Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 329, 2005 г.

М. А. Гущин

КОНИКА И M-КВИНТИКА С ОДНОЙ ТОЧКОЙ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Введение. Задача классификации плоских вещественных алгебраических кривых степени 7, распадающихся в произведение двух M-сомножителей степеней 2 и 5, рассматривалась А. А. Бинштейн и Г. М. Полотовским [1]. Был построен список всех логически возможных взаимных расположений – "топологических моделей" – и применялись некоторые классические запреты и элементарные построения.

Здесь предложен новый подход к перечислению допустимых моделей. Затем, с помощью основанного на теории зацеплений метода, предложенного С. Ю. Оревковым [2], удается доказать нереализуемость кривыми степени 7 существенной части рассматриваемых моделей. Также рассмотрены некоторые реализации моделей. В результате список моделей кривых, распадающихся в произведение двух M-сомножителей степеней 2 и 5, для которых вопрос о реализуемости алгебраическими кривыми остается открытым, удалось сократить до 100.

Автор благодарит Г. М. Полотовского за предложенную задачу и помощь в работе.

1. Постановка задачи. Ниже *M-квинтикой* называется неособая плоская вещественная алгебраическая кривая степени 5 на вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, которая состоит из 6 овалов (компонент, разбивающих $\mathbb{R}P^2$), расположенных вне друг друга, и нечетной ветви (компоненты, не разбивающей $\mathbb{R}P^2$). *Коникой* называется кривая степени 2, состоящая из одного выпуклого овала.

Рассматривается задача изотопической классификации взаимных расположений M-квинтики и коники в $\mathbb{R}P^2$ при следующих дополнительных условиях максимальности и общего положения:

Исследования поддержаны грантом Е02-1.0-199 Министерства образования РФ.

- пересекаются только нечетная ветвь M-квинтики и овал коники;
- количество точек пересечения нечетной ветви и овала максимально и все эти точки попарно различны;
- существует прямая в $\mathbb{R}P^2$, которая не пересекает конику, а квинтику пересекает в единственной точке α. Ниже эту прямую для краткости будем называть *бесконечно удаленной* и изображать как граничную окружность модели Пуанкаре плоскости $\mathbb{R}P^2$.

Мы разобьем эту задачу на три этапа: составим список всех логически возможных топологических моделей расположений исследуемого типа; докажем, что часть из этих расположений нельзя реализовать кривыми степени 7; попытаемся реализовать оставшиеся модели.

2. Составление списка *допустимых* **моделей.** Рассмотрим множество S_{10} всех перестановок длины 10:

$$S_{10} = \{(i_0, i_1, \dots, i_9) \mid \{i_0, \dots, i_p\} = \{0, \dots, 9\},$$

Все элементы S_{10} перечислены с помощью несложной рекурсивной процедуры, на каждом j-м уровне которой перебираются различные значения i_j. Выделим в S_{10} такие перестановки, у которых:

1. $i_0 = 0$ и $i_9 > 1$;
2. $i_1 \in \{1, 3\}$;
3. $i_j \equiv j \bmod 2$ для всех $j \in \{0, \dots, 9\}$;
4. $\forall j \neq k$ таких, что $j \equiv k \bmod 2$ выполняется:
   (a) либо $\langle i_j; i_{j+1}\rangle \subset \langle i_k; i_{k+1}\rangle$,
   (b) либо $\langle i_k; i_{k+1}\rangle \subset \langle i_j; i_{j+1}\rangle$,
   (c) либо $\langle i_j; i_{j+1}\rangle \cap \langle i_k; i_{k+1}\rangle = \varnothing$,

где $\langle a; b\rangle = \mathbb{Z} \cap [\min(a, b); \max(a, b)]$.

