MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

PROBLEMA DE MOMENTOS DE STIELTJES Y CONVERGENCIA DE APROXIMANTES DE PADÉ PARA FUNCIONES MEROMORFAS DE STIELTJES

MANUEL BELLO HERNÁNDEZ

A mi entrañable amigo Chicho

ABSTRACT. We obtain a result on convergence of Padé approximants for meromorphic functions of Stieltjes type. Connection of Padé approximants with Stieltjes moment problem plays a key role in the proof.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se obtiene un resultado sobre convergencia de aproximantes de Padé para funciones meromorfas de Stieltjes, en la demostración juega un papel fundamental la relación entre los aproximantes de Padé y el problema de momentos de Stieltjes. Este resultado se lo presenté a Chicho buscando ideas que me dieran la luz necesaria para ver la solución completa. Hoy no está Chicho y el problema aún no está totalmente resuelto; su afirmación «eso está bien» me anima a exponerlo.

Denotemos por $\mathcal{M}$ la clase de medidas positivas, regulares, de Borel, con soporte incluido en $\mathbb{R}$ y con momentos de todos los ordenes (si $\mu \in \mathcal{M}$, entonces para todo $k \in \mathbb{Z}_+$, x^k es integrable en el sentido Lebesgue respecto a μ). Sea $\mathcal{M}[0,\infty) = \{\mu \in \mathcal{M} : \operatorname{sop}\mu \subset [0,\infty)\}$, donde $\operatorname{sop}\mu$ denota el soporte de μ. Se dice que el problema de momentos de Stieltjes para $\mu \in \mathcal{M}[0,\infty)$ está determinado, o simplificadamente μ es determinada-S, si no existe otra medida en $\mathcal{M}[0,\infty)$ con los mismos momentos que μ, en caso contrario se dice que μ es indeterminada-S. De forma análoga se define el problema de momentos (en este caso de Hamburger) en $\mathcal{M}$, con la notación correspondiente: μ es determinada-H o indeterminada-H.

Los problemas de momentos se relacionan con muchos temas de las Matemáticas tales como: teoría de funciones armónicas y analíticas, teoría espectral de operadores, teoría de la predicción, aproximación racional, polinomios ortogonales, procesamiento de señales, etc. (ver [1], [6], la bibliografía que allí se cita y también las secciones 2 y 3 de este trabajo). Stieltjes ([16]) fue el primero que utilizó el término problema de momentos. Numerosos autores han estudiado este tema y en las citas anteriores se pueden ver los resultados fundamentales. Algunas extensiones e ideas modernas en el tratamiento de este problema se pueden ver en [13].

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 41A21, 42C05, 44A60.
Key words and phrases. Padé approximants, moment problem, orthogonal polynomials.
La investigación está subvencionada por el proyecto BFM2000-0206-C04-03 de la DGI.

Dado un desarrollo formal de Laurent en $z = \infty$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}, \tag{1}$$

el aproximante de Padé, $\pi_n = \pi_n(f)$, de orden $n \in \mathbb{Z}_+$, para f, se define como el cociente $\pi_n = \frac{p_n}{q_n}$ de un par de polinomios cualquiera (p_n, q_n) que cumple:

(a): $\deg(p_n) \leq n, \quad \deg(q_n) \leq n, \quad q_n \not\equiv 0;$
(b): $q_n(z)f(z) - p_n(z) = \frac{C}{z^{n+1}} + \cdots.$

Los polinomios p_n y q_n que cumplen lo anterior no son únicos, sin embargo la fracción π_n si está completamente determinada.

Para $\mu \in \mathcal{M}[0, \infty)$, denotemos por

$$\widehat{\mu}(z) = \int \frac{d\mu(x)}{z - x}, \quad z \in \mathbb{C} \backslash [0, \infty),$$

la transformada de Markov de μ.

El teorema fundamental de este trabajo es

Teorema 1. *Sea μ determinada-S cuyo soporte no es un conjunto numerable sin puntos de acumulación en $[0, \infty)$. Sea r una fracción racional con coeficientes reales, con polos en $\mathbb{C} \backslash [0, \infty)$ y $r(\infty) = 0$. Entonces*

$$\lim_{n \to \infty} \pi_n(\widehat{\mu} + r)(z) = \widehat{\mu}(z) + r(z),$$

uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{D} = \mathbb{C} \backslash ([0, \infty) \cup \{r = \infty\})$. Cada polo de r atrae tantos polos de π_n como la multiplicidad del polo.

