Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 329, 2005 г.

В. В. Макеев

НЕСКОЛЬКО ТЕОРЕМ О ДЕЛЕНИИ НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МАССЫ

§1. Деление массы на плоскости

Хорошо известно, что всякую непрерывно распределенную на плоскости $\mathbb{R}^2$ конечную массу можно разделить на 4 равные части парой взаимно-перпендикулярных прямых [1], а также на 6 равных частей тремя прямыми, проходящими через одну точку [2].

Пусть лучи $\ell_1, \dots, \ell_5$ исходят из некоторой точки $O \in \mathbb{R}^2$, занумерованы в порядке их следования по часовой стрелке и любые два соседних угла из числа образованных ими составляют в сумме угол $\leqslant \pi$. Обозначим через $A_1, \dots, A_5$ части плоскости, на которые ее разбивают лучи $\ell_1, \dots, \ell_5$ (рис. 1).

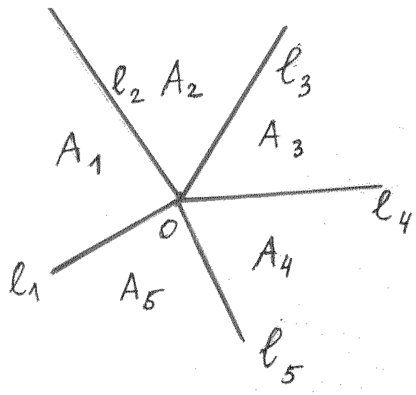


Рис. 1.

Пусть на плоскости непрерывно распределена конечная масса m и пусть $\mathbf{m}(A)$ означает массу подмножества $A \subset \mathbb{R}^2$. Полагаем $m = \mathbf{m}(\mathbb{R}^2)$.

Работа частично поддержана грантом НШ-1914.2003.1.

Теорема 1. *При сделанных предположениях для любого набора положительных чисел $x_1, \ldots, x_5$ со свойством $x_1 + \cdots + x_5 = 1$ найдется аффинное преобразование a плоскости такое, что луч $a(\ell_1)$ имеет заранее заданное направление и $\mathbf{m}(a(A_i)) = x_i m$ для $1 \leqslant i \leqslant 5$.*

Доказательство. Докажем теорему в случае, когда распределение $\mathbf{m}$ имеет гладкую плотность с компактным носителем $\operatorname{supp}(\mathbf{m})$. В остальных случаях теорема получается предельным переходом.

Пусть G – группа сохраняющих ориентацию аффинных преобразований плоскости с единичным определителем. Рассмотрим отображение

$$F : G \to \mathbb{R}^5, \quad g \mapsto \left(\frac{\mathbf{m}(g(A_1))}{m}, \ldots, \frac{\mathbf{m}(g(A_5))}{m}\right).$$

По построению образ $F(G)$ содержится в четырехмерном симплексе

$$\Delta = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_5) \mid x_1 + \cdots + x_5 = 1, x_i \geqslant 0 \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant 5\} \subset \mathbb{R}^5.$$

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_5) \in \Delta$ – точка с положительными координатами. Чтобы не делать обозначения слишком громоздкими, мы не будем различать точку $\mathbf{x}$ и образованное ею одноэлементное множество. Обозначим через S многообразие лучей в $\mathbb{R}^2$ с началом O. (Очевидно, S диффеоморфно окружности.) Введем отображение

$$f_{\mathbf{x}} : F^{-1}(\mathbf{x}) \to S, \quad a \mapsto a(\ell_1),$$

сопоставляющее с аффинным преобразованием a из $F^{-1}(\mathbf{x})$ луч $a(\ell_1)$.

Утверждение 1. *В типичной ситуации, т.е. в случае, когда $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_5)$ – регулярное значение для отображения F, прообраз $F^{-1}(\mathbf{x})$ является компактным гладким ориентированным одномерным подмногообразием в G, т.е. конечным набором гладко вложенных в G окружностей.*

Доказательство. Компактность множества $F^{-1}(\mathbf{x})$ следует из того, что при $a \in F^{-1}(\mathbf{x})$ точка $a(O)$ принадлежит выпуклой оболочке K носителя $\operatorname{supp}(\mathbf{m})$ и попарные углы между лучами $a(\ell_1), \ldots, a(\ell_5)$ равномерно отделены от нуля.

