Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 328, 2005 г.

Н. В. Смородина

КРАТНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ И "НЕПУАССОНОВСКИЕ" ТРАНСФОРМАЦИИ ГАММА-МЕРЫ

1. Введение

Пусть G – метрическое пространство, $\mathcal{B}$ – его борелевская σ-алгебра, $\mathcal{B}_0$ – кольцо ограниченных борелевских подмножеств G. Далее, пусть Π – σ-конечная мера на $(G, \mathcal{B})$, причем $\Pi(V) < \infty$ для любого $V \in \mathcal{B}_0$.

Через $\mathcal{X} = \mathcal{X}(G)$ мы обозначим пространство конфигураций на G. По определению

$$\mathcal{X}(G) = \{X \subset G : |X \cap V| < \infty \quad \text{для любого} \quad V \subset \mathcal{B}_0\},$$

где через $|A|$ обозначено число точек в множестве A. На пространстве $\mathcal{X}$ мы будем рассматривать топологию $\mathcal{O}(\mathcal{X})$, – слабейшую топологию, такую, что все функционалы $\mathcal{X} \to \mathbb{R}$

$$X \mapsto \sum_{x \in X} f(x)$$

непрерывны для любых непрерывных функций $f : G \to \mathbb{R}$ с ограниченным носителем. Борелевскую σ-алгебру, порожденную $\mathcal{O}(\mathcal{X})$, мы будем обозначать через $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Это наименьшая σ-алгебра для которой отображения

$$X \mapsto |X \cap V|$$

измеримы для любого $V \subset \mathcal{B}_0$.

Далее, мы говорим, что вероятностная мера P на $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ есть пуассоновская мера с интенсивностью Π, если для каждого $V \in \mathcal{B}_0$

$$P(X : |X \cap V| = k) = e^{-\Pi(V)} \frac{\Pi(V)^k}{k!}, \; k = 0, 1, 2, \ldots,$$

Работа выполнена при поддержке гранта DFG 436 RUS 113/823.

и для непересекающихся множеств V_j, $j = 1, 2, \dots, n$ случайные величины ν_j, где $\nu_j(X) = |X \cap V|$ независимы. Подробнее см. [1, 7].

Нас будут интересовать только пуассоновские меры, удовлетворяющие условию $\Pi(G) = \infty$. Лишь в этом случае с вероятностью 1 конфигурация содержит бесконечное число точек.

Всюду далее мы предполагаем, что пространство G имеет вид прямого произведения $G = S \times [0, \infty)$, где S – полное сепарабельное метрическое пространство, а мера Π имеет вид

$$\Pi(d\theta, dx) = \pi(d\theta)\gamma(dx), \quad \theta \in S, \quad x \in [0, \infty),$$

где π – конечная мера на S, $(\pi(S) < \infty)$, а мера γ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега λ. Мы также предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ соответствующая плотность $p(x) = \frac{d\gamma}{d\lambda}(x)$ строго положительна, ограничена и непрерывна на множестве $[\varepsilon, \infty)$, а мера Π удовлетворяет условию

$$\int\limits_G \min(x, 1) d\Pi < \infty. \tag{1}$$

Из (1) следует, что с вероятностью 1 проекция конфигурации X на $[0, \infty)$ имеет единственную предельную точку 0, и для каждого $\varepsilon > 0$ выполнено $|X \cap G_\varepsilon| < \infty$, где $G_\varepsilon = S \times [\varepsilon, \infty)$. Соответствующий класс пуассоновских мер играет важную роль в теории вероятностей, в частности, используются в представлении процессов с независимыми приращениями (см. [4]).

Пусть F – измеримое отображение $F : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, а PF^{-1} – образ меры P под действием отображения F. По определению, для любого $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$

$$PF^{-1}(A) = P(F^{-1}(A)). \tag{2}$$

Для многих задач теории вероятностей представляет интерес нахождение достаточных условий абсолютной непрерывности трансформированной меры PF^{-1} относительно исходной меры P, а также нахождение соответствующей плотности Радона–Никодима $\frac{dPF^{-1}}{dP}$.

Первый результат об абсолютной непрерывности пуассоновских мер в пространстве конфигураций (в $\mathbb{R}^n$) принадлежит А. В. Скороходу [3] (см. также [11]). В его работе рассматривались преобразования пространства конфигураций, порожденные некоторым диффеоморфизмом f так, что конфигурация

$X = \{x\}_{x \in X}$ под действием этого преобразования переходит в конфигурацию
$$F(X) = \{f(x)\}_{x \in X}. \tag{3}$$

Легко показать, что под действием отображения указанного вида пуассоновская мера с интенсивностью Π переходит в пуассоновскую же меру с интенсивностью Πf^{-1}. Заметим, что преобразования конфигураций (3) характеризуются тем, что "новое" положение каждой точки конфигурации зависит только от ее "старого" положения и не зависит от положения остальных точек конфигурации.

Далее, в работе [12] Вершика и Цилевич рассматривались трансформации гамма-меры, представляющей из себя пуассоновскую меру с интенсивностью Π вида
$$\Pi(d\theta, dx) = \pi(d\theta)\frac{e^{-x}}{x}dx.$$
В этой работе было показано, что гамма-мера обладает свойством квазиинвариантности относительно всех преобразований подобия, т.е. преобразований вида (3) с функцией $f(\theta, x) = (\theta, k(\theta, x)x)$ (конфигурация $X = \{(\theta, x)\}$ под действием этого отображения переходит в конфигурацию $Y = \{(\theta, k(\theta)x)\}$), где измеримая функция $k(\theta)$ предполагается положительной и удовлетворяющей условию
$$\int\limits_S |\log k(\theta)| \pi(d\theta) < \infty.$$

В настоящей работе будут также рассмотрены трансформации гамма-меры, переводящие конфигурацию $X = \{(\theta, x)\}$ в конфигурацию $H = \{(\theta, kx)\}$, но коэффициент подобия k будет зависеть не только от координаты $\theta \in S$, но также и от остальных точек конфигурации, т.е. $k = k(\theta, X)$. Будет показано, что при определенных предположениях относительно функции k трансформированная мера будет абсолютно непрерывна относительно исходной пуассоновской меры (хотя сама она, вообще говоря, уже не будет пуассоновской), а также будет приведено выражение для соответствующей плотности Радона–Никодима.

Для решения данной задачи мы используем подход, предложенный в [10] с использованием пуассоновского аналога кратного стохастического интеграла. Статья организована следующим образом: в параграфе 2 мы приведем некоторые результаты из [10] с модификацией, необходимой для целей настоящей статьи, в параграфе 3 получим достаточные условия абсолютной непрерывности, в параграфе 4 рассмотрим проблемы, связанные с заданием отображений, действующих из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{X}$, в параграфе 5 опишем семейство преобразований, переводящих гамма-меру в абсолютно непрерывную.

2. Кратные стохастические интегралы

Сначала приведем некоторые результаты из [10].

Через $\mathcal{X}_0$ мы будем обозначать пространство всех конечных конфигураций. Для этого пространства мы имеем представление вида

$$\mathcal{X}_0 = \bigcup_{k=0}^{\infty} G^k/\pi_k, \tag{4}$$

где $G^k = G\times G\times\cdots\times G$ (k раз), а через G^k/π_k обозначено фактор-пространство G^k относительно группы перестановок π_k. В этом представлении слагаемое с $k=0$ соответствует пустой конфигурации, слагаемое с $k=1$ соответствует одноточечной конфигурации, следующее слагаемое соответствует двухточечной конфигурации и так далее.

Важно отметить, что на $S\times[0,\infty)$ мы будем рассматривать $S\times\{0\}$ как поглощающее состояние. Для любого $\theta\in S$ точка $(\theta,0)$ исчезает из конфигурации. Это означает, что сначала мы снабжаем $\mathcal{X}_0$ топологией несвязного объединения а затем для любого $k\in\mathbb{N}$, $\theta\in S$ мы отождествим конфигурации:

$$\{(\theta_1,x_1),\ldots,(\theta_k,x_k),(\theta_{k+1},0)\} = \{(\theta_1,x_1),\ldots,(\theta_k,x_k)\}. \tag{5}$$

Другими словами, для любого k мы приклеиваем $G^k\times(S\times\{0\})$ к G^k.

