Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 329, 2005 г.

В. А. Залгаллер

ОДНА ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТЕТРАЭДРА

§1. Введение

1.1. У настоящей статьи три цели. 1) Напомнить о нерешенной проблеме А. Д. Александрова. 2) Предложить независимое доказательство теоремы О'Рурка и Шевон. 3) Решить некоторую изопериметрическую задачу для тетраэдра. Эти вопросы объединяет понятие геодезического диаметра.

Геодезическим (или, что то же, – *внутренним*) диаметром замкнутой выпуклой поверхности $F \in \mathbb{R}^3$ называют наибольшую удаленность пары точек на F при измерении расстояний по самой поверхности F. Пара точек $p, q \in F$ называется *полярной*, если их расстояние на F равно геодезическому диаметру. Конечно, на поверхности может быть не одна пара полярных точек.

1.2. А. Д. Александров в 1950 г. задал вопрос: "Какая выпуклая поверхность с внутренним диаметром 1 имеет наибольшую площадь?" Согласно принципу компактности Бляшке [1] у этой задачи в классе всех замкнутых выпуклых поверхностей, дополненном дважды покрытыми выпуклыми областями, существует экстремальная поверхность. Гипотеза А. Д. Александрова состоит в том, что такой поверхностью является дважды покрытый круг диаметра 1 (и только он).

Несмотря на то, что в 1982 г. Т. Яо [2] включил эту гипотезу в список наиболее интересных нерешенных проблем геометрии, пока к ней не предложено ни одного подхода.

1.3. Принцип Бляшке гарантирует также, что при любом $n \geqslant 4$ в классе выпуклых многогранников с числом вершин $\leqslant n$, дополненном дважды покрытыми многоугольниками с числом вершин $\leqslant n$, для рассматриваемой задачи экстремум достигается. При этом дискретным аналогом гипотезы Александрова, по мнению автора статьи, будет предположение, что при каждом $n \geqslant 5$ выпуклая замкнутая многогранная поверхность с единичным геодезическим диаметром и числом вершин $\leqslant n$ имеет максимальную площадь в том и только том случае, если эта поверхность – дважды покрытый правильный n-угольник с наибольшей диагональю 1.

При $n = 4$ картина иная. В длинном §3 настоящей статьи доказывается, что при $n = 4$ экстремальным является правильный тетраэдр с длиной ребра $\sqrt{3}/2$.

§2. Теорема О'Рурка и Шевон

О'Рурк и Шевон [3], занимаясь разработкой вычислительного алгоритма для нахождения геодезического диаметра поверхности выпуклого многогранника, доказали следующую теорему.

2.1. Теорема. *Если на поверхности ∂P выпуклого многогранника $P \subset \mathbb{R}^3$ имеется пара полярных точек p, q, ни одна из которых не является вершиной многогранника P, то точки p и q соединяются на ∂P не менее чем 5 кратчайшими.*

Поскольку в [3] не приведены детали доказательства теоремы 2.1, мы в леммах 2.2 и 2.3 докажем два утверждения, из которых вместе с построениями 2.4 будет следовать справедливость теоремы 2.1.

2.2. Лемма. *Если на поверхности F тетраэдра $ABCD$ или дважды покрытого выпуклого четырехугольника $ABCD$ точки p и q соединены 4 кратчайшими длины $|pq|$, то сколь угодно близко от p и q можно найти точки p' и q', с более длинной кратчайшей $|p'q'| > |pq|$.*

Доказательство. 1) Кратчайшие pq разбивают поверхность F на 4 двуугольника. Допустим, что в одном из них угол сектора при одной из вершин $\geqslant \pi$. Пусть это имеет место при вершине q. Тогда, оставив точку p на месте, а точку q произвольно мало сдвинув в направлении биссектрисы этого угла в положение q', получим $|pq'| > |pq|$.

Далее считаем, что все углы двуугольников меньше π.

2) В каждом двуугольнике лежит по одной из вершин A, B, C, D. Надрежем каждый из двуугольников по отрезкам qA, qB, qC, qD. (Эти отрезки служат биссектрисами углов двуугольников при вершине q.) И развернем разрезанную так поверхность на плоскость.

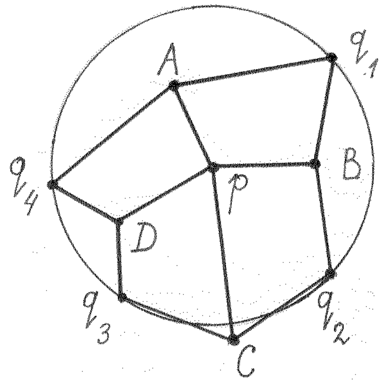

Рис. 1.

Сумму плоских углов при вершине (например, при A) выпуклого многогранника называют *полным углом* вокруг A и обозначают $\theta(A)$. В выпуклой вершине всегда $0 < \theta(A) < 2\pi$. Величину $2\pi - \theta(A)$ называют *кривизной* в вершине A и обозначают $\omega(A)$. На компактном выпуклом многограннике с вершинами $A_1, \dots, A_n$ всегда

$$0 < \omega(A_i) < 2\pi; \qquad \sum_{i=1}^{n} \omega(A_i) = 4\pi.$$

В нашем случае вершин четыре, поэтому найдется вершина с кривизной $\leqslant \pi$. Пусть, для определенности, такова вершина B, как это изображено на рис. 1.

Рисунок 1 мы называем *разверткой* поверхности F *от точки* p.

3) Рассмотрим подробнее четырехугольник pAq_1B, рис. 2.

В обозначениях, приведенных в рис. 2, форма этого четырехугольника полностью определяется значениями углов α_1, α_2, углом $\beta = \theta(B)/2$ и длиной AB, которую мы примем за единицу измерения длин. По предположению $\omega(B) \leqslant \pi$,

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \beta < \pi. \tag{1}$$

Будем произвольно мало сдвигать точку p вдоль луча $L_1 = Ap$. Сдвинутое положение $p(x)$ точки p характеризуем углом x, на который луч Bp поворачивается при переходе в положение $Bp(x)$. углы отсчитываем против часовой стрелки.

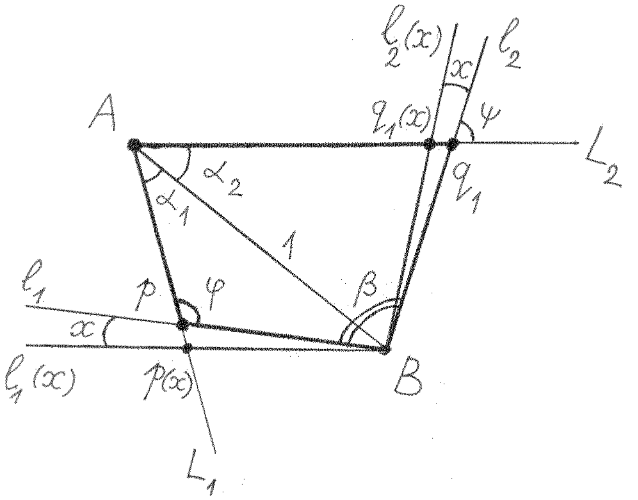

Рис. 2.

При $x = 0$ имеем исходную позицию – развертку поверхности F от точки p. После сдвига p в точку $p(x)$ развертка заменится на развертку от точки $p(x)$. Эта развертка строится следующим образом. Из точки $p(x)$ проводится отрезок в каждую вершину, а за этой вершиной делается разрез так, чтобы он вместе с пришедшим из $p(x)$ отрезком делил пополам полный угол вокруг этой вершины. При этом лучи L_1 и L_2 останутся в прежнем положении, а лучи l_1 и l_2 повернутся на один и тот же угол x вокруг точки B, сохранив между собой угол β. Это повлечет смещение точки q_1 вдоль луча L_2 в новое положение $q_1(x)$.