Второе утверждение непосредственно следует из положительности координат точки $\mathbf{x}$. Если же общее начало лучей

$a(\ell_1), \dots, a(\ell_5)$ лежит вне K, то оно отделяется от K прямой. Тогда, учитывая условие в теореме 1 на сумму соседних углов между лучами $\ell_1, \dots, \ell_5$, мы видим, что для некоторого i образ $a(A_i)$ не пересекается с K, и поэтому координата $x_i = 0$ вопреки условию теоремы. •

Чтобы завершить доказательство теоремы, осталось доказать следующее утверждение.

Утверждение 2. *В типичной ситуации степень отображения* $f_{\mathbf{x}} \colon F^{-1}(\mathbf{x}) \to S$ *равна* 1.

Доказательство. Так как рассматриваемые распределения масс и точки $\mathbf{x} \in \Delta$ с положительными координатами гладко деформируемы друг в друга, то корректно определен класс гладкого бордизма отображения $f_{\mathbf{x}} \colon F^{-1}(\mathbf{x}) \to S$, а значит его степень не зависит от выбора типичной пары (распределение $\mathbf{m}$, точка $\mathbf{x} \in \Delta$).

Для вычисления искомой степени рассмотрим ограниченную массу $\mathbf{m}$, распределенную с круговой симметрией, и точку $\mathbf{x} = (1/5, 1/5, \dots, 1/5)$. Пусть носитель $K = \operatorname{supp}(\mathbf{m})$ рассматриваемой массы есть круг с центром O. Покажем, что в этом случае $F^{-1}(\mathbf{x})$ состоит только из поворотов вокруг O. Для этого достаточно доказать, что фигуру K_1, ограниченную (разноосным) эллипсом, нельзя разбить на 5 равновеликих частей пятью исходящими из одной точки O лучами $\ell_1, \dots, \ell_5$, соседние из которых составляют угол $2\pi/5$.

Предположив противное, рассмотрим равновеликий K_1 круг K_2 с центром O. Тогда границы фигур K_1 и K_2 обязательно пересекаются внутри каждого из углов, ограниченных соседними из лучей ℓ_i, так как площади фигур K_1 и K_2, заключенные внутри этих углов, равны. Однако по теореме Безу окружность не может пересекаться с разноосным эллипсом более чем в 4 точках. Противоречие.

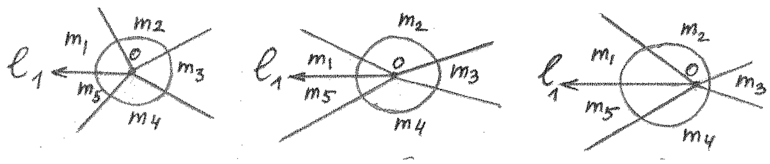
Таким образом, в рассматриваемом случае отображение

$$f_{\mathbf{x}} \colon F^{-1}(\mathbf{x}) \to S$$

является гомеоморфизмом и, следовательно, имеет степень 1.

Проверим, что рассматриваемая ситуация типичная, т.е. что точка $\mathbf{x} = (1/5, 1/5, \dots, 1/5)$ является регулярным значением отображения F. Для этого достаточно показать, что, возмущая отображение из $F^{-1}(\mathbf{x})$, мы можем независимо с ненулевой скоростью нарушать ровно одно из условий равенства координат точки $\mathbf{x}$.

Пусть лучи $\ell_1, \ldots, \ell_5$ с началом O делят круг K на 5 равных секторов с массами $m_1 = \cdots = m_5$ (рис. 2(а)). Слегка сжав систему лучей $\ell_1, \ldots, \ell_5$ в перпендикулярном лучу ℓ_1 направлении, получим систему лучей рис. 2(б), разделяющую K на части с массами $m_1 = m_5 < m_2 = m_4$, а сдвинув лучи вправо, получаем систему лучей, разделяющую K на части с массами $m_1 = m_2 = m_4 = m_5 > m_3$ (рис. 2(в)).



(а) (б) (в).

Рис. 2.

Таким образом, рассмотренная ситуация типична, а значит и в любой другой типичной ситуации степень отображения $f_{\mathbf{x}}$ равна 1, и, следовательно, $f_{\mathbf{x}}$ сюръективно. По соображениям непрерывности $f_{\mathbf{x}}$ сюръективно и во всех требуемых случаях.

