente y conjetura que $\log h \in L^p[0,2\pi]$, $p>2$ sí lo es. En cualquier caso el problema permanece abierto.

El primer problema de convergencia comparativa fue planteado por A. A. Gonchar en [Go], al estudiar la convergencia de los aproximantes Padé a funciones meromorfas tipo Markov. En su trabajo obtuvo una fórmula del tipo (2) (la medida ρ soportada en un intervalo real) bajo las hipótesis de que h fuera una fracción racional con polos fuera del soporte de ρ y $\rho'>0$ en casi todo punto. Puede consultarse también, en relación con este tema, [Lo88].

En toda su generalidad, el problema de la convergencia relativa fue planteado primero por P. Nevai en [Ne]; más tarde, fue estudiado por Rakhmanov, [Ra], y Máté, Nevai y Totik, [Ma84] y [Ma87]. En estos trabajos, aparte de otros resultados, se encuentran teoremas que garantizan la existencia del límite (2) imponiendo a la función h condiciones no demasiado restrictivas. Así mismo hay fórmulas comparativas sobre el soporte de la medida con hipótesis tipo Lipschitz sobre h. En [Lo90] se demuestran resultados análogos para polinomios ortogonales respecto a medidas variantes, a fin de trasladar los teoremas a medidas con soporte en el eje real. El propósito de este trabajo es demostrar alguna de las fórmulas que aparecen en los artículos anteriores para una clase general de medidas variantes, aquellas que verifican la condición de admisibilidad fuerte.

2. Definiciones y resultados auxiliares

El contexto natural para el estudio de la convergencia fuerte de polinomios ortogonales lo constituye los espacios de Hardy. Nosotros nos limitaremos a definir los espacios $\mathbb{H}_p$ y enunciar un resultado que será utilizado en las demostraciones. Para una consulta más detallada véase [Ru], donde aparecen estos temas de modo suficiente. Para más información pueden consultarse las monografías [Du] y [Ko].

Sea f una función analítica en el disco unidad abierto. Sea p un número real positivo. Denotamos

$$M_p(f;r) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad r<1.$$

Se dice que la función f, analítica en el disco unidad abierto, pertenece al espacio de Hardy $\mathbb{H}_p$ si verifica

$$\lim_{r\to 1^-} M_p(f;r) < \infty.$$

Si $p \geq 1$, el espacio $\mathbb{H}_p$ tiene estructura de espacio normado definiendo la norma de f como $\|f\|_p = \text{lím}_{r\to 1^-} M_p(f;r)$. Claramente, $\mathbb{H}_s \subset \mathbb{H}_r$ si $r < s$.

El resultado que utilizaremos más adelante es el siguiente:

Teorema 2.1. *Toda función que pertenezca al espacio* $\mathbb{H}_1$ *admite límites radiales finitos en casi todo punto. Es decir, si* $f \in \mathbb{H}_1$, *entonces, para casi todo punto* $\theta \in [0, 2\pi]$, *existe*

$$\lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta}).$$

Este límite define una función $f^*(\theta) = \text{lím}_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$ que pertenece al espacio $L^1[0, 2\pi]$. Más aún, f es la INTEGRAL DE POISSON de f^*, esto es

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(e^{it})P(z, e^{it})\,dt, \quad |z| < 1, \tag{3}$$

donde $P(z, w) = \dfrac{1 - |z|^2}{|w - z|^2}$ es el NÚCLEO DE POISSON.

Sean ρ_n y ρ medidas de Borel, finitas y positivas en $[0, 2\pi]$. Por $\rho_n \xrightarrow{\ *\ } \rho$, $n \to \infty$, denotamos la CONVERGENCIA DÉBIL* de ρ_n a ρ cuando n tiende a infinito. Es decir, para toda función 2π-periódica f, continua en $[0, 2\pi]$, se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\rho_n(\theta) = \int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\rho(\theta).$$

Sea ρ una medida de Borel compleja y regular en $[0, 2\pi]$ (en el sentido que la medida de cualquier conjunto de Borel $B \subset [0, 2\pi]$ es el supremo de las medidas de los conjuntos compactos de $[0, 2\pi]$ contenidos en B y el ínfimo de las medidas de los conjuntos abiertos de $[0, 2\pi]$ que contienen a B). La NORMA de ρ se define como

$$\|\rho\| = |\rho|([0, 2\pi])\,,$$

donde $|\rho|$ denota la medida positiva dada por la variación total de ρ. Esta aplicación define una norma en el espacio de todas las medidas de Borel complejas y regulares. Una sucesión de medidas de Borel complejas regulares $\{\rho_n\}$ converge en norma a ρ si

$$\lim_{n\to\infty} \|\rho_n - \rho\| = 0\,.$$

Es bien sabido que todas las medidas de Borel finitas y positivas son regulares, por lo que este tipo de convergencia se aplica también a las medidas que estamos manejando (pueden verse estos conceptos y resultados en [Ru], por ejemplo).