La organización de este trabajo es la siguiente: en la Sección 2 formulamos algunos resultados sobre los problemas de momentos que utilizaremos más adelante. La Sección 3 está dedicada a los aproximantes de Padé, el objetivo fundamental de está sección es revelar el interés del Teorema 1 y sus diferencias con respecto a resultados anteriores del tema. Finalmente en la Sección 4 damos la demostración del Teorema 1.

2. Problema de momentos

Sea $\mu \in \mathcal{M}$ con infinitos puntos en su soporte, denotemos por $\{l_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ y $\{L_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ las correspondientes sucesiones de polinomios ortonormales con respecto a μ, con coeficiente principal positivo y mónicos respectivamente. Sea α_k el coeficiente principal de l_k. Los polinomios ortogonales están determinados completamente por los momentos de la medida, luego dos medidas con iguales momentos generan la misma familia de polinomios ortogonales. Si la medida μ tiene solamente una cantidad finita de puntos en su soporte, por ejemplo m, entonces $l_k = l_m$ para todo $k \geq m$.

Es bien conocido que los polinomios l_k satisfacen las relaciones de recurrencia a tres términos:

$$\begin{aligned} xl_k(x) &= d_k l_{k+1}(x) + e_k l_k(x) + d_{k-1} l_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \ldots, \\ xl_0(x) &= e_0 l_0(x) + d_0 l_1(x), \end{aligned} \tag{2}$$

donde $d_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}$ y $e_k = \int x\, l_k^2(x)\, d\mu(x)$, $k = 0, 1, \ldots$. Las relaciones en (2), junto con la condición inicial, tienen asociada la matriz simétrica infinita (matriz de Jacobi)

$$\begin{pmatrix} e_0 & d_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ d_0 & e_1 & d_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & d_1 & e_2 & d_3 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}; \tag{3}$$

esto establece un nexo entre la teoría de polinomios ortogonales (también entre los problemas de momentos) y la teoría espectral de operadores.

Sea $\{s_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ la sucesión de polinomios soluciones de las relaciones de recurrencia (2) con las condiciones iniciales

$$s_0(x) = 0, \quad s_1(x) = \frac{1}{d_0}.$$

Esta familia es linealmente independiente con $\{l_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ y junto con ella genera todas las sucesiones de polinomios soluciones de (2).

Dadas $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ es obvio que la relación «*$\mu \sim \nu$ si los momentos de estas medidas coinciden*» define una relación de equivalencia. Además, la clase $[\mu]$, formada por todas las medidas equivalentes con μ, es un conjunto compacto en $\mathcal{M}$ con la topología $*$-débil (ver [4] para los detalles). La clase de Nevalinna $\mathcal{N}$ está formada por las funciones analíticas en $\Im z > 0$, que transforman este conjunto en $\Im w \geq 0$.

Es obvio que si $\mu \in \mathcal{M}[0, \infty)$ es determinada-H, entonces es determinada-S. Además, se cumple:

Lema 2. *Si μ es determinada-S e indeterminada-H, entonces μ es una medida con soporte contable sin puntos de acumulación en $[0, \infty)$.*

Demostración. Junto con la demostración introducimos algunas notaciones y definiciones. Si μ es indeterminada-H es conocido (ver [1], pág. 92) que

$$A(z) = z \sum_{k=0}^{\infty} s_k(0) s_k(z), \qquad B(z) = -1 + z \sum_{k=0}^{\infty} s_k(0) l_k(z),$$

$$C(z) = 1 + z \sum_{k=0}^{\infty} l_k(0) s_k(z), \qquad D(z) = z \sum_{k=0}^{\infty} l_k(0) l_k(z),$$

representan funciones enteras; además:

$$A(z)D(z) - B(z)C(z) = 1.$$

Si $f \in \mathcal{N}$, entonces existen constantes $a \geq 0$ y $b \in \mathbb{R}$ y $\nu \in \mathcal{M}$ tales que

$$f(z) = az + b + \int \frac{1 + zx}{x - z}\, d\nu(x).$$

También

$$\int \frac{d\nu(x)}{z - x} = \frac{A(z)\varphi(z) - C(z)}{B(z)\varphi(z) - D(z)}, \quad \varphi \in \mathcal{N} \cup \{\infty\},\ \nu \in \mathcal{M},$$

establece una correspondencia uno a uno entre $\mathcal{N} \cup \{\infty\}$ y $\mathcal{M}$, identificando las medidas con iguales momentos (ver pág. 98 en [1]). Las medidas asociadas a las funciones $\varphi(z) \equiv b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ se le llaman $\mathcal{N}$-extremales.