Утверждение 2, а с ним и теорема 1, доказаны. •

§2. Делении массы в $\mathbb{R}^3$ конусами над гранями тетраэдра

В дальнейшем через T обозначен равногранный тетраэдр, два скрещивающихся ребра которого равны, а все остальные ребра – попарно равны. Ясно, что вершины тетраэдра T являются концами перпендикулярных диагоналей оснований некоторой правильной четырехугольной призмы, которую мы в дальнейшем обозначаем P. Через O обозначим общий центр тетраэдра T и призмы P.

Теорема 2. *Пусть в $\mathbb{R}^3$ непрерывно распределена конечная масса $\mathbf{m}$. Тогда в $\mathbb{R}^3$ найдется тетраэдр, равный T, такой, что конусы $K_1, \ldots, K_4$ над его гранями с общей вершиной O делят массу $\mathbf{m}$ на 4* *равные части, причем симметричные им относительно O конусы $K'_1, \dots, K'_4$ также делят $\mathbf{m}$ на 4 равные части.*

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущих теорем, мы докажем теорему в случае, когда массы $\mathbf{m}(K_i)$ и $\mathbf{m}(K'_j)$ гладко зависят от положения конусов K_i и K'_j. В остальных случаях теорема 4 получается предельным переходом.

Покажем, что в типичной ситуации таких (неупорядоченных) систем из 8 конусов $K_1, \dots, K'_4$ имеется нечетное число. Каждая такая система конусов задается парой симметричных тетраэдров вышеописанного типа T и T' с общим центром O. Вершины тетраэдров T и T' в совокупности образуют множество вершин правильной призмы P с центром O, которая определяет неупорядоченный набор из 8 конусов $K_1, \dots, K'_4$. Покажем, что в типичной ситуации существует нечетное число требуемых правильных призм P.

Покажем, что для разноосного эллипсоида E имеются ровно 3 правильных призмы таких, что соответствующие им системы конусов разбивают объем эллипсоида E на 8 равных частей.

Таковыми являются три конгруэнтные копии призмы P, ребра которых параллельны осям эллипсоида E, а центры совпадают с его центром O.

Очевидно, что центр искомых правильных призм совпадает с O. В противном случае рассмотрим минимальный набор конусов K_i такой, что $O \in \operatorname{int}(\bigcup K_i)$, и получим, что $\mathbf{m}\,(\bigcup K'_i) < \mathbf{m}\,(\bigcup K_i)$.

Пусть P – искомая призма с центром в центре O разноосного эллипсоида E, диагонали которой являются ребрами 8 равных трехгранных углов, делящих объем эллипсоида E на равные части, и пусть

$$A, B, C, D, A', B', C' \quad \text{и} \quad D'$$

– точки пересечения диагоналей призмы P или их продолжений с границей эллипсоида E.

Заметим, что, если $AB \dots C'D'$ – параллелепипед, то он подобен правильной призме P. Действительно, ребра параллелепипеда $AB \dots C'D'$ параллельны линиям пересечения плоскостей, в которых лежат пары его диагоналей, поэтому он прямоугольный, а значит его диагонали равны и он гомотетичен призме P.

Превратим эллипсоид E в шар $\widetilde{E}$, растянув его вдоль двух меньших осей, и пусть

$$\widetilde{A}, \widetilde{B}, \ldots, \widetilde{C}', \widetilde{D}'$$

– образы точек $A, B, \ldots, C', D'$ при этом растяжении. Так как конусы над гранями тетраэдров $\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}\widetilde{D}$ и $\widetilde{A}'\widetilde{B}'\widetilde{C}'\widetilde{D}'$ с общей вершиной в центре шара $\widetilde{E}$ делят его объем на равные части, то, как нетрудно видеть, $\widetilde{A}\widetilde{B}\ldots\widetilde{C}'\widetilde{D}'$ – прямоугольный параллелепипед. (Строгое доказательство приведено ниже.) Следовательно, и $AB\ldots C'D'$ – также параллелепипед, который, как мы видели выше, подобен P. Остается заметить, что в разноосный эллипсоид E вписаны лишь 3 вышеуказанные подобные копии правильной призмы P.

Типичность рассмотренной ситуации следует из того, что при движении рассматриваемой системы конусов с ненулевой скоростью начинает нарушаться одно из условий равенства масс.