Убедимся, что значение x с произвольно малым $|x| > 0$ можно выбрать так, что $|p(x)q_1(x)| > |pq|$. Нам удобнее следить не за самим расстоянием $|p(x)q_1(x)|$, а за функцией

$$f(x) = \frac{1}{2}\big|p(x)q_1(x)\big|^2. \tag{2}$$

4) Обозначим

$$b(x) := |p(x)B|, \quad c(x) := |Bq_1(x)|, \quad b(0) := b, \quad c(0) := c.$$

Из треугольников $Ap(x)B$ и $ABq_1(x)$ находим, см. рис. 2

$$b(x) = \frac{\sin\alpha_1}{\sin(\varphi - x)}, \quad c(x) = \frac{\sin\alpha_2}{\sin(\psi + x)}. \tag{3}$$

Откуда

$$\left.\frac{db(x)}{dx}\right|_{x=0} = b\,\mathrm{ctg}\,\varphi, \qquad \left.\frac{dc(x)}{dx}\right|_{x=0} = -c\,\mathrm{ctg}\,\psi,$$

$$\left.\frac{d^2b(x)}{dx^2}\right|_{x=0} = b(1+2\,\mathrm{ctg}^2\varphi), \qquad \left.\frac{d^2c(x)}{dx^2}\right|_{x=0} = c(1+2\,\mathrm{ctg}^2\psi).$$

Для функции

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big[b(x)^2 + c(x)^2 - 2b(x)c(x)\cos\beta\Big]$$

находим

$$\left.\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right|_{x=0} = b^2(1+3\,\mathrm{ctg}^2\varphi) + c^2(1+3\,\mathrm{ctg}^2\psi) -$$
$$-2bc(1-\,\mathrm{ctg}\,\varphi\,\mathrm{ctg}\,\psi + \,\mathrm{ctg}^2\varphi + \,\mathrm{ctg}^2\psi)\cos\beta. \tag{4}$$

Ввиду (1) значение $\cos\beta \leqslant 0$. Убедимся, что

$$1-\,\mathrm{ctg}\,\varphi\,\mathrm{ctg}\,\psi + \,\mathrm{ctg}^2\varphi + \,\mathrm{ctg}^2\psi > 0.$$

Если $\mathrm{ctg}\,\varphi$ и $\mathrm{ctg}\,\psi$ разных знаков или один из них равен нулю, то это очевидно. Если они одинакового знака, то член $-\,\mathrm{ctg}\,\varphi\,\mathrm{ctg}\,\psi$ мажорируется одним из двух следующих за ним слагаемых.

Итак,

$$\left.\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right|_{x=0} > 0. \tag{5}$$

Из этого уже следует утверждение леммы 2.2.

2.3. Лемма. *Пусть поверхность F представляет собой дважды покрытый треугольник ABC. Если на F точки p и q соединены 3 кратчайшими длины $|pq|$, то на F сколь угодно близко от p и q найдутся точки p' и q' с более длинной кратчайшей $|p'q'| > |pq|$.*

Доказательство. 1) Пусть треугольник ABC не остроугольный и именно при вершине B угол $\pi/2 \leqslant \beta < \pi$. Развернем поверхность F относительно точки p, рис. 3.

Как и при доказательстве леммы 2.2 убеждаемся, что произвольно малым сдвигом точки p вдоль луча Ap в новое положение $p(x)$ можно получить точки $p(x)$, $q_1(x)$, для которых $|(p(x)q_1(x)| > |pq|$.

2) Пусть в покрываемом поверхностью F треугольнике ABC все три угла острые. Развенем относительно точки p поверхность

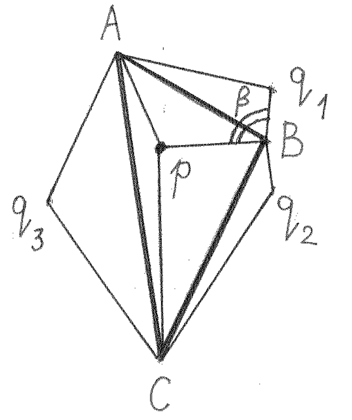

Рис. 3.

F, рис. 4. Сосредоточимся на четырехугольнике $ApBq_1$, рис. 5. Остальные обозначения ясны из рис. 5.

Будем смещать точку p в близкое положение $p(x)$ на этот раз так, чтобы лучи $L_1 = Ap$ и $l_1 = Bp$ поворачивались вокруг своих начал на одинаковый угол x. (Угол x отсчитываем против часовой стрелки.) При этом на такой же угол повернутся и лучи $L_2 = Aq$ и $l_2 = Bq$.

Обозначим через $q_1(x)$ точку пересечения повернутых на x лучей L_2 и l_2. На этот раз

$$b(x) := |p(x)B| = \frac{\sin(\alpha_1 - x)}{\sin\varphi}, \qquad c(x) := |Bq_1(x)| = \frac{\sin(\alpha_2 + x)}{\sin\psi},$$
$$b := b(0) = |pB| = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\varphi}, \qquad c := c(0) = |Bq_1| = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\psi}. \tag{6}$$

Отсюда

$$\frac{db(x)}{dx}\Big|_{x=0} = -b \operatorname{ctg}\alpha_1, \qquad \frac{dc(x)}{dx}\Big|_{x=0} = c \operatorname{ctg}\alpha_2.$$

Для функции

$$f(x) = \frac{1}{2}\big|p(x)q_1(x)\big|^2 = b^2(x) + c^2(x) - 2b(x)c(x)\cos\beta$$

имеем

$$\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=0} = -b^2 \operatorname{ctg}\alpha_1 + c^2 \operatorname{ctg}\alpha_2 + bc(\operatorname{ctg}\alpha_1 - \operatorname{ctg}\alpha_2)\cos\beta. \tag{7}$$

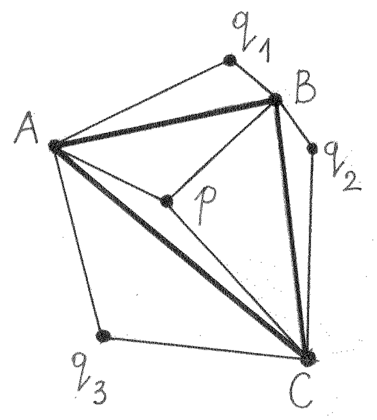

Рис. 4.

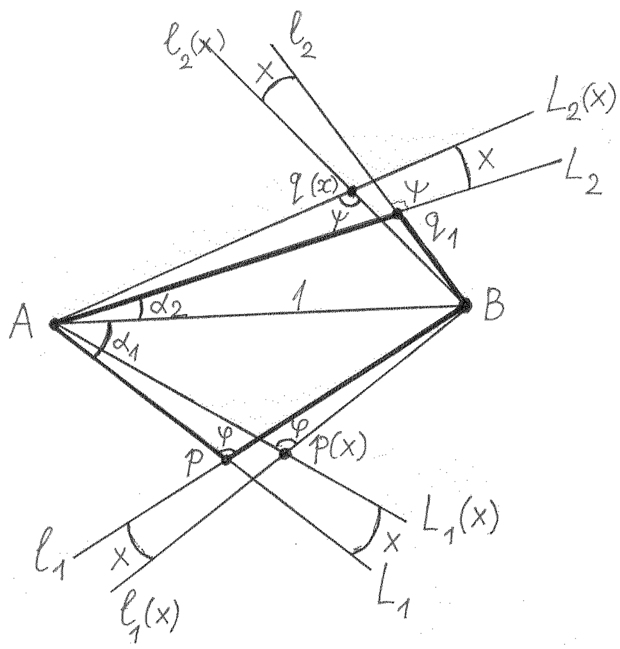

Рис. 5.

Если эта начальная скорость изменения функции $f(x)$ не ноль, то при произвольно малом $|x| > 0$ можно увеличить $f(x)$, т.е.

обеспечить $|p(x)q_1(x)| > |pq|$.