En particular, en la clase de la medida μ, hallemos la medida $\mathcal{N}$-extremal que tiene soporte en $[0, \infty)$. Esta es única porque μ es determinada-S. En efecto, cuando $\varphi(z) \equiv 0$, la medida $\mu_0 \in \mathcal{M}$ tal que

$$\int \frac{d\mu_0(x)}{z - x} = \frac{C(z)}{D(z)}, \tag{4}$$

tiene que ser una medida discreta con puntos de masa en los ceros de D (al ser D analítica tiene a lo más un conjunto numerable de ceros sin puntos de acumulación en $\mathbb{C}$), además se sabe que todos los ceros de l_k están en $(0, \infty)$, de modo que $(-1)^k l_k(x) < 0$, cuando $x \leq 0$. Luego $D(x) < 0$ para $x < 0$ y sus ceros están en $[0, \infty)$ (observar que la parte izquierda de (4) es analítica en $\mathbb{C} \backslash [0, \infty)$). Por tanto

$$\mu_0 = \sum_{\xi : D(\xi) = 0} \rho(\xi) \delta_\xi,$$

siendo el conjunto de ceros de D un conjunto discreto que contiene a 0 y está incluido en $[0, \infty)$, $\rho(\xi) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} l_k(\xi)^2}$. □

Del principio de identidad para funciones analíticas y de la definición de medida $\mathcal{N}$-extremal se obtiene fácilmente que:

Lema 3 (ver [1], pág. 114)**.** *Todas las medidas $\mathcal{N}$-extremales son discretas.*

Lema 4 (Riesz, ver [1], pág. 43)**.** *Si μ es determinada-H, entonces los polinomios son densos en $L^2(\mu)$. Si μ es indeterminada-H, entonces los polinomios son densos en $L^2(\mu)$ si y sólo si μ es $\mathcal{N}$-extremal.*

Lema 5 (ver Teorema 3.3 en [5])**.** *Sea μ determinada-H, no discreta y $a \in \mathbb{C}$. Entonces son equivalentes:*

- **1.:** *El espacio de los polinomios es denso en $L^2(|x - a|^{2k} d\mu)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*
- **2.:** *$|x - a|^{2k} d\mu$ es determinada-H para todo $k \in \mathbb{N}$.*
- **3.:** *Cualquiera sea la función ϕ medible y acotada por un polinomio, el espacio de los polinomios es denso en $L^2(\phi\, d\mu)$.*

En la demostración del Teorema 1 juega un papel fundamental el resultado siguiente:

Corolario 6. *Si μ es determinada-S y no tiene soporte contable sin puntos de acumulación en $[0, \infty)$, entonces para todo $p \geq 0$ en $[0, \infty)$, la medida $p\, d\mu$ es determinada-S.*

Demostración. Si μ es determinada-S y no tiene soporte contable, entonces, según el Lema 2, μ es determinada-H.

Por otra parte $|p| \leq 1 + p^2$, luego, por **3.** en el Lema 5, los polinomios son densos en $L^2(|p|\, d\mu)$. Por el Lema 4, $|p|\, d\mu$ es determinada-H o es $\mathcal{N}$-extremal. Lo último no es posible porque tendría que ser discreta (ver Lema 3). Luego $|p|\, d\mu$ es determinada-H y por consiguiente $p\, d\mu$ es determinada-S. □

3. Aproximantes de Padé

Asociado al desarrollo formal de Laurent (1) sea $\Lambda : \mathbb{C}(z) \to \mathbb{C}$ tal que $\Lambda(z^k) = a_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, y definido linealmente sobre $\mathbb{C}(z)$ (el espacio de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{C}$). Entonces de la relación **(b)**, que define a los aproximantes de Padé, no es difícil observar que los denominadores y numeradores de $\pi_n(f) = \frac{p_n}{q_n}$ satisfacen las relaciones:

$$\Lambda(z^j q_n) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{5}$$

$$p_n(z) = \Lambda_t\Big(\frac{q_n(z) - q_n(t)}{z - t}\Big). \tag{6}$$

En la última expresión el subíndice t significa que Λ actúa sobre el polinomio $\frac{q_n(z)-q_n(t)}{z-t}$ considerado como función de t.