Таким образом, в шестимерном многообразии положений призмы P шесть рассматриваемых условий совпадения объемов в типичной ситуации выделяют конечный набор из нечетного числа призм. Предельный переход доказывается существование требуемой системы конусов для произвольной массы, непрерывно распределенной в $\mathbb{R}^3$. Теорема 2 доказана. $\bullet$

Для полноты доказательства осталось доказать следующую элементарную лемму.

Лемма. *Пусть тетраэдр $ABCD$ вписан в сферу S с центром O, причем среди вершин A, B, C и D нет диаметрально-противоположных точек. Конусы над гранями тетраэдра с общей вершиной O делят объем шара с границей S на 4 равные части тогда и только тогда, когда тетраэдр $ABCD$ – равногранный, т.е. отрезки AB и CD являются скрещивающимися диагоналями двух параллельных граней прямоугольного параллелепипеда, вписанного в S.*

Доказательство. Достаточность ($\Leftarrow$). Первое утверждение очевидным образом выводится из второго, поскольку в этом случае грани тетраэдра $ABCD$ равны.

Необходимость ($\Rightarrow$). Тот факт, что рассматриваемые конусы разбивают шар на равновеликие части, очевидно, равносилен тому, что криволинейные геодезические треугольники ABC, ABD, ACD и BCD равновелики, т.е. площадь каждого из них составляет четвертую часть сферы.

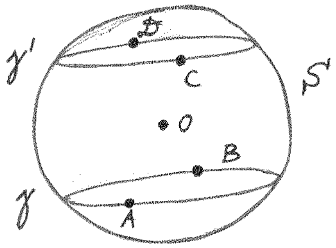


Рис. 3.

Если точки A, B и C не диаметрально противоположны, то C лежит на окружности γ' (рис. 3), которая симметрична относительно O той окружности $\gamma \subset S$, для которой отрезок AB является диаметром.

В таком случае, выбрав в качестве вершины D тетраэдра диаметрально противоположную C точку на окружности γ', мы получаем вписанный в S равногранный тетраэдр $ABCD$. Значит для точек C окружности γ' площадь геодезического треугольника ABC равна четверти площади сферы S.

Очевидно, что для внутренних точек C меньшей (соответственно, большей) из сферических шапок, ограниченных окружностью γ', площадь геодезического треугольника ABC больше (соответственно, меньше) четверти площади сферы S.

Условие равенства площадей четырех геодезических треугольников определяет точку D на сфере S по точкам A, B и C однозначно, что и завершает доказательство леммы. •

По аналогии с тем, как это сделано в [6], мы можем обобщить теорему 2, добавив ограниченную симметричную девятую область K_9 с центром $\mathcal{O}$, причем $\mathcal{O} \in \operatorname{int} K_9$, и обладающую всеми симметриями правильной призмы P. (В качестве K_9 можно взять, например, гомотетичный образ самой призмы P.)

Теорема 3. *Пусть в $\mathbb{R}^3$ непрерывно распределена конечная масса $\mathbf{m}$, и пусть $x \in (0;1)$. Тогда найдется подобное преобразование $a\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ такое, что $\mathbf{m}(a(K_9)) = xm$ и*

$$\mathbf{m}(a(K_1 \setminus K_9)) = \cdots = \mathbf{m}(a(K_4' \setminus K_9)).$$

Доказательство. Оно аналогично доказательству теоремы 2.

Покажем, что в типичной ситуации требуемых конфигураций областей имеется нечетное число.

Если делить объем разноосного эллипсоида E требуемым в теореме 3 образом и устремить x к 0, то очевидно образ $a(K_0)$ целиком попадает в эллипсоид E, а значит выполняются 7 равенств

$$\mathbf{m}(a(K_1)) = \cdots = \mathbf{m}(a(K_4')).$$

Но, как мы видели выше, таких конфигураций конусов – нечетное число.

Типичность рассматриваемой ситуации проверяется без труда, что и завершает доказательство теоремы 3. $\bullet$

§3. Деление массы в $\mathbb{R}^n$ n гиперплоскостями

В [3] доказано, что непрерывно распределенную в $\mathbb{R}^3$ конечную массу можно разделить на 6 равных частей системой конусов над гранями некоторого куба с общей вершиной в его центре.