3) Если значение (7) равно нулю, то

$$b \operatorname{ctg} \alpha_1 (b - c\cos\beta) = c \operatorname{ctg} \alpha_2 (c - b\cos\beta). \tag{8}$$

Из условий

$$0 < \alpha_1 < \alpha < \pi/2, \quad 0 < \alpha_2 < \alpha < \pi/2, \quad 0 < \beta < \pi/2$$

и (8) следует, что обе части равенства (8) положительны. (При $b \geqslant c$ это очевидно для левой части, а при $c \geqslant b$ – для правой.) Но тогда и порознь

$$b - c\cos\beta > 0, \quad c - b\cos\beta > 0. \tag{9}$$

В этом случае мы вернемся к сдвигу точки p только в направлении луча Ap, как это было на рис. 2. (При этом смысл угла x будет таким, как на рис. 2.) На этот раз формуле (4) можно придать вид

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\Big|_{x=0} = (b^2+c^2-2bc)+2b \operatorname{ctg}^2\varphi(b-c\cos\beta)+2c \operatorname{ctg}^2\varphi(c-b\cos\beta)+$$
$$+(b^2 \operatorname{ctg}^2\varphi + c^2 \operatorname{ctg}^2\psi + 2bc \operatorname{ctg}\varphi \operatorname{ctg}\psi \cos\beta).$$

Здесь справа, ввиду (9), все четыре слагаемых положительны. Значит

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\Big|_{x=0} > 0,$$

поэтому при произвольно малом $|x| > 0$ можно добиться увеличения $f(x)$, т.е. обеспечить $|p(x)q_1(x)| > |pq|$.

2.4. Специальная перестройка многогранника. В книге А. Д. Александрова [4] описаны "общие" развертки поверхности выпуклого многогранника (состоящие быть может не из целых граней), доказана теорема о существовании замкнутого выпуклого многогранника с заданной общей разверткой и введен метод разрезания и склеивания. Эти результаты позволяют, в частности, осуществлять специальную перестройку выпуклого многогранника, которую мы назовем *слиянием вершин*.

На поверхности ∂P выпуклого многогранника $P \subset \mathbb{R}^3$ рассматриваются две вершины E_1 и E_2 с кривизнами $\omega(E_1)$, $\omega(E_2)$. Пусть E_1E_2 – одна из соединяющих точки E_1, E_2 кратчайших. Надрежем поверхность ∂P по E_1E_2.

Отдельно построим плоский треугольник $T = E_1E_2E$, длина *основания* E_1E_2 которого равна длине разреза E_1E_2, а углы при основании равны $\omega(E_1)/2$ и $\omega(E_2)/2$. Два экземпляра треугольника T склеим по соответствующим боковым сторонам, а два основания этих треугольников подклеим к двум *берегам* разреза поверхности ∂P по кратчайшим E_1E_2. Получим новую развертку. Ей соответствует новый выпуклый многогранник P'. На P' точки E_1 и E_2 уже не будут вершинами. Вместо них появится новая вершина E с кривизной $\omega(E)$, равной сумме кривизн, которые имели вершины E_1 и E_2 на исходном многогранниче P.

Этот прием неоднократно использовался в работах по внутренней геометрии выпуклых многогранников.

2.5. Доказательство теоремы 2.1. 1) Пусть на поверхности ∂P выпуклого многогранника $P \subset \mathbb{R}^3$ точки p и q, ни одна из которых не является вершиной многогранника P, соединимы только 4 кратчайшими. Эти кратчайшие разбивают поверхность ∂P на четыре двуугольника.

2) Если хоть один угол этих двуугольников $\geqslant \pi$, то произвольно малый сдвиг вершины этого угла в направлении биссектрисы угла $\geqslant \pi$ увеличивает $|pq|$.

3) Пусть каждый из углов этих двуугольников $< \pi$. Такой двуугольник, если его вырезать из поверхности, сам по себе обладает внутренней геометрией. И он выпуклый в следующем смысле: если любые две его внутренние точки соединить кратчайшей в этой геометрии, то такая кратчайшая не натягивается на границу двуугольника. Это позволяет в каждом из четырех двуугольников осуществлять перестройки слияния вершин, описанные в п. 2.4, и повторять их до тех пор, пока в каждом из четырех двуугольников не останется по одной вершине.

Все эти перестройки не задевают исходные кратчайшие pq и их достаточно малые окрестности на исходной поверхности ∂P. Кроме того каждая из кратчайших pq остается кратчайшей в изменяющейся развертке.

Окончательная развертка будет иметь только 4 вершины, т.е. окажется поверхностью F либо некоторого тетраэдра $ABCD$, либо дважды покрытым выпуклым четырехугольником $ABCD$. По лемме 2.2 вблизи p и q найдутся точки p' и q', для которых кратчайшие $p'q'$ пройдут в не задетой перестройками части развертки, и длина $|p'q'| > |pq|$.

4) Если на поверхности ∂P точки p и q, ни одна из которых не является вершиной многогранника P, соединимы не более чем 2 кратчайшими, или только 3 кратчайшими, но у образуемых ими трех двуугольников хоть один угол $\geqslant \pi$, то сдвигом одной из точек p и q легко получим пару точек с расстоянием на ∂P, бо́льшим, чем $|pq|$.

5) Пусть p и q соединимы только 3 кратчайшими, которые разбивают поверхность ∂P на три двуугольника с углами, меньшими π. Осуществим в каждом из этих двуугольников слияния вершин многогранника в одну вершину. Новая развертка будет поверхностью F дважды покрытого треугольника. По лемме 2.3, вблизи p и q найдутся точки p' и q', для которых кратчайшие $p'q'$ пройдут в не задетых перестройками окрестностях кратчайших pq и для которых $|p'q'| > |pq|$.

Это завершает доказательство теоремы 2.1 О'Рурка и Шевон. $\square$

§3. Тетраэдр с наибольшей площадью поверхности при единичном геодезическом диаметре

3.1. На поверхности тетраэдра $ABCD$ продлим ребро AB за вершину B лучем, который будет лежать в плоскости грани BCD и вместе с ребром AB делить пополам полный угол $\theta(B)$ вокруг B. Поскольку в трехгранном угле сумма двух плоских углов строго больше третьего, этот луч пойдет строго внутри угла $\angle CBD$. Аналогично продлеваем лучами ребра AC и AD. Эти три луча пересекаются в одной внутренней точке A' грани BCD. Точку A' называем *сопряженной* вершине A. Точки A и A' соединяются на поверхности тетраэдра 3 кратчайшими. Их длину обозначаем $|AA'|$. Аналогично определяются сопряженные точки для других вершин тетраэдра $ABCD$.

Из теоремы 2.1 следует, что на поверхности тетраэдра в любой паре полярных точек p, q хотя бы одна из этих точек является вершиной тетраэдра. Действительно, если бы p и q соединялись 5 или более кратчайшими, то эти кратчайшие разбили бы поверхность тетраэдра не менее чем на 5 двуугольников. Внутри каждого двуугольника должна лежать хотя бы одна вершина. Но у тетраэдра всего 4 вершины.

3.2. Из сказанного следует, что геодезический диаметр любого тетраэдра равен наибольшей из 10 величин: четырех длин $|AA'|$,

$|BB'|$, $|CC'|$, $|DD'|$ и шести длин ребер.

3.3. Теорема. *Среди тетраэдров с единичным геодезическим диаметром наибольшую площадь поверхности имеет только правильный тетраэдр с длиной ребер $\sqrt{3}/2$. Площадь его поверхности:*

$$S_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1,299038106. \tag{10}$$

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы сделаем два замечания.

3.4. Замечание 1. У любого дважды покрытого треугольника (или выпуклого четырехугольника) с геодезическим диаметром 1 (он совпадает с обычным диаметром дважды покрываемой фигуры) площадь не более 1, т.е. меньше величины (10). Поэтому максимум площади может достигаться только на невырожденном тетраэдре.