Мы не будем различать две перестановки $(i_0, \dots, i_9)$ и $(j_0, \dots, j_9)$, если

$$i_k = |i_9 - j_{9-k}| \bmod 10 \quad \text{для всех} \quad k \in \{0, \dots, 9\}.$$

Всего перестановок, удовлетворяющих свойствам 1–4, имеется 117, и только 70 из них различны в смысле указанного отношения эквивалентности. Каждой такой перестановке поставим в соответствие модель взаимного расположения нечетной ветви M-квинтики и овала коники следующим образом:

- разобьем модель овала коники на 10 равных частей и занумеруем точки деления, двигаясь по часовой стрелке;
- проведем модель нечетной ветви через точки $\alpha, i_0, \ldots, i_9$ в указанном в перестановке порядке (см. рис. 1[1]).

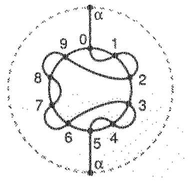


Рис. 1. Модель, отвечающая перестановке (0,1,2,9,8,7,6,3,4,5).

Очевидно, что в силу наложенных на перестановки ограничений полученные расположения будут попарно различны. Так, условие 1 исключает модели, полученные друг из друга поворотом, условие 2 и дополнительное отношение эквивалентности из пары симметричных друг другу моделей оставляет одну, а условия 3 и 4 позволяют провести модель нечетной ветви без самопересечений.

Для каждого полученного расположения перечислим компоненты связности множества $\mathbb{R}P^2 \setminus C$, где C – модель исследуемой кривой. Используем для обозначения этих областей заглавные латинские буквы (см. рис. 2). Распределив всевозможными допустимыми способами овалы по этим областям, мы получим список всех *допустимых* моделей кривых интересующего нас типа.

3. Запреты моделей: элементарные запреты. Запреты, использующие непосредственные топологические следствия теоремы Безу и теорему Брюзотти о независимости устранения простых двойных точек кривой, называются *элементарными*. Такие запреты подробно рассмотрены в [1]. Так, очевидным образом исключаются расположения, отвечающие перестановкам, перечисленным в таблице 1: для каждого такого рас-

[1]Чтобы не увеличивать размеры рисунков, ниже мы не стремимся всегда изображать точки пересечения нечетной ветви с бесконечно удаленной прямой диаметрально противоположными.

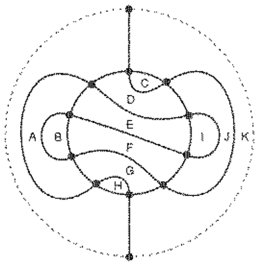


Рис. 2.

Таблица 1

0125438769	0127894563	0129836547	0143258769	0147658329
0165478329	0321458769	0321496785	0321678549	0321876549

положения можно выбрать прямую, которая будет пересекать модель кривой более чем в 7 точках.

Не реализуются также модели, отвечающие перестановкам, для которых

$$\exists k, l, m \mid k \equiv l \equiv m \equiv 1 \bmod 2 \quad \text{и} \quad \langle i_k; i_{k+1} \rangle \subset \langle i_l; i_{l+1} \rangle \subset \langle i_m; i_{m+1} \rangle,$$

поскольку для таких моделей, устраняя подходящим образом точки пересечения нечетной ветви M-квинтики и овала коники, можно получить гнездо глубины 3. Тогда прямая $\alpha\beta$, проходящая через внутреннюю точку α этого гнезда и внутреннюю точку β овала квинтики, пересечет кривую по крайней мере в 9 точках (см. рис. 3 и 4). Перестановки, отвечающие всем таким расположениям, перечислены в таблице 2.

Аналогичным образом доказывается, что в некоторых областях овалы M-квинтики располагаться не могут. При этом существенную роль играет выпуклость овала коники.

Таким образом, есть только 33 расположения, не запрещаемые элементарными методами. Все они перечислены в таблице 3. При этом свободные овалы M-квинтики не могут располагаться в необозначенных областях.

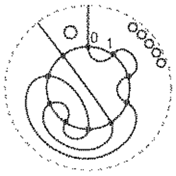


Рис. 3. Исходная модель.