Dados $\mu \in \mathcal{M}[0,\infty)$ y r una fracción racional con polos en $\mathbb{C}\backslash[0,\infty)$, $r(\infty) = 0$, sea

$$f(z) = \widehat{\mu}(z) + r(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{z^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{z^{k+1}}.$$

La primera serie en la segunda igualdad converge uniformemente a $\widehat{\mu}$ en cada conjunto de la forma $\{z : 0 < \alpha \leq \arg(z) \leq 2\pi - \alpha,\ |z| \geq \epsilon > 0\}$. La fórmula (5) toma la forma

$$\int x^j q_n(x)\, d\mu(x) + \sum_{i=1}^{l} \sum_{k=1}^{m_i} A_{i,k}\ (q_n(x)x^j)^{(k-1)}\Big|_{x=z_i} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{7}$$

si $r(z) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{A_{i,k}}{(k-1)!} \frac{1}{z-z_i}$. Debido a que $\pi_n(f) = f$ si $\mathrm{sop}(\mu)$ tiene un número finito de puntos, asumiremos que $\mathrm{sop}(\mu)$ es un conjunto infinito.

Los aproximantes de Padé tienen mucha utilidad cuando la función aproximada tiene singularidades. Un principio para los aproximantes de Padé es que los polos del aproximante convergen a las singularidades de la función aproximada y en la región de analiticidad de la función los aproximantes convergen a ella. Este principio ha sido comprobado en situaciones generales. En este sentido se debe mencionar el Teorema de Montessú de Ballore (ver [8] o [10]), que vale para las filas de la tabla de aproximantes de Padé (cuando se fija el grado del denominador y la sucesión se considera variando el grado del numerador). Cuando se considera la diagonal los teoremas más generales son:

Teorema 7 (ver [9]). *Sea G una región (abierto y conexo) tal que $\infty \in G$, $G = \tilde{G}\backslash E$, donde $\tilde{G}$ es una región, siendo $E \subset \tilde{G}$ relativamente compacto respecto a $\tilde{G}$, $\mathrm{cap}(E) = 0$ ($\mathrm{cap}(\cdot)$ representa la capacidad logarítmica) y $\partial\tilde{G}$ (frontera de $\tilde{G}$) está contenido en la frontera del complemento de la envoltura convexa de $\partial\tilde{G}$. Sea $\pi_n(f)$ el aproximante de Padé de orden n para (1) en $z = \infty$. Si dado un compacto cualquiera $K \subset G$, existe un $N = N(K) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ se cumple que $\pi_n(f)$ no tiene polos en K, entonces π_n converge uniformemente en cada compacto de G y la función límite tiene por desarrollo de Laurent en $z = \infty$ a (1).*

Teorema 8 (ver [8])**.** *Sea μ una medida positiva de Borel en $[-1,1]$ y finita, tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)} = \varphi(z),$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ (una condición suficiente para que esto se cumpla es que $\mu' > 0$ a.e.), donde $\varphi(z) = z + \sqrt{z^2-1}$ (la transformación conforme de $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ en $\{z : |z| > 1\}$, $\varphi(\infty) = \infty$, $\varphi'(\infty) > 0$). Sea r una fracción racional con coeficientes complejos y polos en $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$. Entonces:

1.: *Para n suficientemente grande el número de polos de $\pi_n = \pi_n(\widehat{\mu} + r)$ en $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ coincide con el número de polos de r. Los polos de r atraen a los polos de π_n en cantidad igual a su multiplicidad.*

2.: *Si K es un compacto de $\mathbb{C}\backslash([-1,1] \cup \{r = \infty\})$, entonces*

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\sup_{z\in K} |f(z) - \pi_n(z)| \right)^{1/n} \leq \frac{1}{\rho(K)} < 1$$

donde $\rho(K) = \inf\{|\varphi(z)| : z \in K\}$ y $f(z) = \widehat{\mu}(z) + r(z)$.