3.5. Замечание 2. Форма тетраэдра $ABCD$ зависит от 6 параметров. В их качестве можно, например, выбрать: длины ребер AB и CD; длину общего перпендикуляра MN, соединяющего направленные прямые, на которых лежат ребра AB и CD; угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$; сдвиги (со знаком) середин ребер AB и CD от точек M и N. Через эти параметры в элементарных функциях выразится площадь S поверхности тетраэдра, а также все 10 величин, упомянутых в п. 3.2. Трудно рассчитывать решить такую задачу оптимизации при 10 сложных ограничениях. По существу, доказав теорему 3.3, мы все же решим эту задачу. Доказательство будет геометрическим. На некоторых этапах оно использует аналитические и вычислительные доводы.

3.6. *Разверткой* поверхности ∂P выпуклого многогранника $P \subset \mathbb{R}^3$ "*от точки p*" называют следующее построение. Если точку p соединять на ∂P кратчайшими со всеми другими точками, то на ∂P выделяется множество точек, в каждую из которых идет из p более одной кратчайшей. Это множество называют *множеством разреза* (в англоязычной литературе cut locus, в немецкоязычной – Schnittort). Множество это представляет собой связный граф из отрезков. Если разрезать поверхность ∂P по этому графу и если точка p не была вершиной многогранника P, то так разрезанная поверхность ∂P разворачивается на плоскость в виде звёздно выпуклого, относительно точки p, многоугольника. Если точка p была вершиной многогранника P, то для такого разворачивания на плоскость достаточен еще один дополнительный разрез по произвольно выбранной кратчайшей, идущей из точки P.

Мы будем сравнивать площади поверхности тетраэдров с величиной (10), наблюдая эти площади на развертках либо – "от точки, сопряженной одной из вершин тетраэдра", либо – "от одной из вершин тетраэдра".

3.7. Для правильного тетраэдра $T_0 = ABCD$ с ребром $\sqrt{3}/2$ развертка его поверхности от сопряженной вершине A точки A' имеет вид правильного треугольника, вписанного в единичную окружность, рис. 6.

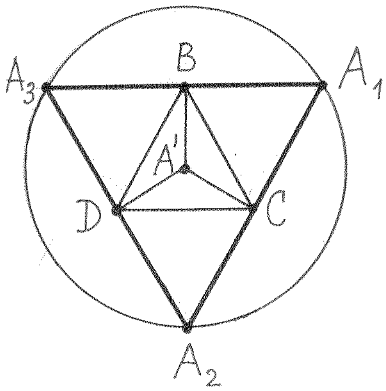

Рис. 6.

При развертке от самой вершины A с дополнительным разрезом по ребру AB получается многоугольник, изображенный на рис. 7.

Этот многоугольник вписан в полукруг радиуса 1. В полукруге он оставляет незаполненной площадь

$$\Delta = \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 0,27175822. \qquad (11)$$

Чтобы доказать, что площадь поверхности каких-либо тетраэдров меньше, чем у T_0, достаточно показать, что их умещающиеся в таком полукруге развертки оставляют незаполненной площадь $> \Delta$.

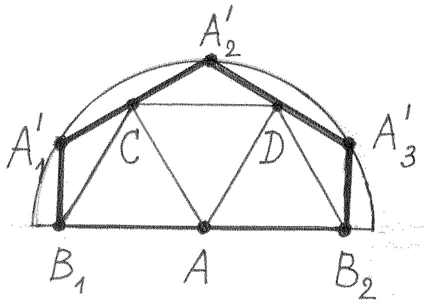

Рис. 7.

Из рис. 7 видно, что развертка от вершины A поверхности тетраэдра T_0 является половиной правильного шестиугольника, вписанного в единичную окружность.

3.8. Перейдем к доказательству теоремы 3.1. Называем вершину A тетраэдра *острой*, если $\omega(A) > \pi$, и *тупой*, если $\omega(A) \leqslant \pi$.

Если все четыре вершины тетраэдра $ABCD$ тупые, то

$$\omega(A) = \omega(B) = \omega(C) = \omega(D) = \pi.$$

Из единичности геодезического диаметра следует $|AA'| = r \leqslant 1$. При этом развертка поверхности $ABCD$ от точки A' окажется треугольником, вписанным в окружность радиуса r, рис. 8.

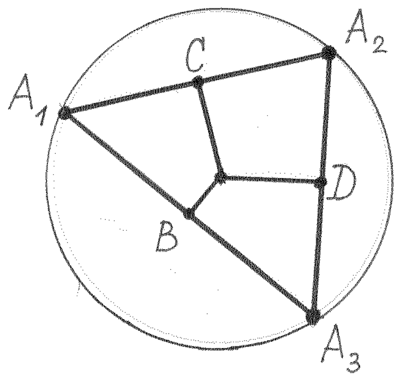

Рис. 8.

Площадь такой развертки максимальна *только* если $r = 1$, а треугольник развертки – правильный. Но это – именно случай тетраэдра T_0.

3.9. Пусть у тетраэдра $ABCD$ вершины B, C, D тупые, а вершина A – острая; $|AA'| = r \leqslant 1$. На этот раз развертка поверхности $ABCD$ от точки A' примет вид рис. 9.

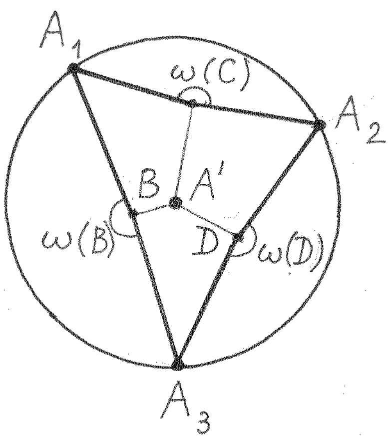

Рис. 9.

Эта развертка вмещается в треугольник $A_1A_2A_3$, вписанный в окружность радиуса r. Ее площадь заведомо меньше, чем у правильного треугольника (см. рис. 6), вписанного в единичную окружность.

3.10. Пусть у тетраэдра $ABCD$ с геодезическим диаметром 1 вершины A, B – острые, а вершины C, D – тупые. Положим

$$\omega(A) = \pi + 2\alpha, \quad \omega(B) = \pi + 2\beta, \quad \alpha \geqslant \beta > 0. \qquad (12)$$

У тетраэдра $ABCD$ значения $|AA'|$ и длина $|AB|$ не больше 1. За счет гомотетии считаем, что бóльшая из величин $|AA'|$ и $|AB|$ равна 1. Будем различать два случая:

$$|AA'| \leqslant |AB| = 1 \quad \text{и} \quad |AB| < |AA'| = 1. \qquad (13)$$

Этим случаям соответствуют развертки от вершины A с дополнительным разрезом по ребру AB, изображенные на рис. 10 и 11 с одной оговоркой.

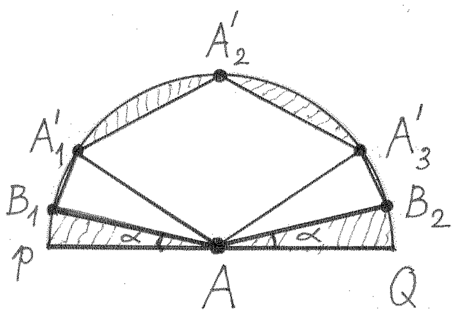

Рис. 10.

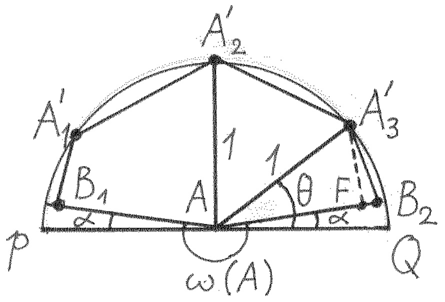

Рис. 11.

На этих рисунках точки A_1' и A_3' расположены на одинаковых расстояниях от концов P, Q диаметра полукруга и уже осуществлены два изменения многоугольника развертки: сначала вогнутые участки $A_1'CA_2'$ и $A_2'DA_3'$ заменены отрезками $A_1'A_2'$, $A_2'A_3'$, затем точка A_2' сдвинута в середину дуги $A_1'A_3'$. Эти изменения сделали рис. 10 и 11 симметричными относительно прямой AA_2' и лишь увеличили площадь многоугольника развертки. Мы докажем, что даже после этого в полукруге площадь, не покрытая многоугольником развертки, превосходит Δ.