Sea $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas de Borel finitas y positivas en el intervalo $[0, 2\pi]$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ el soporte de ρ_n contiene un número infinito de puntos. Por $d\theta/2\pi$ denotamos la medida de Lebesgue en $[0, 2\pi]$, y por $\rho_n' = 2\pi\,d\rho_n/d\theta$ la derivada de Radon-Nykodym de $d\rho_n$ con respecto a $d\theta/2\pi$. Por $\mathbb{N}$ (respectivamente $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) denotamos el conjunto de números naturales (resp. enteros, reales, complejos).

Sea $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de polinomios tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, W_n tiene grado n y todos sus ceros $\{w_{n,i}\}, 1 \leq i \leq n$, pertenecen al disco unidad cerrado.

Suponemos que los índices se toman de tal manera que si $w = 0$ es un cero de W_n de multiplicidad m entonces $w_{n,1} = w_{n,2} = \cdots = w_{n,m} = 0$. Consideramos

$$d\sigma_n(\theta) = \frac{d\rho_n(\theta)}{|W_n(z)|^2}\,, \quad z = e^{i\theta}.$$

Es necesario, para llegar a algún resultado concreto, establecer cierto tipo de conexión entre las medidas ρ_n y, a su vez, entre éstas y los polinomios W_n. A estas relaciones las llamaremos condiciones de admisibilidad.

Definición 2.1. *Fijemos un número entero* $k \in \mathbb{Z}$. *Se dice que* $(\{d\rho_n\}, \{W_n\}, k)$ *es fuertemente admisible en* $[0, 2\pi]$ *si:*

(i) *Existe una medida de Borel* ρ *finita y positiva en el intervalo* $[0, 2\pi]$ *tal que* $\rho_n \xrightarrow{*} \rho$, $n \to \infty$ *y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |\rho_n'(\theta) - \rho'(\theta)|\, d\theta = 0.$$

(ii) $\rho' > 0$ *en casi todo punto de* $[0, 2\pi]$.

(iii) $\|d\sigma_n\| = \int_0^{2\pi} d\sigma_n(\theta) < +\infty\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$

(iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (1 - |w_{n,i}|) = +\infty.$

(v) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^{-k} |z - w_{n,i}|^{-2}\, d\rho_n(\theta) \le M < +\infty\,,$ $z = e^{i\theta}$, $n \in \mathbb{N}$ *(esta condición sólo se aplica en el caso que* k *sea un número entero negativo).*

En [Lo89] la definición de admisibilidad fuerte se presenta de manera análoga pero la parte $d\rho_n$ de las medidas variantes no depende de n. Es claro que, en esa situación, la condición (i) deja de tener relevancia alguna.

No es difícil probar que $\lim_{n\to\infty} \|\rho_n - \rho\| = 0$ implica (i) de la definición anterior. La condición (iii) de admisibilidad fuerte garantiza que para cada par (n, m) de números naturales se puede construir un POLINOMIO ORTONORMAL VARIANTE $\varphi_{n,m}(z) = \alpha_{n,m} z^m + \cdots$ que está unívocamente determinado por las siguientes relaciones de ortogonalidad

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{z}^j \varphi_{n,m}(z)\, d\sigma_n(\theta) = 0\,, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1\,, \quad z = e^{i\theta}\,,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi_{n,m}(z)|^2\, d\sigma_n(\theta) = 1\,, \quad \mathrm{gr}\, \varphi_{n,m} = m\,, \quad \alpha_{n,m} > 0\,.$$

Sea $\Phi_{n,m}(z) = z^m + \cdots = (\alpha_{n,m})^{-1} \varphi_{n,m}(z)$ y consideremos el POLINOMIO RECÍPROCO $\Phi^*_{n,m}(z) = z^m \overline{\Phi_{n,m}}(1/z)$. Para cualquier sucesión de medidas de Borel positivas $\{\sigma_n\}$ tal que $\int_0^{2\pi} d\sigma_n(\theta) < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$, se cumplen las siguientes relaciones, que no son más que simples reformulaciones de resultados bien conocidos (obsérvese que n permanece fijo en cada fórmula):

$$\Phi_{n,m+1}(w) = w\Phi_{n,m}(w) + \Phi_{n,m+1}(0) \Phi^*_{n,m}(w)\,, \tag{4}$$

$$\Phi^*_{n,m+1}(w) = \Phi^*_{n,m}(w) + \overline{\Phi_{n,m+1}(0)}w\Phi_{n,m}(w)\,, \tag{5}$$

$$(\alpha_{n,m+1})^2 = (\alpha_{n,m})^2 + |\varphi_{n,m+1}(0)|^2\,, \tag{6}$$

$$|\Phi_{n,m+1}(0)| \leq C\int_0^{2\pi}\left|\frac{|\varphi_{n,m}(z)|^2}{|\varphi_{n,m+1}(z)|^2} - 1\right| d\theta\,,\ z = e^{i\theta}\,, \tag{7}$$

donde C es una constante independiente de n y m. Puede consultarse la demostración de (4)–(6) en el capítulo 1 de [Va], para la de (7) véase el teorema 2 en [Ma85].