El teorema anterior es en lo esencial una consecuencia del Teorema 7 (lo referente al comportamiento de los polos escapa al Teorema 7), porque se puede tomar como región $\tilde{G} = \overline{\mathbb{C}}\backslash[-1,1]$ y E igual al conjunto formado por los polos de r.

Rakhmanov ([14]) extendió el Teorema 8 (lo referente a la convergencia) a cuando la medida tiene soporte compacto en $\mathbb{R}$ y la función r tiene coeficientes reales. Además, él observó que el teorema anterior no es cierto cuando la fracción racional r no tiene sus coeficientes en $\mathbb{R}$ (sus polos no son simétricos respecto al eje real) y la medida tiene soporte formado por dos intervalos en $\mathbb{R}$. Una extensión del Teorema de Rakhmanov es:

Teorema 9 (ver[12])**.** *Sea $\mu \in \mathcal{M}[0,\infty)$. Sea $r = \frac{u_d}{t_d}$ una fracción racional con coeficientes reales, polos en $\mathbb{C}\backslash[0,\infty)$ y $r(\infty) = 0$. Se supone que* $\mathrm{grad}(t_d) = d$ *y que para cada polinomio l, con* $\deg(l) \leq d$*, la medida $l\, t_d\, d\mu$ es determinada-S. Entonces:*

1.: *Para n suficientemente grande* $\deg q_n = n$*. Para tales n el número de polos de $\pi_n = \pi_n(\widehat{\mu} + r)$ en $\mathbb{C}\backslash[0,\infty)$ coincide con el numero de polos de r. Los polos de r atraen a los polos de π_n en cantidad igual a su multiplicidad.*

2.: *π_n converge uniformemente a $\hat{\mu} + r$ en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$.*

Una condición suficiente para que se cumplan las hipótesis del Teorema 9 es que los momentos de la medida μ satisfagan la condición de Carlemann (ver [11]).

El Teorema 1 continúa en la línea de observar que ocurre con los aproximantes de Padé en presencia de singularidades de la función aproximada y ofrece una condición suficiente para la convergencia de los aproximantes de Padé más fácil de observar que la formulada en el Teorema 9. Al estar $\mathrm{sop}\,\mu \subset [0,\infty)$ y la interpolación realizarse en $z = \infty$, en general, no se puede aplicar el Teorema 7 en este caso.

4. Demostración del Teorema 1

Las ideas de la demostración siguen fundamentalmente técnicas desarrolladas en los trabajos [7], [12] y [14].

Demostración. Sea $r = \frac{u_d}{t_d}$, irreducible y $d = \operatorname{grad}(t_d)$. La fracción r tiene los polos en $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ y sus coeficientes reales, luego podemos asumir sin perdida de generalidad que $t_d > 0$ en $[0,\infty)$. Sea $f = \widehat{\mu} + r$.

Hagamos la demostración en varias etapas:

Paso 1. Comprobemos que

$$\int x^k\, q_n(x)\, t_d(x)\, d\mu(x) = 0, \quad k = 0, \dots n-d-1, \tag{8}$$

y

$$f(z) - \pi_n(z) = \int \frac{h(x)q_n(x)t_d(x)}{h(z)q_n(z)t_d(z)} \frac{d\mu(x)}{z-x}, \tag{9}$$

donde h es un polinomio cualquiera, $\operatorname{grad} h \le n-d$.

En efecto, la condición **(b)** de la definición de aproximante de Padé nos lleva a la relación:

$$q_n(z)t_d(z)\widehat{\mu}(z) + q_n(z)u_d(z) - p_n(z)t_d(z) = \frac{C}{z^{n-d+1}} + \cdots .$$

Asumimos en lo que sigue que $n > d$. Igualando los correspondientes coeficientes a cero (procediendo como se obtienen (5) y (6) a partir de la definición de aproximante de Padé), nos queda (8) y

$$\int \frac{q_n(z)t_d(z) - q_n(x)t_d(x)}{z-x}\, d\mu(x) + q_n(z)u_d(z) - p_n(z)t_d(z) = 0,$$

luego

$$f(z) - \pi_n(z) = \int \frac{q_n(x)t_d(x)}{q_n(z)t_d(z)} \frac{d\mu(x)}{z-x}.$$

De esta relación y de la ortogonalidad (8), se obtiene la fórmula para el resto (9).