3.11. Обратимся к рис. 10. Значения $\alpha \geqslant \Delta$ сразу исключаются. При них не заполненные разверткой секторы PAB_1 и PAB_2 имели бы вместе площадь $\geqslant \Delta$. Пусть $0 < \alpha < \Delta$. Оценим снизу общую площадь заштрихованных на рис. 10 упомянутых секторов и сегментов $A_1'A_2'$ и $A_2'A_2'$. Ввиду $\beta \leqslant \alpha$ угол B_2AA_3 не превосходит 2α. Поэтому в условиях рис. 10 непокрытая площадь не меньше,

чем
$$\sigma(\alpha) := \alpha + \left[\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right)\right].$$
Функция $\sigma(\alpha)$ в промежутке $0 < \alpha < \Delta$ достигает единственного минимума при
$$\alpha = \frac{1}{3}\Big(\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{2}{3}\Big) \approx 0,243242552,$$
и этот минимум приближенно равен 0,3329, что существенно больше, чем Δ.

3.12. Обратимся к рис. 11. Опустим из точки A_3' перпендикуляр $A_3'F$ на отрезок AB_2. Угол $\angle FA_3'B_2 = \beta$. Если $\beta < \alpha$, то отодвигаем точку B_2 от A вдоль радиуса AB_2. Если B_2 попадает на границу полукруга раньше, чем угол $\angle FA_3'B_2$ станет равным α, то приходим в условии рис. 10 и, согласно п. 3.11, площадь многоугольника меньше площади поверхности тетраэдра T_0. Поэтому далее считаем, что в условиях рис. 11
$$\angle FA_3'B_2 = \alpha. \tag{14}$$
Обозначим на рис. 11
$$\theta := \angle A_3'AB_2. \tag{15}$$
Нам будет полезно уметь оценивать сверху площадь треугольников AB_2A_3 при всевозможных сочетаниях значений α и θ *при соблюдении условия* (14).

3.13. Площадь Φ треугольников AB_2A_3' (см. рис. 11), для которых соблюдается условие (14), является гладкой функцией от α и θ. Если при фиксированном θ повернуть луч AB_2 на малый угол $d\alpha > 0$, то требование соблюдать (14) влечет поворот луча $A_3'B_2$ на $2dx$. При этом площадь Φ убывает на $(AB_2)^2 d\alpha/2$ и прирастает на $(A_3'B_2)^2 d\alpha$, т.е.
$$d\Phi = \frac{2(A_3'B_1)^2 - (AB_2)^2}{2}\, d\alpha.$$
Вопрос о знаке $d\Phi/d\alpha$ зависит от отношения длин сторон: если $AB_2 : A_3'B_2 > \sqrt{2}$, площадь Φ убывает с ростом α, а если $AB_2 : A_3'B_2 < \sqrt{2}$, то Φ с ростом α возрастает. Само отношение $AB_2 : A_3'B_2$ с ростом α убывает, так как убывает угол $\angle A_3'AB_2$ и растет $\angle AA_3'B_2$.

Допустим, что при некотором $\theta \in (0;\pi/2)$ нашелся угол $\alpha_m \in [0;\Delta]$, при котором $AB_2 : A_3'B_2 = \sqrt{2}$. Тогда при фиксации такого θ площадь Φ достигает максимума при $\alpha = \alpha_m$ и монотонно убывает при отходе α от α_m в любую сторону. Пары $(\alpha;\theta(\alpha))$, $\alpha \in [0,\Delta]$, при которых $AB_2 : A_3'B_2 = \sqrt{2}$, мы называем далее *специальными*.

Конечно не для каждого $\theta \in (0;\pi/2)$ существует $\alpha \in [0;\Delta]$, образующие с этим θ специальную пару. Но для любого $\alpha \in [0;\Delta]$ существует единственное $\theta(\alpha)$, образующее с этим α специальную пару. Ниже, в п. 3.15, мы убедимся, что функция $\theta(\alpha)$ возрастающая, так что значения θ, входящие в специальные пары, заполняют в $(0;\pi/2]$ некоторый замкнутый промежуток $[\theta(0);\theta(\Delta)]$.

3.14. Вернемся к рис. 11. Для угла θ есть три возможности:

$$\theta \in (0;\theta(0)), \quad \theta \in [\theta(0);\theta(\Delta)], \quad \theta \in \Big(\theta(\Delta);\frac{\pi}{2}\Big). \tag{16}$$

Рассмотрим пока только первую возможность. Пусть $\theta \in (0;\theta(0))$. Тогда обязательно $AB_2 : A_3'B_2 > 0$. Иначе это отношение убывало бы с уменьшением α. Но при $\alpha = 0$ оно $> \sqrt{2}$, а специальных пар при $\theta < \theta(0)$ нет. Поэтому площадь треугольника AB_2A_3', удовлетворяющего (14), неизменно возрастает с уменьшением α вплоть до $\alpha = 0$. Значит, площадь многоугольника развертки рис. 11 при первой из возможностей (16) возрастет, если заменить рис. 11 на рис. 12.

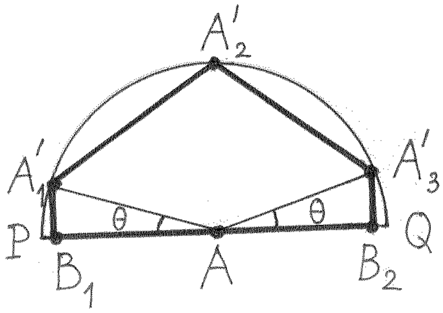

Рис. 12.

Если многоугольник на рис. 12 дополнить его отражением относительно диаметра PQ, то многоугольник оказывается половиной шестиугольника, вписанного в единичную окружность. Площадь такого шестиугольника максимальна только, если он правильный, что соответствует тетраэдру T_0, см. рис. 7.

3.15. Прежде чем перейти ко второй из возможностей (16), найдем для каждого $\alpha \in [0;\Delta]$ значение $\theta(\alpha)$, которое образует с этим α специальную пару, при котором в треугольнике AB_2A_3', удовлетворяющем условию (14) имеет место равенство

$$AB_2 \colon A_3'B_2 = \sqrt{2}. \tag{17}$$

Требования (14) и (17) при известном $\alpha \in [0;\Delta]$ определяют треугольник AB_2A_3' с точностью до подобия. Рассмотрим подобный искомому треугольник $\overline{A}\,\overline{B}_2\,\overline{A}_3'$ со сторонами $\overline{A}\,\overline{B}_2 = \sqrt{2}$, $\overline{A}\,'_3\,\overline{B}_2 = 1$ (см. рис. 13).

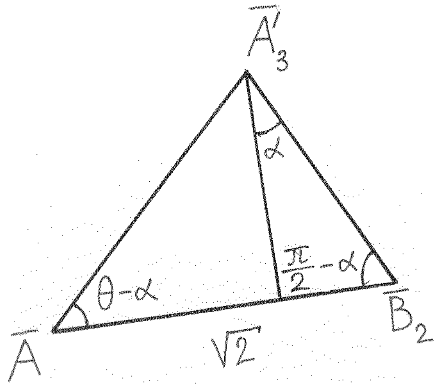

Рис. 13.

Тогда

$$\overline{A}\,\overline{A}\,'_3 = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}\,\sin\alpha}, \quad \sin(\theta(\alpha) - \alpha) = \frac{\sin(\pi/2 - \alpha)}{\overline{A}\,\overline{A}\,'_3},$$

откуда

$$\theta(\alpha) = \arcsin\frac{\cos\alpha}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}\,\sin\alpha}} + \alpha. \tag{18}$$

Площадь треугольника $\overline{A}\,\overline{B}_2\,\overline{A}\,'_3$ (см. рис.13) равна $(\cos\alpha)/\sqrt{2}$, откуда площадь $\Phi(\alpha)$ треугольника AB_2A_3' при условии (14) равна

$$\Phi(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{3\sqrt{2} - 4\sin\alpha}. \tag{19}$$

3.16. Теперь вернемся к рис. 11 и остановимся на второй из возможностей (16).