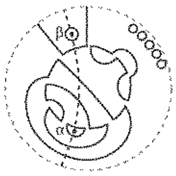
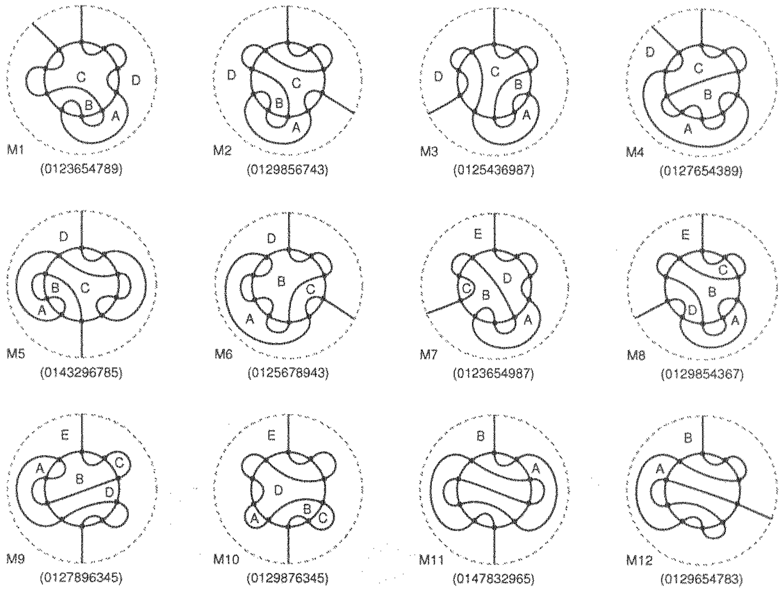


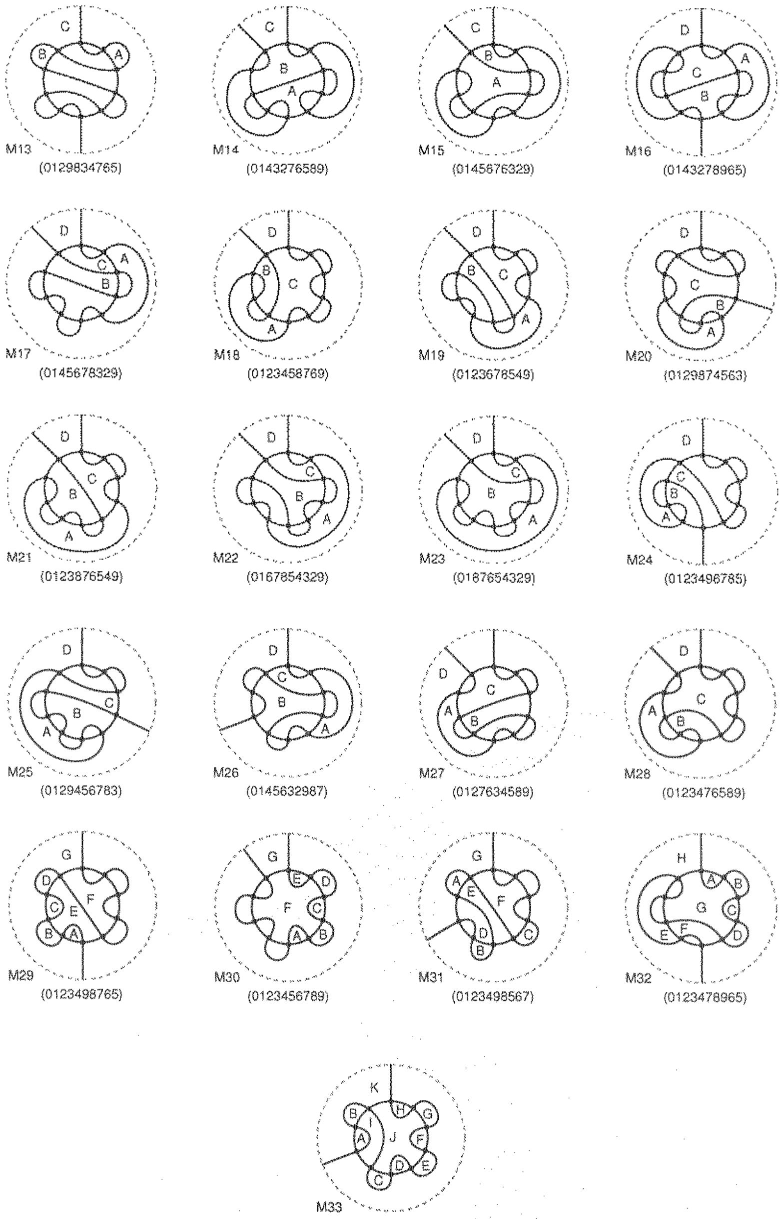
Рис. 4. После устранения особенностей.