Пусть $f:\mathcal{X}_0\to\mathbb{R}$ – функция на $\mathcal{X}_0$. Через f_k мы будем всегда обозначать сужение функции f на множество k-точечных конфигураций, т.е.

$$f_k = f\big|_{G^k/\pi^k},$$

а для самой функции f будем использовать символическую запись

$$f = \{f_k\}_{k=0}^{\infty}.$$

По определению f_k представляет из себя симметричную функцию на G^k. Из условия (5) следует, что для любых $k \in \mathbb{N}$, $\theta \in S$

$$f_{k+1}((\theta_1, x_1), \dots, (\theta_k, x_k), (\theta_{k+1}, 0)) = f_k((\theta_1, x_1), \dots, (\theta_k, x_k)). \quad (6)$$

Следующим шагом мы определим последовательность разностных операторов Δ^k, $k \in \mathbb{N}$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ область определения оператора Δ^k есть множество функций $\{f : G^k \to \mathbb{R}\}$. Для $k = 1$ и $f : G \to \mathbb{R}$ по определению положим

$$\Delta f(\theta, x) = \Delta^1 f(\theta, x) = f(\theta, x) - f(\theta, 0). \quad (7)$$

Аналогично, для функции $f : G^k \to \mathbb{R}$ положим

$$\Delta^k f = \Delta_{x_1} \Delta_{x_2} \dots \Delta_{x_k} f. \quad (8)$$

По определению, $\Delta^k f$ есть приращение функции f на прямоугольнике $[0, x] \subset [0, \infty)^k$, $x = (x_1, \dots, x_k)$ (параметр $\theta \in S^k$ фиксирован).

Следующим шагом мы определим кратные стохастические интегралы. Первоначально мы определим их как функции на $\mathcal{X}_0$.

Определение. *Пусть $g = g(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_k)$, $\overline{x}_i = (\theta_i, x_i)$ – симметричная функция на G^k. Мы определим кратный стохастический интеграл $I_k(g)$ следующим образом:*

$$I_k(g)(X) = \sum_{\{\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_k\} \subset X} \Delta^k g(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_k), \quad (9)$$

где $X \in \mathcal{X}_0$. Суммирование в последнем выражении проводится по всем k-точечным подмножествам множества X.

Если $k = 0$, то $g = g_0 = const$ и по определению мы полагаем $I_0(g) = g_0$.

В соответствии с данным определением, при $k = 1$ мы имеем

$$I_1(g)(X) = \sum_{\overline{x} = (\theta, x) \in X} \Delta g(\overline{x}) = \sum_{\overline{x} \in X} (g(\theta, x) - g(\theta, 0))$$

при $k = 2$

$$\begin{aligned} I_2(g)(X) = &\sum_{\{\overline{x}_1, \overline{x}_2\} \subset X} \Delta^2 g(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = \\ = &\sum_{\{\overline{x}_1, \overline{x}_2\} \subset X} [g((\theta_1, x_1), (\theta_2, x_2)) - g((\theta_1, 0), (\theta_2, x_2)) - \\ &- g((\theta_1, x_1), (\theta_2, 0)) + g((\theta_1, 0), (\theta_2, 0))]. \end{aligned}$$

Лемма 1. *Для любой симметричной функции $g : G^k \to \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$|I_k(g)| \leqslant I_k(|\Delta^k g|). \tag{10}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} |I_k(g)(X)| &= |\sum_{\{\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_k\}\subset X} \Delta^k g(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_k)| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{\{\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_k\}\subset X} |\Delta^k g(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_k)| = \\ &= \sum_{\{\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_k\}\subset X} \Delta^k |\Delta^k g(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_k)| = I_k(|\Delta^k g|). \end{aligned}$$

□

Следующая теорема показывает, что каждая функция, определенная на множестве конечных конфигураций, может быть представлена в виде суммы стохастических интегралов.

Теорема 1. *Для любой функции $f : \mathcal{X}_0 \to \mathbb{R}$ справедливо соотношение*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} I_k(f_k).$$

Доказательство. Определим сначала граничные операторы δ_i, $i = 1,\ldots,k$, $k \in \mathbb{N}$. Функция $\delta_i f_k$ получается из f_k подстановкой $x_i = 0$. Очевидно, $\delta_i = 1 - \Delta_i$, где через Δ_i обозначен оператор Δ, примененный по переменной x_i.

Для любого конечного множества I натуральных чисел положим

$$\delta_I = \prod_{i\in I} \delta_i, \qquad \Delta_I = \prod_{i\in I} \Delta_i.$$

Для каждого фиксированного n через CI будем обозначать множество

$$\{1,\ldots,n\} \setminus I = \{i \in \{1,\ldots,n\} : i \notin I\}.$$

Заметим, что для любой функции f функция $\delta_I f_n$ зависит только от переменных (θ_i, x_i), $i \in CI$.

Пусть $|X| = n$, $X = \{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$, $\overline{x}_i = (\theta_i, x_i)$. Используя тождество

$$1 = \prod_{i=1}^{n}(\delta_i + \Delta_i) = \sum_I \Delta_I \delta_{CI}, \tag{11}$$

мы получим

$$\begin{aligned} f(X) = f_n(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) &= \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}} \Delta_I \delta_{CI} f_n = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}, |I|=k} \Delta_I \delta_{CI} f_n = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{\{j_1,\ldots,j_k\} \subset \\ \subset \{1,\ldots,n\}}} \Delta^k f_k(\overline{x}_{j_1}, \ldots, \overline{x}_{j_k}) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} I_k(f_k) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k(f_k). \end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

Наша следующая цель – продолжить стохастический интеграл I_k с $\mathcal{X}_0$ на $\mathcal{X}$. Очевидно, что это можно сделать непосредственно (используя (8)) только в случае, когда носитель функции g есть компактное подмножество G^k. В противном случае мы можем продолжить I_k только P-п.н. Мы сконструируем L_1-расширение, а не L_2, как это было сделано в работе [10].

Для каждых $k > 0$ и симметричной функции $f : G^k \to \mathbb{R}$ определим полунорму

$$\|f\|_k = \int_{G^k} |\Delta^k f| d\Pi^k.$$

Ясно, что для любого $k > 0$

$$\left|\int_{G^k} \Delta^k f d\Pi^k\right| \leqslant \|f\|_k. \tag{12}$$

Важно отметить (это в дальнейшем мы будем многократно использовать), что полунорма $\|f\|_k$ равна нулю для всех функций f вида

$$f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k) = \sum_{j=0}^{k-1}\Big(\sum_{i_1 < \cdots < i_j} \varphi_j(\overline{x}_{i_1}, \ldots, \overline{x}_{i_j})\Big),$$

т.е. $\|f\|_1 = 0$ если $f = \varphi_0 = const$, $\|f\|_2 = 0$ если $f(\overline{x}_1, \dots \overline{x}_k) = \varphi_0 + \sum_{i=1}^k \varphi_1(\overline{x}_i)$ и так далее.

Далее, нам понадобится оценка полунормы $\|f\|_k$. Рассмотрим сначала случай $k = 1$. Для функции $f : G \to \mathbb{R}$ и произвольных $\varepsilon > 0$ и $\theta \in S$ имеем

$$\int\limits_0^\infty |\Delta f(\theta, x)|\gamma(dx) = \int\limits_0^\varepsilon |\Delta f(\theta, x)|\gamma(dx) + \int\limits_\varepsilon^\infty |\Delta f(\theta, x)|\gamma(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x \leqslant \varepsilon} |f'| \cdot c(\varepsilon) + \int\limits_\varepsilon^\infty |\Delta f(\theta, x)|\gamma(dx),$$

где $c(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon x\gamma(dx)$.