Пусть $\theta \in [\theta(0); \theta(\Delta)]$. Тогда существует некоторое $\alpha_m \in (0; \Delta]$, для которого $\theta = \theta(\alpha_m)$. Площадь σ, не покрытая в полукруге (см. рис. 11) многоугольником развертки, слагается из двух частей: площади σ_1, не покрытой в секторах PAA'_1 и QAA'_3, и площади σ_2 двух сегментов $A'_1A'_2$ и $A'_2A'_3$. Но для $\theta = \theta(\alpha_m)$ независимо от значений α, значение $\sigma_1(\alpha_m) \geqslant \theta(\alpha_m) - 2\Phi(\alpha_m)$.

Кроме того
$$\sigma_2(\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right). \tag{20}$$

Простые вычисления по формулам (18)–(20) дают следующую таблицу[1]

Таблица 1

α_m	$\theta(\alpha_m)$	σ_1	$\sigma_1 + \sigma_2$
0	0.615479709	0.1441	0.2829
0.03	0.655407641	0.1705	0.2931
0.06	0.695185818	0.1964	0.3041
0.09	0.734805349	0.2218	0.3158
0.12	0.774256682	0.2467	0.3283
0.15	0.813529547	0.2710	0.3413
0.151	0.814835442	$0.271776 > \Delta$	0.3417
0.18	0.852612879	0.2871	0.3471
0.21	0.891494752	0.3177	0.3687
0.24	0.930162279	0.3400	0.3829
0.27	0.968601527	0.3616	0.3974
Δ	0.970846952	0.3629	0.3982

Как видим, во всех случаях $\sigma_1 + \sigma_2 > \Delta$. При второй из возможностей (16) площадь поверхности тетраэдра $ABCD$ меньше, чем у тетраэдра T_0.

Ниже, в п. 3.23, при расчете таблицы 4 использованы приведенные значения $\theta(\alpha_m)$. Там же и в п. 3.22 использован тот

[1] Вычисления были проведены с шагом 0,01 по α_m на 9 знаков. В таблице 1 шаг укрупнен, а в двух последних столбцах значения округлены до 4 значащих цифр.

отмеченный в таблице факт, что при $\alpha_m \geqslant 0,151$ уже только одно $\sigma_1 > \Delta$.

3.17. Третья из возможностей (16). Пусть $\theta \in (\theta(\Delta); \pi/2)$. Для такого θ, как легко показать, существуют удовлетворяющие условию (14) треугольники $AB_2A'_3$ с любым из значений $\alpha \in [0; \Delta]$. Но ни одно такое α не составит с θ специальную пару. При $\alpha = 0$ отношение $AB_2 : A'_3B_2 < \sqrt{2}$. Оно останется меньше $\sqrt{2}$ при всех $\alpha \in [0; , \Delta]$. Поэтому, начав с любого имеющегося α, мы лишь увеличим площади одинаковых треугольников $AB_2A'_3$ и $AB_1A'_1$, увеличив α до значения Δ. Но при $\alpha = \Delta$ не покрытая в полукруге многоугольником развертки площадь больше Δ (см. рис. 11).

Это заканчивает начатое в п. 3.10 рассмотрение случая двух острых и двух тупых вершин у тетраэдра.

3.18. Приступим к последнему, наиболее трудному случаю, когда у тетраэдра $ABCD$ с геодезическим диаметром 1 три вершины A, B, C острые и только вершина D тупая. Обозначим кривизны вершин

$$\omega(A) = \pi + 2\alpha, \qquad \omega(B) = \pi + 2\beta,$$
$$\omega(C) = \pi + 2\gamma, \qquad \omega(D) = \pi - 2(\alpha + \beta + \gamma).$$

Считаем

$$0 < \gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha < \Delta. \tag{21}$$

Развернем поверхность тетраэдра от вершины A с дополнительным разрезом по ребру AB. Эта развертка уместится в полукруге радиуса 1 с центром A. Мы будем доказывать, что во всех случаях не покрытая этой разверткой часть полукруга превышает Δ даже после того, что за счет гомотетии с центром A вся развертка увеличена настолько, что бóльшая из величин $|AA'|$ и AB стала равна 1. При этом мы априори допускаем, что вершина C могла при гомотетии выйти за пределы полукруга, если было $AB < AC \leqslant 1$.

Считая гомотетию уже осуществленной, будем различать три возможности:

$$|AA'| = AB = 1, \quad |AA'| < AB = 1, \quad AB < |AA'| = 1. \tag{22}$$

Первой из возможностей (22) отвечает рис. 14 с двумя оговорками. Во-первых, пока не исключена возможность, что вершина

C могла выйти за пределы полукруга. Во-вторых, мы на рис. 14 сдвинули вершину D вдоль радиуса AD настолько, чтобы углы при основании треугольника $A_2'DA_3'$ стали равными 3γ вместо $\alpha+\beta+\gamma$. Это могло лишь уменьшить площадь не покрытой разверткой части полукруга.

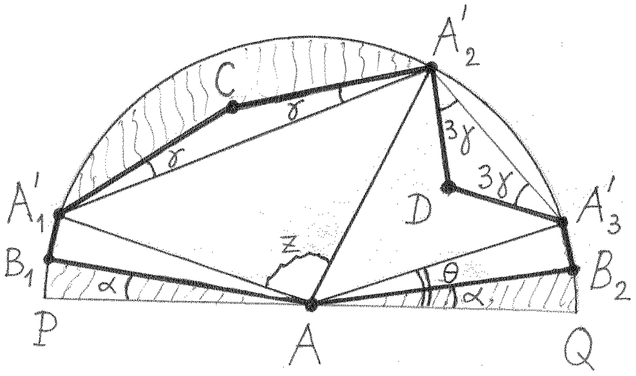

Рис. 14.

3.19. Сравним в условиях рис. 14 площади S треугольников $A_1'CA_2'$ и $A_2'DA_3'$. Если

$$S(\triangle A_1'CA_2')\operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{4}|A_1'A_2'|^2\leqslant S(\triangle A_2'DA_3')=\frac{1}{4}|A_2'A_3'|^2\operatorname{tg}3\gamma,$$

то замена участков $A_1'CA_2'$, $A_2'DA_3'$ границы многоугольника отрезками $A_1'A_2'$, $A_2'A_3'$ ведет (после сдвига вершины A_2' в середину дуги $A_1'A_3'$) к уже изученному в п. 3.11 рис. 10. Поэтому далее считаем, что $S(\triangle A_1'CA_2')>S(\triangle A_2'DA_3')$, откуда

$$\frac{|A_1'A_2'|}{|A_2'A_3'|}>\sqrt{\frac{\operatorname{tg}3\gamma}{\operatorname{tg}\gamma}}>\sqrt{3}.$$

Тем более отношение дуг $\overset{\frown}{A_1'A_2'}:\overset{\frown}{A_2'A_3'}>\sqrt{3}$, откуда угол

$$z:=\angle A_1'AA_2'>\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\angle A_1'AA_3'.$$

Из равнобедренности треугольника $A_3'AB_2$ и равенства $\angle A_3'B_2A=\pi/2-\beta$ следует $\angle A_3'AB_2=2\beta\leqslant 2\alpha$. Поэтому

$$z>\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}(\pi-6\alpha). \tag{23}$$

Стоящую в (23) справа величину обозначим $z(\alpha)$. Поскольку $\alpha < \Delta$, то величина $z(\alpha)$, а потому и угол $z > z(\alpha)$ превосходят

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}(\pi - 6\Delta) \approx 1,511.$$