En [Ca] aparece el siguiente teorema del que se deducen, siguiendo técnicas estándar, los demás resultados citados en esta sección. Véase dicho artículo para las demostraciones.

Teorema 2.2. *Si* $(\{d\rho_n\}, \{W_n\}, k)$ *es fuertemente admisible en* $[0, 2\pi]$*, entonces*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\left|\frac{|\varphi_{n,n+k}(z)|^2}{|\varphi_{n,n+k+m}(z)|^2} - 1\right| d\theta = 0,$$

uniformemente en $m \in \mathbb{N}$.

Combinando (4)–(7) y usando el teorema 2.2, obtenemos

Teorema 2.3. *Si* $(\{d\rho_n\}, \{W_n\}, k)$ *es fuertemente admisible en* $[0, 2\pi]$*, entonces*

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_{n,n+k+1}(0) = 0\,, \tag{8}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_{n,n+k+1}}{\alpha_{n,n+k}} = 1\,, \tag{9}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Phi_{n,n+k+1}(w)}{\Phi_{n,n+k}(w)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_{n,n+k+1}(w)}{\varphi_{n,n+k}(w)} = w, \quad |w| \geq 1\,, \tag{10}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Phi^*_{n,n+k+1}(w)}{\Phi^*_{n,n+k}(w)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\varphi^*_{n,n+k+1}(w)}{\varphi^*_{n,n+k}(w)} = 1, \quad |w| \leq 1\,. \tag{11}$$

En (10)–(11) la convergencia es uniforme en los subconjuntos compactos de las regiones indicadas.

Siguiendo el esquema del lema 5 en [Lo87] se prueba de modo análogo:

Teorema 2.4. *Si la terna* $(\{d\rho_n\}, \{W_n\}, j)$ *es fuertemente admisible en* $[0, 2\pi]$ *para todo* $j \in \mathbb{Z}$*, entonces*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Phi^*_{n,n+k}(w)}{\Phi_{n,n+k}(w)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\varphi^*_{n,n+k}(w)}{\varphi_{n,n+k}(w)} = 0, \quad |w| > 1, \tag{12}$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$*, uniformemente en compactos de* $\{w \in \mathbb{C} : |w| > 1\}$.

Necesitaremos, por último, el siguiente teorema que aparece en [Ca].

Teorema 2.5. *Si* $(\{d\rho_n\},\{W_n\},k)$ *es fuertemente admisible en* $[0,2\pi]$*, entonces para toda función* f *medible Borel y acotada en* $[0,2\pi]$ *y para cada número natural* $m\in\mathbb{N}$*, se tiene*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\frac{\varphi_{n,n+k}(z)\overline{\varphi_{n,n+k+m}(z)}z^m}{|W_n(z)|^2}\,d\rho_n(\theta)=\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta. \tag{13}$$

Los resultados anteriores pueden utilizarse para demostrar diferentes teoremas sobre polinomios ortogonales variantes con soporte en la recta real del modo que puede verse, por ejemplo, en [Ca] y [Lo89]. Se relacionan ambos tipos de polinomios usando básicamente el hecho que una medida soportada en el intervalo $[-1,1]$ define, mediante proyección, una medida en la circunferencia unidad. Nosotros haremos uso de esta construcción en la sección siguiente para demostrar un teorema de convergencia relativa en la recta real.

Sea $\{w_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de polinomios con coeficientes reales tal que, para cada $n\in\mathbb{N}$: $\operatorname{gr} w_{2n}=i_n, 0\le i_n\le 2n$; y $w_{2n}\ge 0$ en $[-1,1]$. Si $i_n<2n$, consideramos que $x_{2n,i}=\infty$ para $1\le i\le 2n-i_n$; si además, $i_n>0$, entonces $\{x_{2n,i}\}_{2n-i_n+1\le i\le 2n}$, denota el conjunto de ceros de w_{2n}. Cuando $i_n=2n$, $\{x_{2n,i}\}_{1\le i\le 2n}$ es el conjunto de ceros de w_{2n}.

Consideremos $d\tau_n=d\mu_n/w_{2n}$. Si, para cada $n\in\mathbb{N}$,

$$\int_{-1}^{1}\frac{d\mu_n(x)}{w_{2n}(x)}<+\infty\,,$$

puede construirse una tabla de polinomios $\{l_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$, tal que $l_{n,m}=\beta_{n,m}x^m+\cdots$, $\beta_{n,m}>0$, es el m-ésimo POLINOMIO ORTONORMAL con respecto a τ_n; es decir, estos polinomios están unívocamente determinados por el hecho de tener coeficiente conductor positivo y verificar las siguientes relaciones:

$$\int_{-1}^{1} l_{n,k}\,l_{n,m}\,d\tau_n(x)=\delta_{k,m}\,.$$

De acuerdo con las condiciones anteriores, $w_{2n}(\cos\theta)$ es no negativo para $\theta\in\mathbb{R}$ y, de este modo, (véase el teorema 1.2.1 de [Sz]) existe un polinomio algebraico $W'_{2n}(w)$, de grado i_n, cuyos ceros están en $\overline{U}$ tal que

$$w_{2n}(\cos\theta)=|W'_{2n}(e^{i\theta})|^2\,,\quad \theta\in[0,2\pi]\,.$$

Es fácil ver que los ceros de W'_{2n} son los puntos

$$\left\{\frac{1}{\Psi(x_{2n,i})}\right\}_{2n-i_n+1\le i\le 2n}\,,$$

donde Ψ denota la aplicación conforme de $\overline{\mathbf{C}}\setminus[-1,1]$ en $\{|w|>1\}$, tal que $\Psi(\infty)=\infty$ y $\Psi'(\infty)>0$ (en $[-1,1]$ Ψ se extiende de manera que su función inversa sea continua en $\{|w|=1\}$). Tómese $W_{2n}=w^{2n-i_n}W'_{2n}$; entonces, el grado de W_{2n} es igual a $2n$ y

$$w_{2n}(\cos\theta)=|W_{2n}(e^{i\theta})|^2\,,\quad \theta\in[0,2\pi]\,.$$

Los polinomios $l_{n,m}$ están estrechamente relacionados con los polinomios $\varphi_{2n,2m}$, polinomios ortonormales con respecto a la medida σ_{2n} definida por

$$d\sigma_{2n}(\theta) = d\tau_n(\cos\theta) = \frac{d\mu_n(\cos\theta)}{|W_{2n}(z)|^2}\,, \quad z = e^{i\theta}\,.$$

Esto es, $\sigma_{2n}(E) = \tau_n(\{\cos\theta;\ \theta \in E\})$ siempre que $E \subset [0,\pi]$ ó $E \subset [\pi, 2\pi]$. De modo que escribiendo $\sigma_{2n}(\theta) = \sigma_{2n}(\{0 \le t \le \theta\})$, tenemos

$$\sigma_{2n}(\theta) = \begin{cases} G_n(1) - G_n(\cos\theta) & \text{si} \quad 0 \le \theta \le \pi, \\ G_n(1) + G_n(\cos\theta) & \text{si} \quad \pi \le \theta \le 2\pi, \end{cases}$$

donde $G_n(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} d\tau_n(t)$, $x \in [-1,1]$, en todo punto θ donde σ_{2n} sea continua o equivalentemente, en casi todo punto de $[0,2\pi]$. Luego

$$\sigma_{2n}'(\theta) = |\operatorname{sen}\theta|\, G_n(\cos\theta) = |\operatorname{sen}\theta|\, \frac{\mu_n'(\cos\theta)}{|W_{2n}(e^{i\theta})|^2} = |\operatorname{sen}\theta|\, \tau_n'(\cos\theta),$$

en casi todo punto de $[0,2\pi]$. Obsérvese que se cumple que $\sigma' > 0$ en casi todo punto si $\tau' > 0$ en casi todo punto, donde

$$\sigma(\theta) = \begin{cases} \tau(1) - \tau(\cos\theta) & \text{si} \quad 0 \le \theta \le \pi, \\ \tau(1) + \tau(\cos\theta) & \text{si} \quad \pi \le \theta \le 2\pi, \end{cases}$$

y τ es cualquier medida del mismo tipo que τ_n. Para cada n fijo, usaremos la conocida fórmula (véase el teorema V.1.4 de [Fr])

$$l_{n,m}(x) = \frac{\varphi_{2n,2m}(w) + \varphi_{2n,2m}^*(w)}{w^m\sqrt{2\pi(1 + \Phi_{2n,2m}(0))}}\,, \tag{14}$$

donde $\Phi_{2n,2m} = \dfrac{\varphi_{2n,2m}}{\alpha_{2n,2m}}$ y $x = \dfrac{1}{2}(w + 1/w)$. Si $L_{n,m} = \dfrac{l_{n,m}}{\beta_{n,m}}$, la relación anterior se escribe

$$L_{n,m}(x) = \frac{\Phi_{2n,2m}(w) + \Phi_{2n,2m}^*(w)}{(2w)^m(1 + \Phi_{2n,2m}(0))}. \tag{15}$$

Denotaremos $d\rho_n(\theta) = d\mu_n(\cos\theta)$. Establecemos ahora una condición de admisibilidad fuerte en la recta real.