Легко заметить, что не всякую непрерывно распределенную конечную массу в $\mathbb{R}^3$ можно разбить на 8 равных частей тремя взаимно-перпендикулярными плоскостями. (Многообразие троек взаимно-перпендикулярных плоскостей шестимерно, поэтому для типичного распределения массы невозможно добиться выполнения 7 условий равенства масс.)

Однако в [4] доказано, что непрерывно распределенную в $\mathbb{R}^3$ конечную массу можно разбить на 8 равных частей “скрученной” системой октантов. “Скрученная” система октантов получается из системы, образованной тремя взаимно-перпендикулярными плоскостями, одновременным поворотом четырех октантов вокруг их общего луча на некоторый угол. В [4] также доказано, что центрально-симметрично распределенную в $\mathbb{R}^3$ массу можно разбить на 8 равных частей тройкой взаимно-перпендикулярных плоскостей.

Теорема 4. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ непрерывно распределена конечная масса $\mathbf{m}$. Тогда найдутся n взаимно-ортогональных гиперплоскостей, каждые две из которых делят $\mathbf{m}$ на 4 равные части.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда распределение массы имеет гладкую плотность, носитель которой является шаром, что мы и предполагаем в дальнейшем. В остальных случаях теорема получается предельным переходом.

Рассмотрим компактное гладкое многообразие M наборов из n взаимно-ортогональных гиперплоскостей, каждая из которых делит рассматриваемую массу пополам. Очевидно, что $\dim M = n(n-1)/2$.

Ясно, что искомые наборы гиперплоскостей выделяются в M $n(n-1)/2$ условиями равенства отсекаемых парами гиперплоскостей масс – по одному условию для каждой пары гиперплоскостей. Таким образом, в типичной ситуации имеется конечное число ℓ требуемых наборов гиперплоскостей. По стандартным топологическим соображениям четность числа ℓ не зависит от выбора типичного распределения массы, так как все рассматриваемые распределения массы гладко деформируемы друг в друга. Осталось привести пример, когда ℓ нечетно.

Пусть $\mathbf{m}$ – сферически симметрично распределенная масса, а A – аффинное преобразование, переводящее $\mathrm{supp}(\mathbf{m})$ в разноосный эллипсоид. Покажем, что для массы $A(\mathbf{m})$ имеется единственная требуемая конфигурация гиперплоскостей. Действительно, пусть взаимно-ортогональные гиперплоскости $P_1, \ldots, P_n$ разбивают $A(\mathbf{m})$ требуемым в теореме 1 образом. Тогда гиперплоскости $A^{-1}(P_1), \ldots, A^{-1}(P_n)$ разбивают $\mathbf{m}$ требуемым образом, а значит они также взаимно-ортогональны. Но последнее возможно лишь в том случае, когда гиперплоскости $P_1, \ldots, P_n$ ортогональны осям эллипсоида. То, что рассматриваемая ситуация – типичная, легко проверяется: при движении найденного набора гиперплоскостей с ненулевой скоростью для распределения с носителем – разноосным эллипсоидом – с ненулевой скоростью начинает нарушаться одно из условий равенства масс. $\bullet$

Замечание. При $n = 3$ из теоремы 1 получается утверждение, что для непрерывно распределенной в $\mathbb{R}^3$ конечной массы найдутся три взаимно-перпендикулярные плоскости, разбивающие пространство на 8 октантов, при шахматной раскраске которых будут попарно равны массы, заключенные в "белых" октантах, а также будут попарно равны массы, заключенные в "черных" октантах.

Нижеследующая теорема является аффинной.

Теорема 5. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ непрерывно распределены две конечные массы: $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$. Тогда*

1. *Найдутся n гиперплоскостей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что любые две из них делят массу $\mathbf{m}_1$ на 4 равные части, а также любые две из*

гиперплоскостей $P_1, \ldots, P_{n-1}$ *делят массу* $\mathbf{m}_2$ *на* 4 *равные части.*

2. *Найдутся два набора из* n *гиперплоскостей такие, что гиперплоскости первого набора попарно-параллельны соответствующим гиперплоскостям второго набора и любые две гиперплоскости первого (соответственно, второго) набора делят массу* $\mathbf{m}_1$ *(соответственно,* $\mathbf{m}_2$*) на* 4 *равные части.*

Доказательство. Так же, как и в теореме 4, в типичной ситуации имеется нечетное число искомых конфигураций гиперплоскостей.