Это исключает, ввиду $\gamma \leqslant \alpha < \Delta$, возможность выхода точки C за пределы полукруга. Даже если мы уменьшим угол z до $z(\alpha)$, а угол γ в треугольнике $A_1'CA_2'$ увеличим до α, то непокрытая в секторе $A_1'AA_2'$ площадь будет равна

$$\frac{z(\alpha)}{2} - \frac{1}{2}\sin z(\alpha) - \sin^2\frac{z(\alpha)}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Кроме того целиком не покрыты секторы PAB_1 и QAB_2 с углами α. Таким образом непокрытая площадь $\sigma > f(\alpha)$, где

$$f(\alpha) = \alpha + \left(\frac{z(\alpha)}{2} - \frac{1}{2}\sin z(\alpha) - \sin^2\frac{z(\alpha)}{2}\operatorname{tg}\alpha\right). \qquad (24)$$

Функция $f(\alpha)$ гладкая и с ростом α от 0 до Δ сначала убывает, а затем возрастает, имея единственный минимум вблизи $\alpha = 0.2261$, что подтверждается следующей таблицей значений $f(\alpha)$:

Таблица 2

α	$f(\alpha)$
0	0.5395
0.05	0.4333
0.10	0.3538
0.15	0.3018
0.20	0.2756
0.2260	0.27325036
0.2261	0.27325033
0.2262	0.27325038
0.23	0.2733
0.24	0.2741
0.26	0.2784
Δ	0.2825

Как видим, даже в минимуме функция f остается больше, чем $\Delta \approx 0,27175822$.

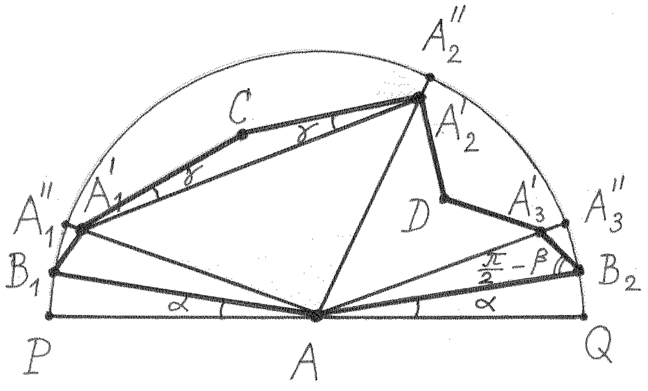

Рис. 15.

3.20. Перейдем ко второму из случаев (22): $|AA'| < |AB| = 1$, см. рис. 15.

На рис. 15 как и на рис. 14 вершину D считаем смещенной от A настолько, что в равнобедренном треугольнике $A_2'DA_3'$ углы при основании равны 3γ. Как и в п. 3.19 априори не предполагается, что вершина C не вышла из полукруга при гомотетии, выводившей точки B_1, B_2 на единичную окружность. Подвергнем точки A_1', C, A_2', D, A_3' гомотетии с центром A и таким коэффициентом, чтобы точки A_1', A_2', A_3' попали на единичную окружность в положение A_1'', A_2'', A_3''. При этом непокрытая часть площади полукруга только уменьшится. И мы придем к ситуации рис. 14.

Точки B_1, B_2 оставались на месте. Отрезки B_1A_1', B_2A_3' повернулись в положения B_1A_1'', B_2A_3''. При этом угол $\angle A_3'B_2A = \pi/2-\beta$ увеличился. Поэтому как и в п. 3.19 угол $\angle A_3''AB_2 < 2\beta \leqslant 2\alpha$. И можно повторить все доводы из п. 3.19, показывающие, что либо можно без увеличения площади развертки перейти к рис. 10, либо – точка C не выходит из полукруга, а не покрытая в полукруге разверткой площадь превышает Δ.

3.21. Для доказательства теоремы 3.1 остается изучить третью из возможностей (22), т.е. допустить, что $|AB| < |AA'| = 1$, рис. 16.

На рис. 16 точка D уже отодвинута от A так, что в треугольнике $A_2'DA_3'$ углы при основании равны 3γ.

Упомянутая в п. 3.18 гомотетия, обеспечившая равенство $|AA'| = 1$, могла вывести точку C за пределы полукруга, что

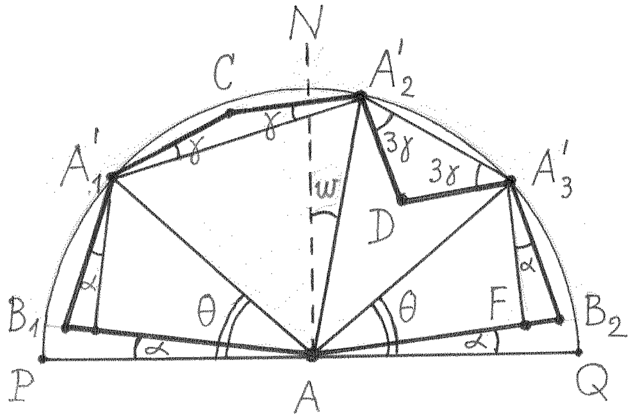

Рис. 16.

не отражено в рис. 16. Но эта гомотетия лишь уменьшает непокрытую в полукруге площадь, которую мы будем оценивать снизу.

Как мы это уже делали в п. 3.12 для рис. 11, опускаем из точки A_3' перпендикуляр $A_3'F$ на отрезок AB_2. Угол $\angle FA_3'B_2 = \beta$, но если $\beta < \alpha$, то отодвигаем точку B_2 от A вдоль радиуса AB_2. Если B_2 попадает на границу полукруга раньше, чем $\angle FA_3'B_2$ станет равен α, то попадаем в уже изученные условия рис. 14.

Поэтому далее считаем, что выполняется уже фигурировавшее в п. 3.12 и далее условие (14):

$$\angle FA_3B_2 = \alpha.$$

Именно это положение изображено на рис. 16. Отметим, что в этих положениях всегда $\theta > 2\alpha$.

3.22. Обозначения углов $\theta, \alpha, \gamma, w$ ясны из рис. 16, где $AN \perp PQ$. Площадь σ_1, не покрытая многоугольником $M = AB_1A_1'CA_2'DA_3'B_2$ в двух одинаковых секторах PAA_1' и QAA_3', зависит только от θ и α. Как показано в п. 3.16 при $\theta \geqslant \theta(0,151)$, независимо от α значение $\sigma_1 > \Delta$. Далее мы для θ рассмотрим отдельно две возможности:

$$\theta \in (0; \theta(0)] \quad \text{и} \quad \theta \in (\theta(0); \theta(0,151)). \tag{25}$$

Остановимся на первой из возможностей (25). Пусть $\theta \in (0; \theta(0)]$ фиксировано. При таком θ площадь треугольников AB_2A_3', удовлетворяющих условию (14), растет с уменьшением угла α. Мы уменьшим угол α настолько, чтобы он стал равен углу γ и будем вместо α писать γ. Теперь

$$\sigma_1(\theta,\gamma) = \theta - \sin(\theta-\gamma)\big[\cos(\theta-\gamma) + \sin(\theta-\gamma)\operatorname{tg}\gamma\big]. \tag{26}$$

Площадь, не покрытая многоугольником M в секторе $A_1'AA_3'$, кроме θ и γ зависит еще от угла w. Она оценивается снизу функцией $\sigma_2(\theta,\gamma,w)$. Мы говорим “оценивается снизу” вместо “равна”, так как при выводе формулы для $\sigma_2(\theta,\gamma,w)$ из площади сегмента $A_1'A_2'$ вычтена площадь всего треугольника $A_1'CA_2'$ даже в случае, если точка C выходила за пределы полукруга:

$$\begin{aligned}\sigma_2(\theta,\gamma,w) = \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta+w\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta-w\right) - \\ - \sin^2\frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{2}-\theta+w\Big)\operatorname{tg}\gamma + \sin^2\frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{2}-\theta-w\Big)\operatorname{tg}3\gamma.\end{aligned} \tag{27}$$

При фиксации допустимых θ, γ функция (27) достигает единственного минимума при выборе значения w из уравнения

$$\frac{\partial\sigma_2}{\partial w} = 0, \tag{28}$$

которое имеет единственное решение:

$$w(\theta,\gamma) = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}3\gamma + \operatorname{tg}\gamma}{2 + \operatorname{tg}\theta(\operatorname{tg}3\gamma - \operatorname{tg}\gamma)}. \tag{29}$$

Будем считать, что при каждой допустимой паре θ,γ значение w выбирается именно из условия (28), т.е. по формуле (29).