Definición 2.2. *Sea $k \in \mathbb{Z}$ fijo, se dice que $(\{\mu_n\}, \{w_{2n}\}, k)$ es fuertemente admisible en $[-1,1]$ si $(\{\rho_n\}, \{W_{2n}\}, k)$ es fuertemente admisible en $[0,2\pi]$.*

No es difícil comprobar, debido a la relación existente entre las medidas en la circunferencia y en la recta real, que la definición anterior equivale a que la terna $(\{\mu_n\}, \{w_{2n}\}, k)$ satisfaga las siguientes condiciones:

(I) Existe una medida de Borel finita y positiva μ en el intervalo $[-1,1]$ tal que $\mu_n \xrightarrow{\ *\ } \mu$, $n \to \infty$, y

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} |\mu_n' - \mu'|\, dx = 0\,.$$

(II) $\mu' > 0$ en casi todo punto de $[-1,1]$.

(III) $\|d\tau_n\| = \int_{-1}^{1} d\tau_n(x) < +\infty, \quad n \in \mathbb{N}$.

(IV) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2n} \left(1 - \frac{1}{|\Psi(x_{2n,i})|}\right) = +\infty$.

(V) $\int_{-1}^{1} \prod_{i=1}^{-k} \left|1 - \frac{x}{x_{2n,i}}\right|^{-1} d\mu_n(x) \leq M < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$, donde $\frac{x}{x_{2n,i}} \equiv 0$ si $x_{2n,i} = \infty$ (esta condición sólo se aplica en el caso en que k sea un número entero negativo).

3. Resultados y demostraciones

En toda la sección se entenderá que $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y utilizaremos $\varphi_{n,m}(d\sigma_n)$ para denotar al polinomio de grado m ortonormal con respecto a la medida $d\sigma_n$. Necesitamos primero el siguiente lema.

Lema 3.1. *Sea h una función medible Borel no negativa en $[0, 2\pi]$.*

(a) *Si existe un polinomio Q tal que $|Q(z)|h^{-1}$ está acotada en $[0, 2\pi]$ y $(\{h d\rho_n\}, \{W_n\}, k)$ es fuertemente admisible en $[0, 2\pi]$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, entonces, para cualquier función f Riemann integrable en $[0, 2\pi]$ y para cada $k \in \mathbb{Z}$ fijo, se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, |Q(z)|^2 \left|\frac{\varphi_{n,n+k}(h\, d\sigma_n)}{\varphi_{n,n+k}(d\sigma_n)}(z)\right|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta)\, |Q(z)|^2\, h^{-1}(\theta)\, d\theta. \tag{16}$$

(b) *Si existe un polinomio Q tal que $|Q(z)|h$ está acotada en $[0, 2\pi]$ y $(\{d\rho_n\}, \{W_n\}, k)$ es fuertemente admisible en $[0, 2\pi]$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, entonces, para cualquier función f Riemann integrable en $[0, 2\pi]$ y para cada $k \in \mathbb{Z}$ fijo, se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, |Q(z)|^2 \left|\frac{\varphi_{n,n+k}(d\sigma_n)}{\varphi_{n,n+k}(h\, d\sigma_n)}(z)\right|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta)\, |Q(z)|^2\, h(\theta)\, d\theta. \tag{17}$$

Demostración. Los enunciados (a) y (b) se prueban usando los mismos argumentos; llevaremos a cabo la demostración del apartado (a). Más aún, para simplificar la notación, sólo consideraremos el caso $k = 0$ (la prueba es análoga para un k arbitrario) y usaremos los siguientes convenios en la notación

$$\varphi_{n,m} = \varphi_{n,m}(d\sigma_n), \quad \psi_{n,m} = \varphi_{n,m}(h\, d\sigma_n), \quad \varphi_n = \varphi_{n,n}, \quad \psi_n = \psi_{n,n}.$$

Sea T_m un polinomio trigonométrico arbitrario de grado $m \leq n$; entonces (véase [Fr], capítulo V, teorema 2.2)

$$\int_0^{2\pi} \frac{T_m(\theta)}{|\varphi_n(z)|^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} T_m(\theta)\, d\sigma_n(\theta).$$

Escojamos Q de grado j y $m \leq n - j$; entonces el grado de $T_m(\theta)|Q\psi_{n,n-j-m}(z)|^2$ es igual a n y de la igualdad anterior se deduce que

$$\int_0^{2\pi} \frac{T_m(\theta)|Q\psi_{n,n-j-m}(z)|^2}{|\varphi_n(z)|^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} T_m(\theta)\, h^{-1}\, |Q\psi_{n,n-j-m}(z)|^2\, h\, d\sigma_n(\theta). \tag{18}$$

Como $(\{hd\rho_n\},\{W_n\},k)$ es fuertemente admisible en $[0,2\pi]$ para todo $k\in\mathbb{Z}$ y $|Q(z)|h^{-1}$ está acotada en $[0,2\pi]$, las fórmulas (13) y (18) implican

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} T_m(\theta)\frac{|Q\psi_{n,n-j-m}(z)|^2}{|\varphi_n(z)|^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi} T_m(\theta)\,h^{-1}\,|Q(z)|^2\,d\theta. \tag{19}$$