Как и выше, это доказывается простым подсчетом размерности и рассмотрение специальных случаев распределения массы. Для доказательства обеих частей теоремы удобно делить требуемым образом объемы фигур, ограниченные сферой и разноосным эллипсоидом, когда центр сферы лежит на одной из главных осей эллипсоида и не совпадает с его центром. В обоих случаях существует ровно одна требуемая конфигурация гиперплоскостей. •

Остановимся отдельно на случае центрально-симметричного распределения массы.

Так как в этом случае можно считать, что искомые гиперплоскости проходят через центр симметрии массы, то из теоремы 5 получается следствие.

Теорема 6. *Пусть в* $\mathbb{R}^n$ *заданы два непрерывных и центрально-симметричных распределения масс* $\mathbf{m}_1$ *и* $\mathbf{m}_2$ *с общим центром симметрии* O*. Тогда в* $\mathbb{R}^n$ *через точку* O *проходят* n *гиперплоскостей, любые три из которых разбивают каждую из рассматриваемых масс на* 8 *равных частей.* •

Замечание. Очевидно, что теорема 6 справедлива для центрально-симметричных непрерывных распределений массы на стандартной сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Такие распределения индуцируют распределения массы на проективном пространстве $\mathbb{R}P^{n-1}$, и мы получаем равносильную переформулировку теоремы 6.

Следствие 1. *Пусть в проективном пространстве* $\mathbb{R}P^{n-1}$ *заданы два непрерывных распределения конечных масс* $\mathbf{m}_1$ *и* $\mathbf{m}_2$*. Тогда в* $\mathbb{R}P^{n-1}$ *найдутся* n *гиперплоскостей, любые три из которых разбивают каждую из рассматриваемых масс на* 4 *равные части.* •

При $n = 3$ теорема 6 установлена автором в [4].

Отметим также одно следствие из теоремы 4.

Следствие. *Пусть в $\mathbb{R}^4$ центрально-симметрично и непрерывно распределена конечная масса $\mathbf{m}$. Тогда найдутся 4 попарно-ортогональные гиперплоскости, обладающие следующим свойством: если раскрасить в "шахматном порядке" 16 "углов", на которые ими разбивается $\mathbb{R}^4$, то все массы, заключенные в "углах" одного цвета (все равно, "белых" или "черных") будут равны.* $\bullet$

Обозначим через $G_k(\mathbb{R}^n)$ многообразие Грассмана неориентированных k-плоскостей, проходящих через ноль $O \in \mathbb{R}^n$. Пусть

$$\gamma_k^n : E_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$$

– тавтологическое векторное расслоение, где слоем над k-плоскостью $E \in G_k(\mathbb{R}^n)$ является она же, рассматриваемая как k-мерное векторное пространство.

Говорим, что в векторном расслоении задано *поле распределений массы* (п.р.м.), если в слоях расслоения заданы непрерывные распределения конечных масс, непрерывно зависящие от слоя.

Теорема 7. *Пусть в расслоении γ_k^n заданы $n-k+1$ п.р.м. $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-k+1}$. Тогда найдутся k-плоскость $E \in G_k(\mathbb{R}^n)$ и точка $\mathbf{x} \in E$ в этой плоскости такие, что для каждого $i \in \{1, \ldots, n-k+1\}$ через $\mathbf{x}$ в E проходят k попарно-ортогональных $(k-1)$-плоскостей, любые две из которых делят массу $\gamma_i(E)$ на 4 равные части.*

Доказательство. Рассмотрим ассоциированное с γ_k^n расслоение

$$\widetilde{\gamma}_k^n : \widetilde{E_k(\mathbb{R}^n)} \to G_k(\mathbb{R}^n),$$

где слоем над k-плоскостью $E \in G_k(\mathbb{R}^n)$ является множество наборов из k взаимно-ортогональных $(k-1)$-плоскостей в E.

Для $1 \leq i \leq n-k+1$ обозначим через C_i множество рассматриваемых наборов $(k-1)$-плоскостей из $\widetilde{E_k(\mathbb{R}^n)}$, которые делят массы из поля γ_i в своих слоях требуемым образом. Для типичного гладкого п.р.м. γ_i множество C_i есть компактное гладкое подмногообразие $\widetilde{E_k(\mathbb{R}^n)}$, пересекающее типичный слой пространства $\widetilde{E_k(\mathbb{R}^n)}$ в нечетном числе точек (как видно из доказательства теоремы 4), что мы и предполагаем в дальнейшем.