Отметим, что величина $\sup_{x \leqslant \varepsilon} |f'|$ зависит от переменной $\theta \in S$. Так как $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, то для фиксированного $\theta \in S$ имеем

$$\int\limits_0^\infty |\Delta f(\theta, x)|\gamma(dx) \leqslant \inf_{\varepsilon > 0} (\sup_{x \leqslant \varepsilon} |f'| \cdot c(\varepsilon) + \int\limits_\varepsilon^\infty |\Delta f(\theta, x)|\gamma(dx)).$$

Интегрируя по $\theta \in S$, получаем

$$\|f\|_1 = \int\limits_G |\Delta f(\theta, x)|\Pi(d\theta, dx) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_S \pi(d\theta) \inf_{\varepsilon > 0} (\sup_{x \leqslant \varepsilon} |f'| \cdot c(\varepsilon) + \int\limits_\varepsilon^\infty |\Delta f(\theta, x)|\gamma(dx)). \qquad (13)$$

Для $k > 1$ соответствующая полунорма $\|\cdot\|_k$ оценивается совершенно аналогично. Именно, пусть функция $f : G^k \to \mathbb{R}$. Оценим сначала $\int_{[0,\infty)^k} |\Delta^k f| d\gamma^k$ при фиксированных $\theta_1, \dots, \theta_k \in S$. Для произвольных фиксированных $\varepsilon_1 > 0, \dots, \varepsilon_k > 0$ разобьем область интегрирования $[0, \infty)^k$ на 2^k дизъюнктных областей, индексированных различными подмножествами I множества $\{1, \dots, k\}$, т.е.

$$[0, \infty)^k = \bigcup_{I \subset \{1, \dots, k\}} A_I^\varepsilon, \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k).$$

В этом представлении множество A_I^ε состоит из таких $(x_1,\dots,x_k) \in [0,\infty)^k$, что $x_i \leqslant \varepsilon_i$ для $i \in I$ и $x_i > \varepsilon_i$ для $i \notin I$. Переменные $x_i, i \in I$ условно назовем "малыми", а переменные $x_i, i \notin I$ – "большими". Смысл приведенных далее оценок очень прост – по "малым" переменным мы оцениваем приращение функции через максимум производной, умноженный на приращение аргумента, а по "большим" не делаем ничего, так как мера γ имеет особенность только в окрестности нуля.

Для $I = \{i_1,\dots,i_j\} \subset \{1,\dots,k\}$ обозначим

$$\partial_I f = \frac{\partial^j f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_j}}.$$

На множестве A_I^ε имеем

$$|\Delta^k f| \leqslant \sup_{\prod\limits_{i\in I}[0,\varepsilon_i]} |\Delta_{CI}\partial_I f| \cdot \prod_{i\in I} x_i$$

(здесь $CI = \{1,\dots,k\}\setminus I$), а Δ_{CI} означает применение оператора Δ по переменным $x_i,\ i \in CI$).

С учетом последней оценки получаем

$$\int\limits_{[0,\infty)^k} |\Delta^k f| d\gamma^k = \sum_{I\subset\{1,\dots,k\}} \int\limits_{A_I^\varepsilon} |\Delta^k f| d\gamma^k \leqslant$$

$$\sum_{I\subset\{1,\dots,k\}} \int\limits_{\prod\limits_{j\in CI}[\varepsilon_j,\infty)} \sup_{\prod\limits_{i\in I}[0,\varepsilon_i]} |\Delta_{CI}\partial_I f| d\gamma^{|CI|} \cdot \prod_{i\in I} c(\varepsilon_i). \tag{14}$$

Далее, так как $\varepsilon = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)$ в (14) было произвольно, мы имеем

$$\int\limits_{[0,\infty)^k} |\Delta^k f| d\gamma^k \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{\varepsilon>0} \Big(\sum_{I\subset\{1,\dots,k\}} \int\limits_{\prod\limits_{j\in CI}[\varepsilon_j,\infty)} \sup_{\prod\limits_{i\in I}[0,\varepsilon_i]} |\Delta_{CI}\partial_I f| d\gamma^{|CI|} \cdot \prod_{i\in I} c(\varepsilon_i)\Big).$$

Интегрируя последнее неравенство по переменным $\theta_1,\dots,\theta_k$, получаем

$$\|f\|_k = \int\limits_{G^k} |\Delta^k f| d\Pi^k \leqslant$$

$$\int\limits_{S^k} d\pi^k \big(\inf_{\varepsilon>0} \big(\sum_{I\subset\{1,\dots,k\}} \int\limits_{\prod\limits_{j\in CI}[\varepsilon_j,\infty)} \sup_{\prod\limits_{i\in I}[0,\varepsilon_i]} |\Delta_{CI}\partial_I f| d\gamma^{|CI|} \cdot \prod_{i\in I} c(\varepsilon_i) \big) \big). \quad (15)$$

Для каждой функции $f : \mathcal{X}_0 \to \mathbb{R}$ и произвольного положительного числа $\varepsilon > 0$ мы определим аппроксимирующую функцию $f_\varepsilon : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ формулой

$$f_\varepsilon(X) = f(X \cap G_\varepsilon), \qquad (16)$$

где, как и ранее, $G_\varepsilon = S \times [\varepsilon, \infty) \subset G$.

Далее, мы будем говорить, что измеримая функция $f : \mathcal{X}_0 \to \mathbb{R}$, $f = \{f_k\}_{k=0}^\infty$ принадлежит пространству FA, если конечна следующая норма

$$\|f\|_{FA} = \sum_{k=0}^\infty \frac{\|f_k\|_k}{k!}. \qquad (17)$$

Отметим, что в силу условия (6) $\|\cdot\|_{FA}$ уже норма, а не полунорма.

Теорема 2. *Если $f \in FA$, то для любого $\varepsilon > 0$*

$$\mathbb{E} f_\varepsilon = \int f_\varepsilon dP = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \int\limits_{G_\varepsilon^k} \Delta^k f_k d\Pi^k. \qquad (18)$$

Доказательство. Имеем

$$\int f_\varepsilon dP = e^{-\Pi(G_\varepsilon)} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \int\limits_{G_\varepsilon^k} f_k d\Pi^k. \qquad (19)$$

Используя (7), получаем

$$\int\limits_{G_\varepsilon^k} f_k d\Pi^k = \sum_I \Pi(G_\varepsilon)^{|I|} \int\limits_{G_\varepsilon^{|CI|}} \Delta_{CI}\delta_I f_k \prod_{i\in CI} \Pi(d\overline{x}_i) =$$

$$= \sum_{j=0}^k \Pi(G_\varepsilon)^j \binom{k}{j} \int\limits_{G_\varepsilon^{k-j}} \Delta^{k-j} f_{k-j} d\Pi^{k-j}.$$

Подставляя это выражение в (19) мы получим

$$\int f_\varepsilon dP = e^{-\Pi(G_\varepsilon)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (\Pi(G_\varepsilon))^{k-l} \binom{k}{k-l} \int\limits_{G_\varepsilon^l} \Delta^l f_l d\Pi^l =$$

$$= e^{-\Pi(G_\varepsilon)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=l}^{\infty} \frac{\Pi(G_\varepsilon))^{k-l}}{(k-l)!} \int\limits_{G_\varepsilon^l} \Delta^l f_l d\Pi^l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \int\limits_{G_\varepsilon^l} \Delta^l f_l d\Pi^l.$$

□

Следствие. *Мы имеем*

$$\mathbb{E}(I_k(g))_\varepsilon = \frac{1}{k!} \int\limits_{G_\varepsilon^k} \Delta^k g d\Pi^k. \tag{20}$$

Далее мы покажем, что для любой $f \in FA$ аппроксимирующие функции (16) сходятся в L_1 к некоторой продолженной функции $f^{\sim}$. Сначала мы рассмотрим эту проблему для стохастических интегралов.

Теорема 3. *Пусть $g : G^k \to \mathbb{R}$ – измеримая симметричная функция и пусть $||g||_k < \infty$. Тогда существует следующий L_1-предел:*

$$(L_1) \lim_{\varepsilon \to 0} (I_k(g))_\varepsilon = I_k(g).$$

Замечание. Мы будем называть этот предел продолженным стохастическим интегралом и сохраним для него то же обозначение $I_k(g)$.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ через g_ε обозначим функцию

$$g_\varepsilon((\theta_1, x_1), \dots, (\theta_k, x_k)) = g((\theta_1, x_1 \mathbf{1}_{[\varepsilon,\infty)}(x_1)), \dots, (\theta_k, x_k \mathbf{1}_{[\varepsilon,\infty)}(x_k))),$$

где $\mathbf{1}_{[\varepsilon,\infty)}$ есть индикаторная функция множества $[\varepsilon, \infty)$.