Paso 2. Veamos una fórmula alternativa para el resto (diferencia entre el aproximante y la función aproximada) y algunas consideraciones sobre los polos del aproximante.

La condición de ortogonalidad (8), unida a las consideraciones sobre t_d, nos lleva a que q_n tiene al menos $n-d$ ceros en $(0,\infty)$ donde hay cambios de signo. Sean $\{x_{n,k} : k = 1, \dots, n\}$ los ceros de q_n, ordenados de modo que $x_{n,k}$, $k = 1, \dots, n-d_n$ ($d_n < d$) son los puntos en $(0,\infty)$ donde q_n cambia de signo. Sea $q_n(z) = q_{n,1}(z)q_{n,2}(z)$, donde $q_{n,1}$ se anula en $x_{n,k}$, $k = 1, \dots, n-d_n$ y los polinomios $q_{n,2}$ no cambian de signo en $(0,\infty)$. Sea $d\mu_n = q_{n,2}(x)t_d(x)\, d\mu(x)$. Consideremos

$$p_{n,1}(z) = \int \frac{q_{n,1}(z) - q_{n,1}(x)}{z-x}\, d\mu_n(x).$$

La ecuación (9) se reescribe (utilizamos la condición **(b)** de la definición de aproximante de Padé y que $\deg(q_{n,2}) \le d_n$)

$$q_{n,2}(z)t_d(z)(f(z) - \pi_n(z)) = \int \frac{d\mu_n(x)}{z-x} - \frac{p_{n,1}(z)}{q_{n,1}(z)} = \frac{C}{z^{2n-(d+d_n)}} + \cdots . \tag{10}$$

Si $\lambda_{n,k} = \int \frac{q_{n,1}(x)\, d\mu_n(x)}{q'_{n,1}(x_{n,k})(x-x_{n,k})}$, entonces

$$\frac{p_{n,1}(z)}{q_{n,1}(z)} = \sum_{j=1}^{n-d_n} \frac{\lambda_{n,j}}{z-x_{n,j}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} \sum_{j=1}^{n-d_n} \lambda_{n,j} x_{n,j}^k,$$
$$\int \frac{d\mu_n(x)}{z-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_{n,k}}{z^{k+1}},$$

donde $s_{n,k} = \int x^k\, d\mu_n$. Comparando las últimas dos ecuaciones con (10) obtenemos que si $n > d$, entonces para todo polinomio P de grado $< 2n - (d + d_n)$ se cumple

$$\int P\, d\mu_n = \sum_{k=1}^{n-d_n} \lambda_{n,k} P(x_{n,k}) = \Omega_n(P). \tag{11}$$

De esta ecuación, de la definición de $\lambda_{n,k}$ y de las condiciones de ortogonalidad (8) se obtiene que al menos $n - \frac{d+d_n}{2}$ coeficientes $\lambda_{n,k}$ son positivos.

Paso 3. Introduzcamos algunas notaciones auxiliares. Sea $\psi_n(z) = \prod(z - x_{n,k})^2$, donde el producto se toma en los índices k tales que $\lambda_{n,k} < 0$. Sea B_n el producto de todos los ceros de $q_{n,2}$ y de ψ_n cuyo módulo es mayor que $\max\{1, 2R\} = M$, donde $R = 2 \max\{|z| : t_d(z) = 0\}$.

Sea $f_n = B_n^{-1} \psi_n(x) q_{n,2}(z) t_d(z)(f(z) - \pi_n(z))$. Obviamente

$$f_n(z) = B_n^{-1} \left[\int \frac{\psi(x) d\mu_n(x)}{z-x} - \Omega_n \left(\frac{\psi_n(x)}{z-x} \right) \right]. \tag{12}$$

Como

$$\frac{1}{z-x} - \frac{\psi_n(x)}{\psi_n(z)} \frac{1}{z-x} = \frac{\psi_n(z) - \psi_n(x)}{(z-x)\psi_n(z)} = K_n(x; z)$$

es un polinomio en x de grado $< d_n$, utilizando la formula (11), obtenemos

$$\begin{aligned} f_n(z) &= B_n^{-1} \psi_n(z) \left[\int \left((z-x)^{-1} - K_n(x;z) \right) d\mu_n(x) - \Omega_n \left((z-x)^{-1} - K_n(x;z) \right) \right] \\ &= B_n^{-1} \int \left(\frac{\psi_n(x)}{z-x} \right) d\mu_n(x) - \Omega_n \left(\frac{\psi_n(x)}{z-x} \right). \end{aligned}$$

Paso 4. Demostremos que la sucesión $\{f_n : n \in \mathbb{N}, n > d\}$ es normal en $\mathbb{D}$ (está uniformemente acotada sobre cada compacto de dicho conjunto).