Por otra parte,

$$\left|\int_0^{2\pi} T_m(\theta)\left|\frac{Q\psi_{n,n-j-m}}{\varphi_n}(z)\right|^2 d\theta-\int_0^{2\pi} T_m(\theta)\left|\frac{Q\psi_n}{\varphi_n}(z)\right|^2 d\theta\right|$$
$$\le \sup_{|z|=1}\left|1-\left|\frac{\psi_n}{\psi_{n,n-j-m}}(z)\right|^2\right|\int_0^{2\pi}|T_m(\theta)|\frac{|Q\psi_{n,n-j-m}(z)|^2}{|\varphi_n(z)|^2}\,d\theta.$$

Según (19), (9) y (10) (aplicado a $h\,d\sigma_n$) el segundo miembro de esta desigualdad tiende a cero y, por tanto

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} T_m(\theta)\frac{|Q\psi_n(z)|^2}{|\varphi_n(z)|^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi} T_m(\theta)\,|Q(z)|^2\,h^{-1}\,d\theta.$$

En este punto pueden usarse argumentos de aproximación (como los del teorema 1.5.4 de [Sz]) y demostrar que el polinomio trigonométrico T_m puede sustituirse por una función Riemann integrable arbitraria. Esto prueba (16); (17), como dijimos anteriormente, se obtiene de modo análogo. □

Podemos ahora demostrar convergencia relativa de los polinomios ortonormales con respecto a $h\,d\sigma_n$ y $d\sigma_n$.

Teorema 3.1. *Sea $(\{d\rho_n\},\{W_n\},k)$ fuertemente admisible en $[0,2\pi]$ para todo $k\in\mathbb{Z}$. Sea h una función medible Borel en $[0,2\pi]$ verificando:*

1. *Existe un polinomio $Q\not\equiv 0$ tal que $|Q(z)|h^{\pm1}(\theta)$ está acotada en $[0,2\pi]$.*
2. *$h\ge 0$ en $[0,2\pi]$.*
3. *$(\{hd\rho_n\},\{W_n\},k)$ es fuertemente admisible en $[0,2\pi]$ para todo $k\in\mathbb{Z}$.*

Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_{n,n+k}(h\,d\sigma_n)}{\varphi_{n,n+k}(d\sigma_n)}(z)=S(h;z), \tag{20}$$

donde el límite es uniforme en subconjuntos compactos de $\{z:|z|>1\}$.

Demostración. En primer lugar, observemos que las hipótesis 1 y 2 implican $\log h\in L^1([0,2\pi])$ (por lo que existe la función de Szegő $S(h;z)$). Nos será más cómodo probar la relación equivalente

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi^*_{n,n+k}(h\,d\sigma_n)}{\varphi^*_{n,n+k}(d\sigma_n)}(z)=S^*(h,z)=\overline{S(h,1/\overline{z})}, \tag{21}$$

donde el límite es uniforme en subconjuntos compactos de U (la fórmula (21) se obtiene de (20) haciendo el cambio de variable $z\to 1/\overline{z}$ y conjugando).

Teniendo en cuenta (11), vemos que es suficiente probar (21) para $k=0$. Como antes, para simplificar la notación, ponemos $\varphi_n=\varphi_n(d\sigma_n)$, $\varphi_n^*=\varphi_n^*(d\sigma_n)$, $\psi_n=\varphi_n(h\,d\sigma_n)$, $\psi_n^*=\varphi_n^*(h\,d\sigma_n)$. Podemos suponer que el polinomio Q de las hipótesis del teorema no se anula en U pues tales ceros no influyen en la acotación de $|Q|h^{\pm 1}$ en $[0,2\pi]$. Por tanto, las funciones $Q\psi_n^*/\varphi_n^*$ son analíticas y nunca se anulan en U. Por lo que, utilizando la fórmula de Poisson,

$$\log\left|\frac{Q\psi_n^*}{\varphi_n^*}(z)\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\frac{Q\psi_n^*}{\varphi_n^*}(e^{it})\right|^2 P(z,e^{it})\,dt.$$

Usando la desigualdad de Jensen, se obtiene

$$\left|\frac{Q\psi_n^*}{\varphi_n^*}(z)\right|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{Q\psi_n^*}{\varphi_n^*}(e^{it})\right|^2 P(z,e^{it})\,dt.$$

Como $|\varphi_n(e^{it})| = |\varphi_n^*(e^{it})|$ y $|\psi_n(e^{it})| = |\psi_n^*(e^{it})|$, gracias a (16), obtenemos

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{Q\psi_n^*}{\varphi_n^*}(z)\right|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h^{-1}(e^{it})\,|Q(e^{it})|^2\,P(z,e^{it})\,dt, \tag{22}$$

lo que, a su vez, implica que $\{\psi_n^*/\varphi_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$, está uniformemente acotada en subconjuntos compactos de U (recordemos que Q no tiene ceros en U). Consideremos ahora una subsucesión arbitraria $\Lambda\subset\mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{n\in\Lambda}\frac{\psi_n^*}{\varphi_n^*}(z) = S_\Lambda(z),$$

uniformemente en subconjuntos compactos de U. En virtud de lo que fue dicho anteriormente es suficiente probar que para cualquier tal subsucesión Λ se tiene $S^*\equiv S_\Lambda$.