Нетрудно показать, что

$$\Delta^k g_\varepsilon = \Delta^k g \cdot \mathbf{1}_{G_\varepsilon^k} \tag{21}$$

и

$$(I_k(g))_\varepsilon = I_k(g_\varepsilon).$$

Пусть $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Имеем

$$\mathbb{E}|(I_k(g))_{\varepsilon_1} - (I_k(g))_{\varepsilon_2}| = \mathbb{E}|(I_k(g) - I_k(g_{\varepsilon_2}))_{\varepsilon_1}| =$$

$$= \mathbb{E}|(I_k(g - g_{\varepsilon_2}))_{\varepsilon_1}|.$$

Учитывая (10), (12), (20) и (21), получаем

$$\mathbb{E}|(I_k(g - g_{\varepsilon_2}))_{\varepsilon_1}| \leqslant \mathbb{E}(I_k(|\Delta^k(g - g_{\varepsilon_2})|))_{\varepsilon_1} =$$

$$= \frac{1}{k!} \int\limits_{G^k_{\varepsilon_1}} \Delta^k(|\Delta^k(g - g_{\varepsilon_2})|) d\Pi^k = \frac{1}{k!} \int\limits_{G^k_{\varepsilon_1}} |\Delta^k(g - g_{\varepsilon_2})| d\Pi^k =$$

$$= \frac{1}{k!} \int\limits_{G^k_{\varepsilon_1} \setminus G^k_{\varepsilon_2}} |\Delta^k g| d\Pi^k \underset{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Используя критерий Коши, получаем утверждение теоремы. □

Следующим шагом мы построим L_1 продолжение произвольной функции $f \in FA$.

Теорема 4. *Для любой функции* $f = \{f_k\}_{k=0}^{\infty} \in FA$ *существует* L_1*-предел*

$$(L_1) \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon = f^{\sim}$$

и

$$f^{\sim} = \sum_{k=0}^{\infty} I_k(f_k). \tag{22}$$

Заметим, что в (22) мы используем продолженный (в смысле теоремы 3) стохастический интеграл $I_k(f_k)$.

Доказательство. Используя теорему 1 и (16) получим

$$f_\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} (I_k(f_k))_\varepsilon.$$

Каждый член этой суммы сходится к $I_k(f_k)$ при $\varepsilon \to 0$. В силу (10) и (20) имеем

$$\mathbb{E}|(I_k(f_k))_\varepsilon| \leqslant \mathbb{E}(I_k(|\Delta^k f_k|))_\varepsilon = \frac{1}{k!} \int\limits_{G^k_\varepsilon} |\Delta^k f_k| d\Pi^k \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k!} \int\limits_{G^k} |\Delta^k f_k| d\Pi^k = \frac{1}{k!} \|f_k\|_k.$$

Теорема доказана. □

Следствие. *Для* $F \in FA$ *имеем*

$$\mathbb{E} f^{\sim} = \int f^{\sim} dP = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{G^k} \Delta^k f_k d\Pi^k. \tag{23}$$

Доказательство. Для доказательства достаточно устремить ε к нулю в (18). Наличие суммируемой мажоранты следует из (12). □

3. Продолжение отображений с $\mathcal{X}_0$ на $\mathcal{X}$

В этом параграфе мы опишем удобный способ задания измеримых отображений $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$. Изначально мы задаем отображение на множестве конечных конфигураций из $\mathcal{X}_0$ в $\mathcal{X}_0$ а затем, используя результаты параграфа 2, продолжаем его с $\mathcal{X}_0$ на $\mathcal{X}$. Важно отметить, что мы всегда рассматриваем отображения, которые могут изменять только вещественную координату каждой точки конфигурации, т.е. конфигурация $X = \{(\theta_1, x_1), (\theta_2, x_2), \dots\}$ (конечная или счетная) отображается в конфигурацию $Y = \{(\theta_1, y_1), (\theta_2, y_2), \dots\}$.

Пусть $\Psi = \Psi(\overline{x}, X)$ – измеримая функция аргументов $\overline{x} = (\theta, x) \in G$, $X \in \mathcal{X}_0$ и принимающая значения в $[0, \infty)$. Как и ранее, через $\Psi_k(\overline{x}, \cdot)$ будем обозначать сужение функции $\Psi(\overline{x}, \cdot)$ на G^k/π_k, т.е. $\Psi(\overline{x}, \cdot) = \{\Psi_k(\overline{x}, \cdot)\}_{k=0}^{\infty}$, и будем предполагать, что для любого $\overline{x} \in G$ функция $\Psi(\overline{x}, \cdot)$ удовлетворяет (6) и $\Psi((\theta, 0), X) = 0$ для любых $X \in \mathcal{X}_0$, $\theta \in S$. Далее предположим, что

(i) для любых $X \in \mathcal{X}_0$, $\theta \in S$ функция $x \mapsto \Psi((\theta, x), X)$ непрерывно дифференцируема, причем $\frac{\partial}{\partial x}\Psi > 0$;

(ii) для любого $L > 0$

$$\sup_{\overline{x} \in S \times [0,L]} ||\Psi(\overline{x}, \cdot) - \Psi_\varepsilon(\overline{x}), \cdot)||_{FA} =$$

$$= \sup_{\overline{x} \in S \times [0,L]} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{G^k \setminus G^k_\varepsilon} |\Delta^k \Psi_k(\overline{x})| d\Pi^k \Big) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{24}$$

(здесь Ψ_ε – аппроксимирующая функция для Ψ, определяется из (16)).

Используя функцию Ψ, определим отображение $F : \mathcal{X}_0 \to \mathcal{X}_0$, полагая

$$X = \{\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_k\} = \{(\theta_1, x_1), \dots, (\theta_k, x_k)\} \mapsto$$

$$\mapsto Y = \{(\theta_1, \Psi(\overline{x}_1, X)), \ldots, (\theta_k, \Psi(\overline{x}_k, X))\} \tag{25}$$

(по определению мы полагаем $\{\emptyset\} \mapsto \{\emptyset\}$).

Через F_k ($F_k : G^K \to G^k$) мы обозначим сужение F на G^k, так что $F = \{F_k\}_{k=0}^{\infty}$. Используя теорему 4, для каждого $\overline{x} \in G$ мы продолжим (в смысле L_1) функцию $\Psi(\overline{x}, \cdot)$ на $\mathcal{X}$. Более того, для любого $L > 0$ мы можем продолжить эту функцию равномерно по $\overline{x} \in S \times [0, L]$

Пусть $\{L_n\}$, $L_n > 0$, $L_n \to \infty$ – возрастающая последовательность положительных чисел. Используя стандартную аргументацию, нетрудно показать, что для P-почти всех $X \in \mathcal{X}$ функция $\Psi((\theta, x), X)$ непрерывна по $x \in [0, \infty)$. С помощью продолженной функции Ψ мы можем определить отображение $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$, полагая

$$X = \{(\theta, x)\}_{(\theta,x)\in X} \overset{F}{\mapsto} Y = \{(\theta, \Psi((\theta, x), X))\}_{(\theta,x)\in X}.$$

Для продолженного отображения $F : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ мы будем использовать то же обозначение F.

4. Условия абсолютной непрерывности

Пусть $F = \{F_k\}_{k=0}^{\infty}$ – измеримое отображение $\mathcal{X}_0 \to \mathcal{X}_0$, определенное как в параграфе 3. Мы сохраним обозначение F для продолженного (в смысле теоремы 4) отображения.

Мы будем предполагать, что для любого $k \in \mathbb{N}$ и любых $\theta_1, \ldots, \theta_k \in S$ отображение $(x_1, \ldots, x_k) \mapsto (y_1, \ldots, y_k)$, где

$$((\theta_1, y_1), \ldots, (\theta_k, y_k)) = F_k((\theta_1, x_1), \ldots, (\theta_k, x_k)), \tag{26}$$

есть диффеоморфизм. Через J_k будем обозначать соответствующую матрицу Якоби.