En efecto, si $K \subset \mathbb{D}$ es un compacto, entonces

$$\begin{aligned} |f_n(z)| &\le |B_n|^{-1} \int \left(\frac{\psi_n(x)}{|z-x|} \right) d\mu_n(x) + \Omega_n \left(\frac{\psi_n(x)}{|z-x|} \right) \\ &\le 2|B_n|^{-1} d^{-1}(K, [0,\infty)) \int \psi_n(x)\, d\mu_n(x) = 2C d^{-1}(K, [0, \infty)), \end{aligned}$$

donde $d(K, [0, \infty))$ es la distancia del compacto K a $[0, \infty)$, mientras que $C = \int (x + M)^2\, d\mu(x)$.

Paso 5. Demostremos que $\{f_n : n > d\}$ converge uniformemente a 0 en $\mathbb{D}$.

Según lo demostrado en el *Paso 4* y el Teorema de Montel, basta observar que cada subsucesión convergente en $\mathbb{D}$ converge puntual a 0. Sea $\{f_n : n \in \Upsilon\}$ convergente en $\mathbb{D}$.

Debido a que los coeficientes de los polinomios $B_n^{-1}\psi_n(x)q_{n,2}(x)$ están acotados, existe una subsucesión de Υ, Υ', tal que $\lim_{n\in\Upsilon'} B_n^{-1}\psi_n(x)q_{n,2}(z)$ existe. Sea p su límite.

Entonces utilizando (11) se obtiene

$$\begin{aligned}\lim_{n\in\Upsilon'} \Omega_n(x^\nu B_n^{-1}\psi_n) &= \lim_{n\in\Upsilon'} \int x^\nu B_n^{-1}\psi_n(x)q_{n,2}(x)t_d(x)\,d\mu(x)\\ &= \int x^\nu p(x)t_d(x)\,d\mu(x).\end{aligned}$$

Bajo las hipótesis del teorema, según el Corolario 6, si μ es determinada-S, entonces $t_d\,p\,d\mu(x)$ es determinada-S para todo polinomio p positivo en $[0,\infty)$. Luego para toda función $g \in C_0([0,\infty))$ se cumple

$$\lim_{n\in\Upsilon'} \Omega_n(g\,B_n^{-1}\psi_n) = \int g(x)\,p(x)\,t_d(x)\,d\mu(x).$$

De (12), junto con la relación anterior para $g(x) = \frac{1}{z-x}$, se sigue que $\{f_n : n > d\}$ converge a 0.

Paso 6. Demostremos que π_n converge en capacidad a f en $\mathbb{D}$.

Sea $L > 0$ cualquiera y K un compacto en $\mathbb{D}_L = \mathbb{D} \cap \{z : |z| < L\}$. Denotemos por $q_{n,L}(z) = \prod_k (z - x_{n,k})$, donde el producto se toma en aquellos ceros de $q_{n,2}$ que están en D_L. De la definición de f_n, se sigue

$$\begin{aligned}f(z) - \pi_n(z) &= B_n f_n(z)(\psi_n(z)q_{n,2}(z)t_d(z))^{-1},\\ |f(z) - \pi_n(z)| &\le A(K)\|f_n\|_K|\psi_n(z)q_{n,L}(z)t_d(z)|^{-1}, \quad z \in K,\end{aligned}$$

donde $A(K) > 0$ es independiente de n y $\|\cdot\|_K$ es la norma del supremo sobre K. Luego

$$\{z \in K : |f(z) - \pi_n(z)| > \epsilon\} \subset \{z \in K : |q_{n,L}(z)t_d(z)| > \epsilon^{-1}A(K)\|f_n\|_K\}.$$

De esta relación y del Teorema de Fekete sobre la capacidad logarítmica de conjuntos de la forma $\{z : |t(z)| \le \epsilon\}$ se sigue que, para todo $\epsilon > 0$,

$$\operatorname{cap}\{z \in K : |f(z) - \pi_n(z)| > \epsilon\} < \left((\epsilon)^{-1}A(K)\|f_n\|_K\right)^{1/2d}.$$

Como la parte derecha de la relación anterior converge a 0, eso quiere decir que $\{\pi_n\}$ converge en capacidad a f en cada compacto de $\mathbb{D}_L$.