Таблица 2

0123856749	0123874569	0125674389	0125876943	0127456389
0127658943	0129458763	0129476583	0165298347	0167834529
0167852349	0183456729	0183476529	0183654729	0185436729
0185672349	0185674329	0187234569	0187236549	0187254369
0187432569	0187456329	0187634529	0187652349	0321856749
0321874569	0367218549			

Таблица 3





M13 (0129834765)
M14 (0143276589)
M15 (0145676329)
M16 (0143278965)

M17 (0145678329)
M18 (0123458769)
M19 (0123678549)
M20 (0129874563)

M21 (0123876549)
M22 (0167854329)
M23 (0187654329)
M24 (0123496785)

M25 (0129456783)
M26 (0145632987)
M27 (0127634589)
M28 (0123476589)

M29 (0123498765)
M30 (0123456789)
M31 (0123498567)
M32 (0123478965)

M33 (0123456987)

4. Запреты моделей: метод Оревкова. Распределив овалы M-квинтики по перечисленным областям различными способами, мы получим более 2000 моделей кривых интересующего нас типа.

Применив метод запрета, предложенный и детально изложенный С. Ю. Оревковым [2], мы сократим этот список до 147 моделей. Идея метода состоит в следующем: с исследуемой моделью сопоставляется коса из 7 нитей так, что если эта модель реализуется *алгебраической* кривой степени 7, то коса должна быть квазиположительной; в качестве теста на квазиположительность применяется неравенство Мурасуги–Тристрама для замыкания этой косы. Рассмотрим алгоритм применения этого метода на примере расположения M11, у которого в области A располагаются все 6 овалов квинтики.

Выберем в $\mathbb{R}P^2$ точку P, не лежащую на модели кривой, так, что для заданного расположения существует пучок прямых с центром в P такой, что каждая прямая пучка пересекает модель кривой по крайней мере в 5 точках и существует прямая (обозначим ее через L), пересекающая модель кривой в 7 точках (см. рис. 5). Без ограничения общности можно считать, что никакие две простые двойные точки модели не лежат на одной прямой пучка. Выберем L за новую бесконечно удаленную прямую, т.е. расположим модель на проективной плоскости как показано на рисунке 6.

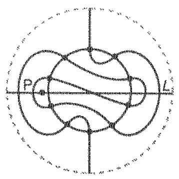


Рис. 5. Исходная модель.

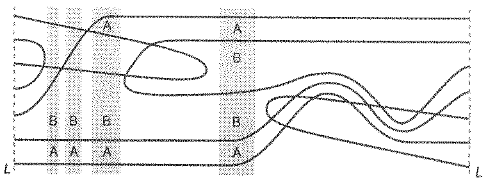


Рис. 6. “Развернутая” модель.

Двигаясь слева направо и используя блоки $\times_i$, $\subset_i$, $\supset_i$ и $\circ_i$ (см. рис. 7), закодируем полученную “развернутую” модель. При этом будем использовать запись χ_i для обозначения набора овалов квинтики $\circ_i \cdots \circ_i$, располагающихся в области χ, где $\chi \in \{A, B\}$. Для модели M11 кодировка имеет вид:

$$\times_4 \supset_5 A_2B_3 \times_3 A_2B_3 \times_4 A_2B_3A_5 \subset_3 \times_4\times_5 \supset_4 A_2B_3B_4A_5 \subset_1 \times_2 \times_3 \times_4 \times_4 \times_3 .$$

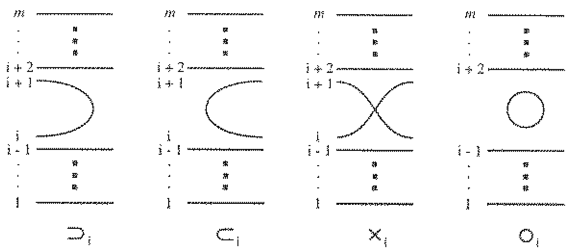


Рис. 7. Блоки, используемые для кодирования моделей.