Далее, мы будем называть функцию $\varphi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ финитной, если для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\varphi(X) = \varphi(X \cap G_\varepsilon).$$

Через Φ мы обозначим класс всех ограниченных, непрерывных и финитных функций на $\mathcal{X}$.

Очевидно, что если мы найдем функцию $u \in L_1(\mathcal{X}, P)$ такую, что для любой $\varphi \in \Phi$ справедливо соотношение

$$\int \varphi \circ F dP = \int \varphi u dP, \tag{27}$$

то мы немедленно получим, что мера PF^{-1} абсолютно непрерывна относительно P и

$$\frac{dPF^{-1}}{dP} = u.$$

Построение требуемой функции u мы проведем в два этапа. Сначала мы определим ее как функцию на $\mathcal{X}_0$ а затем, пользуясь методами параграфа 2, продолжим эту функцию с $\mathcal{X}_0$ на $\mathcal{X}$.

Используя (23), имеем

$$\int \varphi \circ F dP = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{G^k} \Delta^k(\varphi_k \circ F_k) d\Pi^k.$$

После замены переменных в каждом члене последней суммы мы получим

$$\int \varphi \circ F dP = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{G^k} \Delta^k \varphi_k \psi_k d\Pi^k, \tag{28}$$

где $\psi_k = \frac{d\Pi^k F_k^{-1}}{d\Pi^k}$, так что для $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k)$, $\overline{x}_j = (\theta_j, x_j)$, $p_k(\overline{x}) = p(x_1)p(x_2)\ldots p(x_k)$

$$\psi_k(\overline{x}) = \frac{d\Pi^k F_k^{-1}}{d\Pi^k} = \frac{p_k(F_k^{-1}(\overline{x}))}{p_k(\overline{x})|\det(J_k(F_k^{-1}(\overline{x}))|}. \tag{29}$$

Далее, преобразуем правую часть (27). Используя (23), получаем

$$\int \varphi u dP = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{G^k} \Delta^k(\varphi_k u_k) d\Pi^k. \tag{30}$$

Лемма 2. *Пусть f, g – симметричные функции на G^k. Тогда*

$$\Delta^k(fg) = \sum_{I \subset \{1,\ldots,k\}} \Delta_I \delta_{CI} f \Delta_{CI} g. \tag{31}$$

Суммирование в последнем выражении производится по всем подмножествам множества $\{1, \ldots, k\}$.

Доказательство. Имеем

$$\Delta^k(fg) = \Delta^k\Big(\big(\prod_{i=1}^{k}(\Delta_i + \delta_i)f\big)g\Big) =$$

$$= \Delta^k\Big(\sum_{I\subset\{1,\ldots,k\}}(\Delta_I\delta_{CI}f)g\Big) = \sum_{I\subset\{1,\ldots,k\}}\Delta^k((\Delta_I\delta_{CI}f)g).$$

Для завершения доказательства остается заметить, что

$$\Delta^k((\Delta_I\delta_{CI}f)g) = \Delta_I\delta_{CI}f\Delta_{CI}g.$$

□

Используя (30), (6) и лемму 2 мы получим

$$\int\varphi u dP = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\int\limits_{G^k}\Delta^l\varphi_l\Delta^{k-l}u_k d\Pi^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!(k-l)!}\int\limits_{G^k}\Delta^l\varphi_l\Delta^{k-l}u_k d\Pi^k =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\sum_{k=l}^{\infty}\frac{1}{(k-l)!}\int\limits_{G^k}\Delta^l\varphi_l\Delta^{k-l}u_k d\Pi^k =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{G^{k+l}}\Delta^l\varphi_l\Delta^k u_{l+k} d\Pi^{l+k} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\int\limits_{G^l}\Delta^l\varphi_l\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{G^k}\Delta^k u_{l+k} d\Pi^k\Big)d\Pi^l. \qquad (32)$$

На следующем шаге мы определим оператор A. Область определения A есть подмножество множества измеримых функций $f : \mathcal{X}_0 \to \mathbb{R}$. По определению положим

$$(Af)_l = Af\big|_{G^k/\pi_k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{G^k}\Delta^k f_{l+k} d\Pi^k. \qquad (33)$$

Подставляя (33) в (32) мы получаем

$$\int\varphi u dP = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\int\limits_{G^l}\Delta^l\varphi_l(Au)_l d\Pi^l = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{G^k}\Delta^k\varphi_k(Au)_k d\Pi^k. \qquad (34)$$

Сравнивая (27), (28) и (34) мы получаем уравнение

$$Au = \psi. \qquad (35)$$

Наша следующая цель состоит в построении обратного оператора A^{-1}. Для этого мы определим еще один оператор T.

Для симметричной функции $g : G^k \to \mathbb{R}$ мы определим функцию $Tf : G^{k-1} \to \mathbb{R}$ полагая

$$Tg(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_{k-1}) = \int\limits_G \Delta_k g(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_{k-1}, \overline{x}_k) d\Pi(\overline{x}_k) \tag{36}$$

(в последнем выражении через Δ_k мы обозначаем оператор Δ, примененный по переменной x_k).

Пусть $g : G^{k+1} \to \mathbb{R}$ – произвольная симметричная функция. Тогда справедливо неравенство

$$||Tg||_k \leqslant ||g||_{k+1}. \tag{37}$$

Действительно,

$$||Tg||_k = \int\limits_{G^k} |\Delta^k Tg| d\Pi^k = \int\limits_{G^k} |\Delta^k (\int\limits_G \Delta_{k+1} g d\Pi(\overline{x}_{k+1}))| d\Pi^k =$$

$$\int\limits_{G^k} | \int\limits_G \Delta^{k+1} g d\Pi(\overline{x}_{k+1})| d\Pi^k \leqslant \int\limits_{G^{k+1}} |\Delta^{k+1} g| d\Pi^{k+1} = ||g||_{k+1}.$$

Аналогичным образом, для симметричной функции $g : G^{k+l} \to \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$||T^l g||_k \leqslant ||T^{l-1} g||_{k+1} \leqslant \dots \leqslant ||g||_{k+l}. \tag{38}$$

Далее, для функции $f \in FA$ определим функцию $Tf : \mathcal{X}_0 \to \mathbb{R}$, полагая

$$(Tf)_k = Tf\big|_{G^k/\pi_k} = Tf_{k+1}.$$

Лемма 3. *Для любой функции $f \in FA$*

$$Af = (\exp T)(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k f}{k!}. \tag{39}$$

Доказательство. Сначала мы рассмотрим действие оператора A на стохастические интегралы. Нетрудно показать, что если $f = I_k(g)$, то

$$Af = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} I_{k-j}(T^j g).$$

Для произвольной функции $f \in FA$, используя теорему 1, получаем

$$Af = A\Big(\sum_{k=0}^{\infty} I_k(f_k)\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} A(I_k(f_k)) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} I_{k-j}(T^j f_k) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \sum_{k=j}^{\infty} I_{k-j}(T^j f_k) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} I_k(T^j f_{k+j})\Big) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} T^j f = (\exp T)(f).$$

□

Таким образом, ясно, что

$$A^{-1} f = \exp(-T)(f) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{T^k f}{k!}$$

или

$$(A^{-1} f)_l = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int\limits_{G^k} \Delta^k f_{l+k}\, d\Pi^k. \tag{40}$$

Далее, из (35) и (40) следует, что на $\mathcal{X}_0$ функция u равна $\exp(-T)\psi$. Теперь для того, чтобы продолжить эту функцию на $\mathcal{X}$, мы должны доказать, что функция $\exp(-T)\psi$ принадлежит пространству FA.

Лемма 4. *Для любой функции $f \in FA$ справедливы оценки*

$$\|\exp(-T) f\|_{FA} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \|f_k\|_k \tag{41}$$

и

$$\|\exp T\ f\|_{FA} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \|f_k\|_k. \tag{42}$$

Доказательство. Мы докажем только (42), так как (41) доказывается совершенно аналогично.

С учетом (39) имеем

$$\|e^T f\|_{FA} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|T^k f\|_{FA}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|(T^k f)_j\|_j}{j!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|T^k f_{j+k}\|_j}{j!} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|f_{j+k}\|_{j+k}}{j!} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{i} \frac{\|f_i\|_i}{k!(i-k)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\|f_i\|_i}{i!} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\|f_i\|_i 2^i}{i!}.$$

□

Теперь, учитывая (27), (28), (34), (35) и (39), мы получаем следующий результат.