Sea $r\in(0,1)$ arbitrario. Usando (16) una vez más, obtenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |(QS_\Lambda)(re^{it})|^2\,dt = \lim_{n\in\Lambda}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{Q\psi_n^*}{\varphi_n^*}(re^{it})\right|^2 dt$$
$$\le \lim_{n\in\Lambda}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{Q\psi_n^*}{\varphi_n^*}(e^{it})\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h^{-1}(t)|Q(e^{it})|^2\,dt.$$

Así, $QS_\Lambda\in\mathbb{H}_2$ y el límite $\lim_{r\to1}(QS_\Lambda)(re^{it})$ existe en casi todo punto $t\in[0,2\pi]$. Por otra parte, de acuerdo con (22), para cada $z=e^{i\theta}$, $\theta\in[0,2\pi]$ fijo, tenemos

$$|(QS_\Lambda)(rz)|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h^{-1}(t)\,|Q(e^{it})|^2\,P(rz,e^{it})\,dt.$$

Es bien sabido que el límite del segundo miembro de esta desigualdad existe, cuando $r\to1$, para casi todo $z=e^{i\theta}$, $\theta\in[0,2\pi]$. Por tanto, tomando dicho límite en ambos miembros y aplicando el teorema de Fatou (véase, por ejemplo, el capítulo 11 de [Ru]), se obtiene que $|S_\Lambda(z)|^2\le h^{-1}(\theta)$ en casi todo punto de $[0,2\pi]$.

Probemos ahora que la desigualdad contraria también se verifica en casi todo punto. De hecho, razonando de la misma manera que antes, obtenemos

$$\log\left|\frac{Q\varphi_n^*}{\psi_n^*}(z)\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\frac{Q\varphi_n^*}{\psi_n^*}(e^{it})\right|^2 P(z,e^{it})\,dt,$$

lo cual, con la ayuda de la desigualdad de Jensen y (17) implica

$$|(QS_\Lambda^{-1})(rz)|^2 = \lim_{n\in\Lambda} \left|\frac{Q\varphi_n^*}{\psi_n^*}(rz)\right|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\,|Q(e^{it})|^2\,P(rz,e^{it})\,dt,$$

donde z es arbitrario. Tomando límites cuando $r \to 1$, obtenemos $|S_\Lambda^{-1}(z)|^2 \leq h(\theta)$ en casi todo $\theta \in [0,2\pi]$. Esto, junto con la desigualdad anterior, da $|S_\Lambda(z)|^2 = h^{-1}(\theta)$ en casi todo $\theta \in [0,2\pi]$. Más aún, S_Λ^{-1} además de S_Λ pertenecen a $\mathbb{H}_2$ por lo que $\log S_\Lambda$ pertenece a $\mathbb{H}_1$ y se tiene, utilizando (3)

$$\begin{aligned}\log|S_\Lambda(z)| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|S_\Lambda(e^{it})|\,P(z,e^{it})\,dt\\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \log h^{-1}(t)\,P(z,e^{it})\,dt = \log|S^*(z)|,\end{aligned}$$

lo cual implica que S_Λ y S^* son iguales salvo un factor de módulo 1, pero $S^*(0) > 0$ y

$$S_\Lambda(0) = \lim_{n\in\Lambda} \frac{\alpha_{n,n}(h\,d\sigma_n)}{\alpha_{n,n}(d\sigma_n)} \geq 0.$$

Por tanto $S_\Lambda(z) \equiv S^*(z)$. □

Como consecuencia casi directa de los resultados anteriores, se puede demostrar un teorema de convergencia relativa para polinomios ortogonales con respecto a medidas cuyo soporte sea un intervalo real.

Teorema 3.2. *Sea $(\{d\mu_n\},\{w_{2n}\},2k)$ fuertemente admisible en $[-1,1]$ para todo $k\in\mathbb{Z}$. Sea h una función medible Borel en $[-1,1]$ que verifica*

1. *Existe un polinomio $Q \not\equiv 0$ tal que $|Q(x)|h^{\pm1}(x)$ está acotada en $[-1,1]$.*
2. *$h \geq 0$ en $[-1,1]$.*
3. *$(\{hd\mu_n\},\{w_{2n}\},2k)$ es fuertemente admisible en $[-1,1]$ para todo $k\in\mathbb{Z}$.*

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l_{n,n+k}(h\,d\tau_n)}{l_{n,n+k}(d\tau_n)}(x) = S(h^*(\theta)|\operatorname{sen}\theta|;\Psi(x)),$$

donde el límite es uniforme en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ y $h^*(\theta) = h(\cos\theta)$.