Далее в полученной кодировке для каждой подпоследовательности $\supset_p\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k \subset_q$, где $\alpha\in\{\times,\ \circ\}$, следует рассматривать всевозможные перестановки символов $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$.

Закодированной модели, используя преобразования, описанные в [2], поставим в соответствие косу B из 7 нитей. При этом

$$B=\sigma_1^{\varepsilon_1}\ \sigma_2^{\varepsilon_2}\cdots\sigma_k^{\varepsilon_k},$$

где σ_i – стандартные образующие группы кос, а $\varepsilon_i=\pm1$.

Используем обозначения, введенные в [2]:

$\widehat{B}$ – ориентированное зацепление, полученное замыканием косы B;

$\sigma(\widehat{B})$ – сигнатура зацепления $\widehat{B}$;

$n(\widehat{B})$ – дефект зацепления $\widehat{B}$;

$e(B)=\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i$ – сумма всех показателей степеней в разложении косы B по σ_i.

Тогда неравенство Мурасуги–Тристрама (условие квазиположительности косы B) можно записать следующим образом:

$$\sigma(\widehat{B})+7-e(B)\leqslant n(\widehat{B})+1.$$

Для модели М11 с 6 овалами в области A для расположения, отвечающего коду

$$\times_4\supset_5\circ_2\circ_2\circ_2\circ_2\circ_2\circ_2\times_3\times_4\subset_3\times_4\times_5\supset_4\subset_1\times_2\times_3\times_4\times_4\times_3,$$

вычисления дают:

$$\sigma(\widehat{B})=0,\quad e(B)=3,\quad n(\widehat{B})=3,$$

неравенство выполняется, а значит модель не запрещается этим методом. Применяя описанную процедуру для всех моделей, перечисленных в таблице 3, получим, что только 153 моделей не запрещаются методом Оревкова. Все такие модели перечислены в таблице 4.

Таблица 4

Модель	$\exists$	A	B	C	D	E
M1			3		3	
			2	3	1	
M2	1, 2		2		4	
M3			2	2	2	
M4			2		4	
			1	3	2	
M5	1, 2	2		4		
	1, 2		2	2	2	
M6			3		3	
			1	2	3	
M7		2			4	
			4			2
			2		2	2
M8	1, 2		4			2
M9		2			3	1
			5	1		
	3		2		1	3
M10					6	
						6
		5				1
		2		4		
	3	1			4	1
		1			2	3
		1				5
			4			2
			4		1	1
			2			4

Модель	$\exists$	A	B	C	D	E
M10			4			2
			4		1	1
			2			4
	3		1		1	4
				5		1
				1		5
	1, 2				2	4
M11	1	6				
	1, 3	2	4			
M12	1, 3	2	4			
	1, 3		6			
M13	1, 2, 3			6		
	1	5		1		
	1, 3	1		5		
	1		5	1		
	1, 3		1	5		
M14	1, 2	6				
M15		6				
		2	4			
M16	1, 2		2	2	2	
M17			5		1	
		2		3	1	
			1	4	1	
M18			5		1	
	1, 2	2		3	1	
	1, 2		2	1	3	
M19			3		3	
M20	1, 2	2		2	2	
	1, 2		2		4	
M21			4		2	
			1	1	4	

Модель	$\exists$	A	B	C	D	E	F	G
M22			4		2			
				4	2			
M23			5		1			
			1	4	1			
M24			5		1			
	$1,2$	2		3	1			
M25			3		3			
			1		5			
				3	3			
M26			2		4			
				2	4			
M27	3			3	3			
M28	$1,2$		5		1			2
	$1,2$		2	1	3			2
M29		4				2		
		3				1		2
		2				2		2
		2						4
			3					3
				4				2
				2		2		2
					4			2
						5	1	
						4	2	
						3	1	2
						3	3	
						2		4
						2	2	2
								6
						6		
	$1,2,3$	1				1		4
	$1,2,3$		1			4		1
	$1,2$				1	4		1
	$1,2,3$					4		2
	$1,2,3$					1	1	4