Теорема 5. *Предположим, что функция* $\Psi(\overline{x}, X)$, *где* $\overline{x} \in G$, $X \in \mathcal{X}_0$ *удовлетворяет* (24) *и функция* $F : \mathcal{X}_0 \to \mathcal{X}_0$, *определенная формулой* (25), *удовлетворяет* (26). *Мы также предположим, что функции*

$$\psi_k = \frac{d\Pi^k F_k^{-1}}{d\Pi^k}$$

удовлетворяют (6) *и*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \|\psi_k\|_k < \infty.$$

Тогда мера PF^{-1} *абсолютно непрерывна относительно* P *и*

$$\frac{dPF^{-1}}{dP} = (e^{-T}\psi)^{\sim}.$$

5. Абсолютно непрерывные преобразования гамма-меры

В этом параграфе мы рассмотрим трансформации гамма-меры, т.е. пуассоновской меры с интенсивностью

$$\Pi(d\theta, dx) = \pi(d\theta) \frac{e^{-x}}{x} dx, \ \ \theta \in S, \ \ x \in [0, \infty).$$

Используя методы параграфа 4, мы опишем класс преобразований пространства конфигураций в себя, переводящих гамма-меру в меру (вообще говоря – непуассоновскую) абсолютно непрерывную относительно самой гамма-меры.

Пусть $f : S \to \mathbb{R}$, $\int |f| d\pi < \infty$ – интегрируемая по мере π функция, $\Phi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, $\Phi \geqslant 0$ – неотрицательная измеримая функция на $\mathcal{X}$. Мы предположим также, что функция Φ ограничена ($\Phi \leqslant R < \infty$) и финитна, т.е. для некоторого $\varepsilon_0 > 0$

$$\Phi(X) = \Phi(X \cap G_{\varepsilon_0}) \tag{43}$$

(для удобства мы всегда будем предполагать, что $\varepsilon_0 \leqslant 1$).

Рассмотрим отображение пространства конфигураций в себя вида

$$(\theta, x) \mapsto (\theta, x e^{f(\theta)\Phi(X)}), \tag{44}$$

то есть такое преобразование, под действием которого каждая точка (θ, x) конфигурации переходит в точку $(\theta, x e^{f(\theta)\Phi(X)})$. Так как мы предположили, что функция Φ финитна, то достаточно задать ее на множестве конечных конфигураций $\Phi = \{\Phi_k\}_{k=0}^{\infty}$, а ее продолжение (в смысле параграфа 3) тривиально: $\Phi_\varepsilon(X) = \Phi(X)$ при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Мы будем предполагать, что функции $\Phi_k = \Phi_k((\theta_1, x_1), \ldots, (\theta_k, x_k))$ дифференцируемы (по вещественным переменным) и (смысл этого условия будет ясен позднее) функция $D_F = \{D_{F,k}\}_{k=0}^{\infty}$,

$$D_{F,k} = D_F\big|_{G^k/\pi_k} = 1 + x_1 f(\theta_1) \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_1} + \cdots + x_k f(\theta_k) \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k} > 0 \tag{45}$$

всегда строго положительна.

Далее, для фиксированных $k, \theta_1, \ldots, \theta_k$ вычислим якобиан отображения

$$(x_1, \ldots, x_k) \mapsto (y_1 \ldots, y_k) = (x_1 e^{f(\theta_1)\Phi_k(X)}, \ldots, x_k e^{f(\theta_k)\Phi_k(X)}), \tag{46}$$

где $X = \{(\theta_1, x_1), \ldots, (\theta_k, x_k)\}$. Матрица Якоби этого отображения имеет вид

$$\begin{pmatrix} e^{f(\theta_1)\Phi_k(X)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{f(\theta_2)\Phi_k(X)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{f(\theta_3)\Phi_k(X)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{f(\theta_k)\Phi_k(X)} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1+x_1f(\theta_1)\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_1} & x_1f(\theta_1)\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_2} & \cdots & x_1f(\theta_1)\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_k} \\ x_2f(\theta_2)\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_1}+ & 1+x_2f(\theta_2)\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_2} & \cdots & x_2f(\theta_2)\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_kf(\theta_k)\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_1}+ & x_kf(\theta_k)\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_2} & \cdots & 1+x_kf(\theta_k)\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_k} \end{pmatrix}.$$

Определитель первого сомножителя равен $e^{\Phi_k(X)\sum_{j=0}^k f(\theta_j)}$, а определитель второго сомножителя также легко считается и равен

$$1+x_1f(\theta_1)\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_1}+x_2f(\theta_2)\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_2}+\cdots+x_kf(\theta_k)\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_k}.$$

Окончательно получаем, что якобиан J_k отображения (46) равен

$$J_k=e^{\Phi_k(X)\sum_{j=0}^k f(\theta_j)}(1+x_1f(\theta_1)\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_1}+ \\ +x_2f(\theta_2)\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_2}+\cdots+x_kf(\theta_k)\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_k}). \quad (47)$$

Ясно, что в силу условия (45) для любых фиксированных $\theta_1,\ldots,\theta_k$ якобиан J_k положителен. Покажем теперь, что более того, отображение (46) взаимно однозначно. Легко понять, что для этого достаточно рассматривать только случай $f(\theta_1)\neq 0,\ldots,f(\theta_k)\neq 0$. Прежде всего заметим, что для любых фиксированных $x_1,\ldots,x_k$ кривая (в $\mathbb{R}^k$) вида

$$t\mapsto(y_1(t),y_2(t),\ldots,y_k(t))= \\ (x_1e^{f(\theta_1)t},x_2e^{f(\theta_2)t},\ldots,x_ke^{f(\theta_k)t}),\quad t>0 \quad (48)$$

инвариантна относительно этого отображения. Кроме того, любые две такие кривые либо не пересекаются, либо совпадают. Соответственно, для доказательства взаимной однозначности отображения (46) достаточно показать, что взаимно однозначно его сужение на любую кривую вида (48). Для этого же, в свою очередь, достаточно показать, что вдоль любой кривой производная по t первой координаты не обращается в ноль.

Пусть $\Phi_k=\Phi_k(x_1e^{f(\theta_1)t},\ldots,x_ke^{f(\theta_k)t})$. Имеем

$$\frac{d}{dt}(x_1e^{f(\theta_1)t}\cdot e^{f(\theta_1)\Phi_k})=x_1f(\theta_1)e^{f(\theta_1)(t+\Phi_k)}(1+\sum_{j=0}^k\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_j}x_je^{f(\theta_j)t}f(\theta_j)).$$

В силу условия (45) последнее выражение не обращается в ноль (а знак имеет тот же самый, что и $f(\theta_1)$).

Учитывая вышесказанное, а также (44) мы можем заключить, что отображение $F = \{F_k\}_{k=0}^{\infty}$ вида

$$X = \{(\theta_1, x_1), \ldots, (\theta_k, x_k)\} \overset{F_k}{\mapsto}$$
$$\overset{F_k}{\mapsto} \{(\theta_1, x_1 e^{f(\theta_1)\Phi_k(X)}), \ldots, (\theta_k, x_k e^{f(\theta_k)\Phi_k(X)})\},$$

рассматриваемое как отображение из $\mathbb{X}_0$ в $\mathbb{X}_0$, также взаимно однозначно.