Demostración. Consideramos la función h^* definida en $[0,2\pi]$ mediante $h^*(\theta) = h(\cos\theta)$. Como en el teorema anterior, hagamos $k=0$ (el caso k arbitrario es análogo) y pongamos

$$\begin{aligned}\varphi_n &= \varphi_{2n,2n}(d\sigma_{2n}), &\quad \varphi_n^* &= \varphi_{2n,2n}^*(d\sigma_{2n}),\\ \psi_n &= \varphi_{2n,2n}(h^*d\sigma_{2n}), &\quad \psi_n^* &= \varphi_{2n,2n}^*(h^*d\sigma_{2n}).\end{aligned}$$

Denotemos, por último, a los polinomios mónicos asociados a ψ_n y φ_n por Φ_n y $\tilde{\Phi}_n$, respectivamente.

Debido a la relación (14) (aplicada a $l_{n,n}(h\,d\tau_n)$ y $l_{n,n}(d\tau_n)$) y siendo $z = \Psi(x)$, tenemos

$$\frac{l_{n,n}(h\,d\tau_n)}{l_{n,n}(d\tau_n)}(x) = \frac{\psi_n(z) + \psi_n^*(z)}{\varphi_n(z) + \varphi_n^*(z)}\,\frac{\sqrt{1+\Phi_n(0)}}{\sqrt{1+\tilde{\Phi}_n(0)}}$$

$$= \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)}\,\frac{1 + \frac{\psi_n^*(z)}{\psi_n(z)}}{1 + \frac{\varphi_n^*(z)}{\varphi_n(z)}}\,\frac{\sqrt{1+\Phi_n(0)}}{\sqrt{1+\tilde{\Phi}_n(0)}}, \quad x \notin [-1,1].$$

Y ahora el resultado se deduce del teorema 3.1, teniendo en cuenta (8) y (12). $\square$

Referencias

[Ca] B. de la Calle Ysern y G. López Lagomasino, Weak convergence of varying measures and Hermite-Padé orthogonal polynomials, *Constr. Approx.* **15** (1999), 553–575.

[Du] P. L. Duren, *Theory of H^p spaces*, Pure and Applied Mathematics **38**, Academic Press, Nueva York, 1970.

[Fr] G. Freud, *Orthogonal polynomials*, Pergamon Press, Nueva York, 1971.

[Go] A. A. Gonchar, On convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions, *Math. USSR-Sb.* **26** (1975), 555–575.

[Ko] P. Koosis, *Introduction to H_p spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[Lo87] G. López Lagomasino, On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials and the convergence of multipoint Padé approximants, *Math. USSR-Sb.* **56** (1987), 207–219.

[Lo88] G. López Lagomasino, Convergence of Padé approximants of Stieltjes type meromorphic functions and comparative asymptotics for orthogonal polynomials, *Math. USSR-Sb.* **64** (1989), 207–227.

[Lo89] G. López Lagomasino, Asymptotics of polynomials orthogonal with respect to varying measures, *Constr. Approx.* **5** (1989), 199–219.

[Lo90] G. López Lagomasino, Relative asymptotics for polynomials orthogonal on the real axis, *Math. USSR-Sb.* **65** (1990), 505–529.

[Ma84] A. Máté, P. Nevai y V. Totik, What is beyond Szegő theory of orthogonal polynomials, en *Rational approximation and interpolation* (Tampa, Fla., 1983, P. R. Graves-Morris, E. B. Saff y R. S. Varga, eds.), Lect. Notes in Math. **1105**, Springer, Berlín (1984), 502–510.

[Ma85] A. Máté, P. Nevai y V. Totik, Asymptotics for the ratio of leading coefficients of orthogonal polynomials, *Constr. Approx.* **1** (1985), 63–69.

[Ma87] A. Máté, P. Nevai y V. Totik, Extensions of Szegő's theory of orthogonal polynomials, II, III, *Constr. Approx.* **3** (1987), 51–72; 73–96.

[Ne] P. Nevai, *Orthogonal polynomials*, Mem. Amer. Math. Soc. **213**, Providence, RI, 1979.

[Ni] E. M. Nikishin y V. N. Sorokin, *Rational approximation and orthogonality*, Translations of Mathematical Monographs **92**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[Ra] E. A. Rakhmanov, On asymptotic properties of polynomials orthogonal on the circle with weights not satisfying Szegő's condition, *Math. USSR-Sb.* **58** (1987), 149–167.

[Ru] W. Rudin, *Análisis real y complejo*, Alhambra, Madrid, 1985.

[Sz] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4.ª edición, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.

[Va] W. Van Assche, *Analytic aspects of orthogonal polynomials*, Katholieke Universiteit Leuven, manuscrito, 1993.

Dpto. de Matemática Aplicada, E. T. S. de Ingenieros Industriales, Universidad Politécnica de Madrid, José G. Abascal 2, 28006 Madrid, España

Correo electrónico: `bcalle@math.etsii.upm.es`

Dpto. de Matemáticas, Escuela Politécnica Superior, Universidad Carlos III de Madrid, Universidad 30, 28911 Leganés, España

Correo electrónico: `lago@math.uc3m.es`