Пусть

$$\pi : \widetilde{E_k(\mathbb{R}^n)} \to E_k(\mathbb{R}^n)$$

– каноническая проекция, сопоставляющая с набором $(k-1)$-плоскостей их общую точку. Тогда $\pi(C_1), \ldots, \pi(C_{n-k+1})$ реализуют $\mathbb{Z}_2$-циклы в $E_k(\mathbb{R}^n)$, пересекающие типичные слои расслоения γ_k^n в нечетном числе точек, а значит реализующие образующие группы гомологий $H_{k(n-k)}(E_k(\mathbb{R}^n); \mathbb{Z}_2)$. Как хорошо известно [7–9], в таком случае индекс пересечения циклов $\pi(C_1), \ldots, \pi(C_{n-k+1})$ равен $1 \mod 2$, что и завершает доказательство теоремы 7 в типичной ситуации для гладких п.р.м. В остальных случаях теорема получается предельным переходом. $\bullet$

Следствие 2. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ заданы $n-k+1$ непрерывных распределений конечных масс $\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_{n-k+1}$. Тогда существует $(n-k)$-плоскость $P \subset \mathbb{R}^n$, обладающая следующим свойством: для каждого $i \in \{1, \ldots, n-k+1\}$ через P проходят k взаимно-ортогональных гиперплоскостей, любые из две которых делят массу $\mathbf{m}_i$ на 4 равные части.* $\bullet$

Доказательство. Достаточно спроектировать массы

$$\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_{n-k+1}$$

в плоскости из $G_k(\mathbb{R}^n)$ и применить теорему 7. $\bullet$

Заметим, что еще Хадвигер [5] доказал, что для всякой непрерывно распределенной в $\mathbb{R}^3$ массы через наперед заданную точку $O \in \mathbb{R}^3$ проходят две взаимно-перпендикулярные плоскости, делящие эту массу на 4 равные части. (В [4] имеются обобщения этого утверждения.)

Применяя следствие 1 к двум распределенным в $\mathbb{R}^n$ массам и стягивая носитель одной из масс к точке $O \in \mathbb{R}^n$, получаем

Следствие 3. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ непрерывно распределена конечная масса $\mathbf{m}$ и $O \in \mathbb{R}^n$ – заданная точка. Тогда через O проходят $n-1$ взаимно-ортогональных гиперплоскостей, любые две из которых делят $\mathbf{m}$ на 4 равные части.* $\bullet$

§4. Деление абсолютно-непрерывного заряда

В отличие от задачи о делении непрерывно распределенной массы, вопрос о делении непрерывно распределенного заряда в литературе почти не обсуждался. Основной результат данного параграфа состоит в том, что все основные теоремы о делении абсолютно-непрерывно распределенной массы (которую мы выше называли просто непрерывно распределенной) без изменения переносятся на случай абсолютно-непрерывного ненулевого заряда в $\mathbb{R}^n$. Случай нулевого заряда занимает особое место, и на него теоремы переносятся с некоторым ослаблением.

По теореме Радона–Никодима абсолютно-непрерывно распределенный в $\mathbb{R}^n$ заряд Q, заключенный в измеримом подмножестве $A \subset \mathbb{R}^n$, равен $Q(A) = \int\limits_A f(x)d\mu$ для некоторой суммируемой на $\mathbb{R}^n$ функции f.

В качестве простейшего примера рассмотрим распределение нулевого заряда на плоскости $\mathbb{R}^2$, изображенное на рисунке, где положительный и отрицательный заряды распределены с ненулевой плотностью и зеркально-симметрично относительно вертикальной прямой. Такой заряд Q нельзя разделить на 4 нулевые части парой прямых, так как в одной из частей обязательно будет сосредоточен заряд одного знака, рис. 4. Тем более Q нельзя разделить на 6 нулевых частей тремя проходящими через некоторую точку прямыми. Заряд Q даже нельзя разделить на 2 нулевые части вертикальной прямой, и множество прямых, делящих Q на две нулевые части, не компактно.

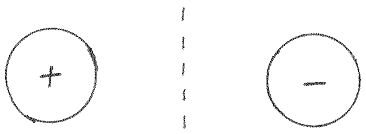


Рис. 4.