Мы утверждаем, что сумма

$$\sigma(\theta,\gamma) = \sigma_1(\theta,\gamma) + \sigma_2(\theta,\gamma,w(\theta,\gamma))$$

при всех допустимых значениях $\theta \in (0;\theta(0)]$, $\gamma \in [0;\Delta]$, $\theta > 2\gamma$ строго возрастает по γ. Чтобы доказать это, вычислим при фиксированном θ производную

$$\frac{d\sigma}{d\gamma} = \frac{\partial\sigma_1}{\partial\gamma} + \frac{\partial\sigma_2}{\partial\gamma} + \frac{\partial\sigma_2}{\partial w}\,\frac{\partial w}{\partial\gamma} = \frac{\partial\sigma_1}{\partial\gamma} + \frac{\partial\sigma_2}{\partial\gamma},$$

последнее равенство связано с тем, что w выбиралось из уравнения (28). Поэтому

$$\frac{d\sigma(\theta,\gamma)}{d\gamma} = \cos 2(\theta-\gamma) + \sin 2(\theta-\gamma)\operatorname{tg}\gamma - \frac{\sin^2(\theta-\gamma)}{\cos^2\gamma} -$$

$$-\frac{\sin^2(\frac{\pi-2\theta+2w}{4})}{\cos^2\gamma}+3\frac{\sin^2(\frac{\pi-2\theta+2w}{4})}{\cos^2 3\gamma}, \qquad (30)$$

где

$$w=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}3\gamma+\operatorname{tg}\gamma}{2+\operatorname{tg}\theta(\operatorname{tg}3\gamma-\operatorname{tg}\gamma)}.$$

В таблице 3 приведены округленные до трех цифр значения производной $d\sigma/d\gamma$ при допустимых парах θ и γ (пары с $\theta<2\gamma$ – не допустимые). Во всех случаях значения положительные. Это значит, что оценка снизу непокрытой площади убудет, если при каждом θ перейти к предельному значению $\gamma=0$, т.е. перейти от рис. 16 к рис. 12 с тем же θ.
Для рис. 12 максимум площади многоугольника $AB_1A_1'A_2'A_3'B_2$ достигается только при $\theta=\pi/6$, что соответствует тетраэдру T_0.

Таблица 3

γ/θ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	$\pi/6$	0.55	0.6	$\theta(0)$
0	1.87	1.68	1.44	1.16	0.831	3/4	0.658	0.479	0.423
0.005	1.85	1.67	1.43	1.15	0.830	0.750	0.659	0.481	0.425
0.01	1.84	1.66	1.43	1.15	0.830	0.751	0.660	0.484	0.428
0.03	1.78	1.62	1.40	1.14	0.832	0.755	0.668	0.498	0.443
0.06		1.56	1.37	1.12	0.841	0.769	0.686	0.524	0.472
0.09		1.51	1.34	1.12	0.854	0.787	0.709	0.555	0.507
0.12			1.31	1.11	0.870	0.807	0.734	0.590	0.544
0.15			1.29	1.11	0.886	0.827	0.759	0.624	0.581
0.18				1.10	0.900	0.846	0.784	0.658	0.617
0.21					0.911	0.862	0.805	0.689	0.651
0.24					0.919	0.875	0.822	0.716	0.681
0.27							0.835	0.739	0.707
Δ							0.836	0.740	0.708

3.23. Нам осталось рассмотреть вторую из возможностей (25). Пусть $\theta\in(\theta(0);\theta(0,151))$. Тогда найдется такое $\alpha_m\in(0;\Delta)$, что $\theta=\theta(\alpha_m)$. Если в рис. 16 $\alpha\geqslant\alpha_m$, то непокрытая площадь σ_1 в секторах PAA_1' и QAA_3' убывает с ростом α (при перестройке треугольников AB_2A_3' с соблюдением условия (14)). Если же $\alpha<\alpha_m$, то площадь σ_1 убывает при аналогичном уменьшении α. Уменьшив α до значения γ, мы вернемся к оценке снизу непокрытой площади значением

$$\sigma(\theta,\gamma)=\sigma_1+\sigma_2,$$

где σ_1 задается формулой (26), а σ_2 – формулой (27) при w, определенном в равенстве (29).

Отметим, что на этот раз мы не вправе утверждать, что $d\sigma/d\gamma > 0$. Это не так при больших θ, например при $\theta = \theta(0,13)$ и $\gamma < 0,03$ (см. таблицу 4).

Но при всех $\theta \in (\theta(0); \theta(0,151))$ и $\gamma \in (0, \Delta)$ все значения $\sigma(\theta, \gamma)$, рассчитанные по формулам (26), (27), (29), оказываются, как подтверждает таблица 4, превосходящими Δ.

Этим завершается доказательство теоремы 3.1. $\square$

(Таблица 4 вычислялась с более мелким шагом по γ и θ на 9 знаков. Приводимые числа округлены до 3 значащих цифр.)

Таблица 4

γ/θ	$\theta(0)$	$\theta(0.01)$	$\theta(0.03)$	$\theta(0.05)$	$\theta(0,07)$	$\theta(0.09)$	$\theta(0.11)$	$\theta(0.13)$	$\theta(0.015)$
0	0.283	0.286	0.295	0.305	0.317	0.331	0.347	0.365	0.385
0.01	0.287	0.290	0.298	0.307	0.318	0.331	0.346	0.363	0.382
0.03	0.296	0.298	0.303	0.311	0.320	0.331	0.344	0.359	0.376
0.06	0.310	0.310	0.313	0.318	0.324	0.333	0.343	0.355	0.369
0.09	0.324	0.324	0.324	0.326	0.330	0.335	0.343	0.352	0.363
0.12	0.340	0.338	0.336	0.335	0.336	0.339	0.344	0.351	0.359
0.15	0.357	0.354	0.349	0.346	0.345	0.345	0.348	0.352	0.358
0.18	0.375	0.371	0.364	0.358	0.355	0.353	0.353	0.355	0.358
0.21	0.394	0.389	0.380	0.372	0.366	0.362	0.360	0.359	0.360
0.24	0.424	0.408	0.397	0.387	0.379	0.373	0.369	0.366	0.365
0.27	0.435	0.428	0.415	0.403	0.394	0.386	0.379	0.374	0.371
Δ	0.436	0.429	0.416	0.404	0.395	0.386	0.380	0.375	0.371

3.24. Автор благодарит программистов А. Зельдина и Т. Хачатурову за помощь по контролю вычислений.

Литература

1. В. Бляшке, *Круг и шар.* Наука, М. (1967).
2. S. T. Yau, *Problem section.* Seminar of Differential Geometry (Ann. of Math. Studies **102**), Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1982), 669–706.
3. J. O'Rourk, C. A. Schevon, Preprint 27708-0129 Duke Univ., Durham, North Carolina (1993).
4. А. Д. Александров, *Выпуклые многогранники.* ГИТТЛ, М.–Л., 1950.

Zalgaller V. A. An isoperimetric problem for tetrahedra.

It is proved that a regular tetrahedron has the maximal possible surface area among tetrahedra with unit geodesic diameter of surface. An independent proof of O'Rourk–Schevon's theorem about polar points on a convex polyhedron is given. A. D. Aleksandrov's general problem on the area of a convex surface with fixed geodesic diameter is dicussed.

Weizmann Institute,
Israel

Поступило 23 ноября 2005 г.

E-mail: zalg@tarunz.org