Рассмотрим теперь обратное отображение F^{-1}. Ясно, что оно имеет тот же вид (44), что и прямое

$$(\theta, y) \mapsto (\theta, y e^{-f(\theta)\Phi(F^{-1}(Y))}).$$

Покажем, что для обратного отображения справедливы те же предположения, что и для прямого. Единственное условие, которое требует проверки, это условие (45). Используя соотношение

$$D_{F,k} = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k \cdot \widetilde{J}_k,$$

где $\widetilde{J}_k$ – якобиан отображения $\log F_k$, нетрудно проверить непосредственным вычислением, что

$$D_{F^{-1},k} = \frac{1}{D_{F,k}} > 0.$$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству абсолютной непрерывности трансформированной меры относительно исходной. Итак, рассмотрим преобразование пространства конфигураций в себя, задаваемое формулой (44). Мы предположим (это приведет к упрощению выкладок), что формула (44) задает не прямое, а обратное преобразование, или, другими словами, мы будем рассматривать не образ, а прообраз гамма-меры под действием отображенияи (44). Так как мы показали, что прямое и обратное преобразование удовлетворяют одним и тем же условиям, то это не приведет ни к каким осложнениям. Более того, равноправность прямого и обратного отображения гарантирует нам, что трансформированная мера будет не только абсолютно непрерывна относительно исходной, но, более того, эквивалентна ей.

Теорема 6. *Пусть P – гамма-мера, $\Phi = \{\Phi_k\}_{k=0}^{\infty}$, $0 \leqslant \Phi \leqslant R < \infty$ – неотрицательная, ограниченная, измеримая, непрерывно дифференцируемая (по вещественным переменным) функция на $\mathcal{X}_0$, удовлетворяющая условию (43) для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и условию (45), а функция $f : S \to \mathbb{R}$ интегрируема по мере π. Далее, пусть $F : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ – отображение пространства конфигураций в себя, задаваемое формулой*

$$(\theta, x) \mapsto (\theta, x e^{f(\theta)\Phi(X)}).$$

Тогда меры PF и P эквивалентны, и

$$\frac{dPF}{dP} = (e^{-T}\psi)^{\sim},$$

где $\psi = \{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$,

$$\psi_k(\overline{x}) = e^{-\sum\limits_{i=0}^{k} x_i(e^{f(\theta_i)\Phi_k(\overline{x})}-1)}(1+x_1 f(\theta_1)\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_1}(\overline{x})+\dots+x_k f(\theta_k)\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_k}(\overline{x})).$$

В последней формуле $\overline{x} = ((\theta_1, x_1), \dots, (\theta_k, x_k))$, оператор e^{-T} задается формулой (40), а $(\cdot)^{\sim}$ означает L_1-продолжение функции в смысле параграфа 2.

Доказательство. В соответствии с (29) и (47) (для гамма-меры $p(x) = \frac{e^{-x}}{x}$) имеем

$$\frac{d\Pi^k F_k}{d\Pi^k} = \psi_k.$$

Как легко видеть, функция $\psi = \{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет (6), и, значит, по теореме 5 для доказательства абсолютной непрерывности трансформированной меры относительно исходной нам достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k \|\psi_k\|_k}{k!}. \tag{49}$$

Далее мы покажем (из этого следует сходимость ряда (49)), что для некоторого $M > 0$ справедлива оценка

$$\|\psi_k\|_k \leqslant M^k. \tag{50}$$

Чтобы оценить сверху $\|\psi_k\|_k$, воспользуемся неравенством (15).

Рассмотрим сначала случай $k = 1$. Имеем

$$\psi_1(\theta, x) = e^{-x(e^{f(\theta)\Phi_1(\theta,x)}-1)}(1 + xf(\theta)\Phi_1'(\theta, x)).$$

Отметим, что по условию теоремы $\Phi_1 \leqslant R$ и $\Phi_1'(\theta, x) = 0$ при $x < \varepsilon_0$.

Далее в силу (13)

$$\|\psi_1\|_1 = \int\limits_G |\Delta\psi_1| d\Pi \leqslant \int\limits_S \pi(d\theta) \inf_{\varepsilon>0}(\sup_{x\in[0,\varepsilon]} |\psi'| c(\varepsilon) + \int\limits_\varepsilon^\infty |\Delta\psi_1| d\gamma). \quad (51)$$

Для гамма-меры

$$c(\varepsilon) = \int\limits_0^\varepsilon x d\gamma(x) = 1 - e^{-\varepsilon} \leqslant \varepsilon. \quad (52)$$

Чтобы оценить сверху $\inf_{\varepsilon>0}(\dots)$ в подынтегральном выражении (51), мы выбирем $\varepsilon = \varepsilon(\theta)$, полагая (напомним, что $\varepsilon_0 \leqslant 1$)

$$\varepsilon(\theta) = \min(e^{-f(\theta)R}, \varepsilon_0).$$

Получим

$$\|\psi_1\|_1 \leqslant \int\limits_S \pi(d\theta)(\sup_{x\in[0,\varepsilon(\theta)]} |\psi'| c(\varepsilon(\theta)) + \int\limits_{\varepsilon(\theta)}^\infty |\Delta\psi_1| d\gamma). \quad (53)$$

Оценим первое слагаемое в подынтегральном выражении (53). Имеем

$$\sup_{x\in[0,\varepsilon]} |\psi'| c(\varepsilon(\theta)) = \sup_{x\in[0,\varepsilon]} e^{-x(e^{f(\theta)\Phi_1(\theta,0)}-1)} |e^{f(\theta)\Phi_1(\theta,0)} - 1| \cdot c(\varepsilon(\theta)).$$

Рассмотрим сначала случай $f(\theta) < 0$. Тогда

$$\sup_{x\in[0,\varepsilon(\theta)]} |\psi_1'| c(\varepsilon(\theta)) \leqslant e^{\varepsilon_0} \cdot c(\varepsilon_0) \leqslant e.$$

В случае же, когда $f(\theta) \geqslant 0$ мы получаем оценку

$$\sup_{x\in[0,\varepsilon(\theta)]} |\psi'| \leqslant (e^{f(\theta)\Phi_1(\theta,0)} - 1) e^{-f(\theta)R} \leqslant e^{f(\theta)(\Phi_1(\theta,0)-R)} \leqslant 1.$$

Таким образом, независимо от знака $f(\theta)$, величина первого слагаемого в подынтегральном выражении (53) не больше, чем e. Оценим теперь второе слагаемое в (53). Имеем

$$\int\limits_{\varepsilon(\theta)}^{\infty} |\Delta\psi_1| d\gamma \leqslant \int\limits_{\varepsilon(\theta)}^{\infty} \psi_1 d\gamma + \int\limits_{\varepsilon(\theta)}^{\infty} d\gamma.$$

Снова рассмотрим отдельно случаи $f(\theta) \geqslant 0$ и $f(\theta) < 0$. Пусть сначала $f(\theta) < 0$. Тогда

$$\int\limits_{\varepsilon(\theta)}^{\infty} \psi_1 d\gamma + \int\limits_{\varepsilon(\theta)}^{\infty} d\gamma = \int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} \psi_1 d\gamma + \int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} d\gamma =$$

$$= \int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} e^{-x(e^{f(\theta)\Phi_1(\theta,x)}-1)}(1 + xf(\theta)\Phi_1'(\theta,x))\frac{e^{-x}}{x}dx + \int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx$$

Во втором интеграле сделаем замену переменной $y = xe^{f(\theta)\Phi_1(\theta,x)}$ и получим

$$\int\limits_{\varepsilon_0 e^{f(\theta)\Phi_1(\theta,x)}}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y}dy + \int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx.$$

Далее воспользуемся простой оценкой: при $A > 0$

$$\int\limits_{A}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx \leqslant \max(1, 1 - \log A).$$

Получим

$$\int\limits_{\varepsilon_0 e^{f(\theta)\Phi_1(\theta,x)}}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y}dy + \int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx \leqslant |f(\theta)|\Phi_1(\theta,0) + 2|\log\varepsilon_0| + 2 \leqslant$$

$$\leqslant R|f(\theta)| + 2(1 + |\log\varepsilon_0|).$$

Далее, если $f(\theta) \geqslant 0$, то

$$\int\limits_{\varepsilon(\theta)}^{\infty} \psi_1 d\gamma + \int\limits_{\varepsilon(\theta)}^{\infty} d\gamma =$$

$$= \int\limits_{\min(e^{-f(\theta)R},\varepsilon_0)}^{\infty} e^{-x(e^{f(\theta)\Phi_1(\theta,x)}-1)}(1+xf(\theta)\Phi_1'(\theta,x))\frac{e^{-x}}{x}dx+$$

$$+\int\limits_{\min(e^{-f(\theta)R},\varepsilon_0)}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx.$$