Paso 7. El número de polos de π_n en $\mathbb{D}_L$ es menor o igual que d mientras que el número de polos de f es exactamente d. Luego del Lema 1 en [8] (por la convergencia en capacidad demostrada en el *Paso 6*) se sigue que realmente el número de polos de π_n en $\mathbb{D}$ es igual a d para n suficientemente grande. Además, cada polo de f atrae tatos polos de π_n como su multiplicidad. Luego $q_{n,L} = q_{n,2} \to t_d$, $B_n \equiv 1$, $\psi_n \equiv 1$ y la primera conclusión del teorema se obtiene. Por último, de la definición de f_n obtenemos

$$f(z) - \pi_{n,n}(z) = \frac{f_n(z)}{q_{n,2}(z)t_d(z)},$$

conociendo que $\{f_n\}$ converge uniformemente a 0 en compactos de $\mathbb{D}$ y $q_{n,2}$ converge a t_d el teorema queda probado. $\square$

Referencias

[1] N. I. Akhiezer, *The classical moment problem and some related questions in analysis*, Ungar, Nueva York, 1956.

[2] G. A. Baker, *Essential of Padé approximants*, Academic Press, 1975.

[3] G. A. Baker y P. Graves-Morris, *Padé approximants*, tomos I y II, Addison-Wesley, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, V. 13 y 14, 1981.

[4] C. Berg, J. P. R. Christensen y P. Ressel, *Harmonic analysis on semigroup. Theory of positive definite and related functions*, Springer, 1984.

[5] C. Berg y A. J. Durán, The index of determinacy for measures and the l^2-norm of polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 2795–2811.

[6] H. J. Landau, Maximum entropy and the moment problem, *Bull. Amer. Math. Soc.* **16** (1987), 47–77.

[7] A. A. Gonchar, On convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions, *Mat. Sb. (N.S.)* **97(139)** (1975), 607–629. Traducción al inglés: *Math. USSR-Sb.* **26** (1975), 555–575.

[8] A. A. Gonchar, On the convergence of generalized Padé approximants of meromorphic functions, *Mat. Sb. (N.S.)* **98(140)** (1975), 564–577. Traducción al inglés: *Math. USSR-Sb.* **27** (1975), 503–514.

[9] A. A. Gonchar, On uniform convergence of diagonal Padé approximants, *Mat. Sb. (N.S.)* **118(160)** (1982), 535–556. Traducción al inglés: *Math. USSR-Sb.* **46** (1983), 539–559.

[10] G. López y V. V. Vavilov, *Algunas cuestiones de la teoría de la aproximación*, Ciencia y Técnica (en imprenta).

[11] G. López, On the convergence of Padé approximants for meromorphic functions of Stieltjes type, *Mat. Sb. (N.S.)* **111(153)** (1980), 308–316. Traducción al inglés: *Math. USSR-Sb.* **39** (1981), 281–288.

[12] G. López, On the moment problem and the convergence of Padé approximants for meromorphic functions of Stieltjes type, en *Constructive function theory'81* (Varna, 1981), Bulgar. Acad. Sci., Sofía (1983), 419–424.

[13] Y. A. Kasmin, Moment problem, *Encyclopaedia of mathematics*, Kluwer Academic Publisher, M064590 1-8 (versión en CD-ROM).

[14] E. A. Rakhmanov, On the convergence of diagonal Padé approximants, *Mat. Sb. (N.S.)* **104(146)** (1977), 271–291. Traducción al inglés: *Math. USSR-Sb. 33* (1977), 243–260.

[15] M. Riesz, Sur le probleme des moments et le théorème de Parseval correspondant, *Acta Litt. Acad. Sci. Szeged* **1** (1923), 209–225.

[16] T. J. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues, *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **8** (1884), 1–122.

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Edificio Vives, Calle Luis de Ulloa s/n, 26004 Logroño, Spain

Correo electrónico: `mbello@dmc.unirioja.es`