Модель	$\exists$	A	B	C	D	E	F	G
M30		3					1	2
				2				4
						4		2
						3	1	2
						2	2	2
						2		4
							2	4
							6	
								6
	$1,2,3$	4						2
	$1,2,3$	1					1	4
	$1,2$		1				4	1
	$1,2$			1			1	4
	$1,2$					1	1	4
	$1,2,3$						4	2
M31				5			1	
				1			1	4
					4	1		1
					3	2		1
					3			3
	3				2	1		3
						4	1	1
						2	1	3
						1	2	3
							5	1
							3	3
	$1,2$					3		3
	$1,2$						1	5

Модель	$\exists$	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M32		4						1	1			
		3						2	1			
		3							3			
		2						1	3			
	$1,2$					2	3		1			
							3	2	1			
	$1,2$	1						2	3			
	$1,2$				1			5				
	$1,2$							5	1			
	$1,2,3$						1	2	3			
M33		5										1
		3										3
		1										5
			4									2
			3									3
				3								3
				4								2
					3							3
	$1,2$				1							5
						1					5	
						3						3
	$1,2$					1					3	2
							3					3
							1				2	3
								4				2
								3				3
									5			1
									3			3
	$1,2$								1			5
										3	2	1
										3		3
	$1,2$									2	1	3
	3									1	2	3
	$1,2,3$										3	3

5. Реализация моделей. Ранее для построения кривых исследуемого типа применялись модификации классического метода

Харнака и следствия из полученной в [3] классификации взаимных расположений М-кривой степени 5 и прямой. В таблице 4 модели кривых, построенных таким способом, в колонке "$\exists$" помечены цифрой 1.

Используем полученную в [4] классификацию максимальных взаимных расположений пары прямых и M-квинтики при условии, что в каждой из компонент дополнения $\mathbb{R}P^2$ к данным прямым имеется только одна дуга нечетной ветви с концами на разных прямых. Известно, что только 20 моделей таких кривых реализуются алгебраическими кривыми степени 7. Устраняя точку пересечения прямых двумя возможными способами получим 39 попарно различных моделей кривых исследуемого типа. В таблице 4 модели таких кривых в колонке "$\exists$" помечены цифрой 2.

Цифрой 3 в колонке "$\exists$" таблицы 4 помечены модели кривых, которые нам удалось реализовать, применяя модифицированный метод кусочного конструирования, подробно описанный в [5]. К сожалению, таким способом пока удалось построить только 21 кривую исследуемого типа. Эти построения будут описаны в отдельной работе.

Литература

1. A. A. Binstein, G. M. Polotovskii, *On the mutual arrangements of a conic and a quintic in the real projective plane.* — Amer. Math. Soc. Transl. **200** (2000), 63–72.
2. S. Yu. Orevkov, *Link theory and oval arrangements of real algebraic curves.* — Topology **38** (1999), 779–810.
3. Г. М. Полотовский, *Каталог M-распадающихся кривых 6-го порядка.* — ДАН СССР **236** (1977), 548–551.
4. A. B. Korchagin, G. M. Polotovskiy, *On arrangements of a plane real quintic curve with respect to a pair of lines.* — Commun. Contemp. Math. **5** (2003), 1–24.
5. М. А. Гущин, А. Н. Коробейников, Г. М. Полотовский, *Построение взаимных расположений кубики и квартики методом кусочного конструирования.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **267** (2000), 119–132.

Gushchin M. A. A conic and an M-quintic with a point at infinity.

Topological classification of plane projective real algebraic curves of degree 7 that split into a product of two M-factors of degrees 2 and 5 is considered. A list of 153 possible topological models, 53 of which are realized, is presented. Proofs are sketched.

Нижегородский
государственный университет

Поступило 1 ноября 2002 г.