В то же время очевидно, что множество гиперплоскостей, делящих пополам абсолютно-непрерывно распределенный в $\mathbb{R}^n$ *ненулевой* заряд, компактно. Последнее обстоятельство с учетом того, что любой положительный заряд гладко деформируем в распределенную в $\mathbb{R}^n$ массу с сохранением своего значения $Q(\mathbb{R}^n)$, объясняет то, что все теоремы о делении непрерывно распределенной в $\mathbb{R}^n$ массы переносятся на ненулевые заряды.

Остановимся на примере одной теоремы, полученной при $n = 3$ для деления непрерывно распределенной массы Хадвигером [5].

Теорема 8. *Пусть Q_1 и Q_2 – два абсолютно-непрерывно распределенных в $\mathbb{R}^n$ заряда, причем $Q_1(\mathbb{R}^n) \neq 0$. Тогда найдется прямая*

$\ell \subset \mathbb{R}^n$ и содержащие ее $n-1$ гиперплоскостей $P_1, \dots, P_{n-1}$, любые две из которых делят каждый из рассматриваемых зарядов на равные части.

Как и в других вышедоказанных теоремах, проверяется что для рассматриваемых зарядов с гладкими плотностями при дополнительном условии $Q_2(\mathbb{R}^n) \neq 0$ в ситуации общего положения требуемых конфигураций плоскостей имеется нечетное число. Далее совершается предельный переход при условии $Q_2(\mathbb{R}^n) \to 0$ и из найденной последовательности наборов гиперплоскостей выбирается предельная.

При этом условие $Q_1(\mathbb{R}^n) \neq 0$ гарантирует компактность конфигурационного пространства наборов гиперплоскостей $(P_1, \dots, P_{n-1})$, любые две из которых делят заряд Q_1 на 4 равные части.

Литература

1. Б. Грюнбаум Б., *Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел.* Наука, М. (1971).
2. R. Buck and E. Buck, *Equipartition of convex sets.* — Math. Mag. 22 (1948/49), 195–198.
3. В. В. Макеев, *Шестидольные разбиения трехмерного пространства.* — Вестник ЛГУ, No. 2 (1988), 31–34.
4. В. В. Макеев, *Некоторые специальные конфигурации плоскостей, связанные с выпуклыми компактами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **252** (1998), 165–174.
5. H. Hadwiger, *Simultane Vierteilung zweier Körper.* — Arch. Math. **17** (1966), 274–278.
6. В. В. Макеев, *О делении непрерывно распределенной массы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **299** (2003), 228–240.
7. E. Fadell and S. Husseini, *An ideal-valued cohomological index theory with applications to Borsuk–Ulam and Bourgin–Yang theorems.* — Ergodic Theory Dynamical Systems **8** (1998), 73–85.
8. R. T. Živalevič and S. T. Vrečica. *An extension of the ham sandwich theorem.* — Bull. London Math. Soc. **22** (1990), 183–186.
9. В. Л. Дольников, *Трансверсали семейств множеств в $\mathbb{R}^n$ и связь между теоремами Хелли и Борсука.* — Мат. сб. **184**, No. 5 (1993), 111–131.

Makeev V. V. Theorems on equipartition of a continuous mass distribution.

Here are three samples of results.

Let $\mathbf{m}$ be a finite continuous mass distribution (an FCMD) in $\mathbb{R}^2$, and let $\ell = \{\ell_1, \dots, \ell_5 \subset \mathbb{R}^2\}$ be 5 rays with common endpoint such that the sum of any two adjacent angles between them is at most π. Then $\mathbf{m}$ can be sibdivided into 5 parts at any prescribed ratio by an affine image of ℓ.

For each FCMD $\mathbf{m}$ in $\mathbb{R}^n$ there exist n mutually orthogonal hyperplanes any two of which subdivide $\mathbf{m}$ into 4 equal parts.

For any two FCMD's $\mathbf{m}_1$ and $\mathbf{m}_2$ in $\mathbb{R}^n$ with common center of symmetry O there exist n hyperplanes through O any two of which subdivide both $\mathbf{m}_1$ and $\mathbf{m}_2$ into 4 equal parts.

С.-Петербургский
государственный университет
Поступило 1 марта 2005 г.
E-mail: pp11687@vm11687.spb.edu