В первом интеграле снова делаем замену переменной $y = xe^{f(\theta)\Phi_1(\theta,x)}$, и видим

$$\int\limits_{\min(e^{f(\theta)(\Phi_1(\theta,0)-R)},\varepsilon_0 e^{f(\theta)\Phi_1(\theta,0)})}^{\infty}\frac{e^{-y}}{y}dy+$$

$$+\int\limits_{\min(e^{-f(\theta)R},\varepsilon_0)}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx.$$

Если $\varepsilon_0 < e^{-f(\theta)R}$, то сумма последних двух интегралов оценивается константой $2(|\log\varepsilon_0|+1)$, в противном случае мы имеем

$$\int\limits_{e^{f(\theta)(\Phi_1(\theta,0)-R)}}^{\infty}\frac{e^{-y}}{y}dy+\int\limits_{e^{-f(\theta)R}}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx \leqslant$$

$$\leqslant |f(\theta)|(R-\Phi_1(\theta,0))+|f(\theta)|R+2 \leqslant 2(|f(\theta)|R+1).$$

Собирая все оценки вместе, получаем

$$\|\psi_1\|_1 \leqslant \int\limits_S \pi(d\theta)(e+2(|f(\theta)|R+1)+2(|\log\varepsilon_0|+1)) < \infty.$$

Таким образом, случай $k=1$ полностью исследован. Рассмотрим теперь $k>1$. Для простоты предположим, что $\varepsilon_0 = 1$ (случай произвольного $\varepsilon_0 > 0$ рассматривается совершенно аналогично). Итак, наша задача – получить оценку (50), где

$$\psi_k(\overline{x}) = e^{-\sum_{i=0}^k x_i(e^{f(\theta_i)\Phi_k(\overline{x})}-1)}\times$$

$$\times(1+x_1f(\theta_1)\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_1}(\overline{x})+\cdots+x_kf(\theta_k)\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_k}(\overline{x})).$$

Для того, чтобы оценить $\|\psi_k\|_k$, мы воспользуемся (15). Аналогично тому, как это было сделано для $k=1$, при фиксированном $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_k)$ выберем $\varepsilon(\theta)=(\varepsilon_1(\theta),\varepsilon_2(\theta),\ldots,\varepsilon_k(\theta))$, где

$$\varepsilon_j(\theta)=\min(e^{-f(\theta_j)R},1). \tag{54}$$

При этом подынтегральное выражение в интеграле (15) оценится сверху величиной

$$\sum_{I\subset\{1,\ldots,k\}}\int\limits_{\prod\limits_{j\in CI}[\varepsilon_j,\infty)}\sup_{\prod\limits_{i\in I}[0,\varepsilon_i]}|\Delta_{CI}\partial_I\psi_k|d\gamma^{|CI|}\cdot\prod_{i\in I}c(\varepsilon_i)), \tag{55}$$

где ε_j определяются из (54). Сумма (55) содержит 2^k слагаемых. Каждое из этих слагаемых может неограниченно расти только с ростом $f(\theta_j)$, $j=1,\ldots,k$. Далее мы покажем, что при данном выборе ε_j как и в случае $k=1$, основной вклад вносит слагаемое, соответствующее $I=\emptyset$, т.е. слагаемое вида

$$\int\limits_{\varepsilon_1}^{\infty}\cdots\int\limits_{\varepsilon_k}^{\infty}\Delta^k\psi_k d\gamma^k.$$

Оценим сначала его. Для этого мы в свою очередь разобьем его на 2^k слагаемых, сответствующих представлению

$$\Delta^k\psi_k=\sum_{J\subset\{1,\ldots,k\}}(-1)^{|J|}\delta_J\psi_k$$

(напомним, что оператор δ_J есть подстановка $x_j=0$ для $j\in J$).

В свою очередь, среди этих 2^k слагаемых максимальный вклад будет вносить слагаемое, соответствующее множеству

$$J=\{j:\ f(\theta_j)>0)\}.$$

Оценим только это слагаемое (остальные оцениваются совершенно аналогично). Для простоты предположим, что множество J есть $\{1,\ldots,m\}$, $m\leqslant k$ (т.е. $f(\theta_j)\geqslant 0$ для $j=1,2,\ldots,m$ и $f(\theta_j)<0$ для $j>m$). Итак, рассмотрим

$$\int\limits_{\varepsilon_1}^{\infty}\cdots\int\limits_{\varepsilon_m}^{\infty}(\int\limits_{\varepsilon_{m+1}}^{\infty}\cdots\int\limits_{\varepsilon_k}^{\infty}\delta_{\{1,\ldots,m\}}\psi_k d\gamma^{k-m})d\gamma^m=$$

$$= \int\limits_{e^{-f(\theta_1)R}}^{\infty} \frac{e^{-x_1}}{x_1} dx_1 \cdots \int\limits_{e^{-f(\theta_m)R}}^{\infty} \frac{e^{-x_m}}{x_m} dx_m \int\limits_{[1,\infty)^{k-m}} \psi_{k-m} d\gamma^{k-m} =$$

$$= (|f(\theta_1)|R+1)\dots(|f(\theta_m)|R+1) \int\limits_{[1,\infty)^{k-m}} \psi_{k-m} d\gamma^{k-m}. \tag{56}$$

В последнем интеграле сделаем замену переменных

$$y_j = x_j e^{f(\theta_j)\Phi_{k-m}((\theta_{m+1},x_{m+1}),\dots,(\theta_k,x_k))}, \quad j = m+1,\dots,k,$$

а затем, учитывая, что $\Phi_{k-m} \leqslant R$, а $f(\theta_j) < 0$ при $j > m$, несколько увеличим область интегрирования. Это даст нам следующую оценку для выражения (56)

$$(|f(\theta_1)|R+1)\dots(|f(\theta_m)|R+1) \int\limits_{e^{f(\theta_{m+1})R}}^{\infty} \frac{e^{-y_{m+1}}}{y_{m+1}} dy_{m+1} \cdots \int\limits_{e^{f(\theta_k)R}}^{\infty} \frac{e^{-y_k}}{y_k} dy_k$$

$$\leqslant \prod_{j=1}^{k} (|f(\theta_j)|R+1). \tag{57}$$

Покажем теперь, что все остальные слагаемые в сумме (55) вносят меньший вклад (с увеличением $f(\theta)$), чем слагаемое, соответствующее $I = \emptyset$. Итак, пусть $I \neq \emptyset$. Снова предположим для простоты, что $I = \{1,\dots,m\}$, $m \leqslant k$. С учетом финитности функции Φ (напомним, что мы условились рассматривать случай когда константа ε_0 в (43) равна единице), на множестве $\prod\limits_{i=1}^{m}[0,\varepsilon_i]$ имеем

$$\partial_I \psi_k = \partial_{\{1,\dots,m\}\psi_k} =$$

$$= e^{-\sum\limits_{i=0}^{k} x_i (e^{f(\theta_i)\Phi_{k-m}})} \big(1 + x_{m+1} f(\theta_{m+1}) \frac{\partial \Phi_{k-m}}{\partial x_{m+1}} + \dots + x_k f(\theta_k) \frac{\partial \Phi_{k-m}}{\partial x_k}\big)$$

$$\times (e^{f(\theta_1)\Phi_{k-m}} - 1)\dots(e^{f(\theta_m)\Phi_{k-m}} - 1) =$$

$$= \psi_{k-m} \cdot (e^{f(\theta_1)\Phi_{k-m}} - 1)\dots(e^{f(\theta_m)\Phi_{k-m}} - 1) \cdot e^{-\sum_{i=1}^{m} x_i (e^{f(\theta_i)\Phi_{k-m}} - 1)}.$$

Функция ψ_{k-m} не зависит от переменных $x_1,\dots,x_m$, а функция

$$[e^{-x_1(e^{f(\theta_1)\Phi_{k-m}} - 1)} \cdot (e^{f(\theta_1)\Phi_{k-m}} - 1) c(\varepsilon_1)] \times \dots$$

$$\cdots \times [e^{-x_m(e^{f(\theta_m)\Phi_{k-m}}-1)} \cdot (e^{f(\theta_m)\Phi_{k-m}} - 1)c(\varepsilon_m)]$$

оценивается (так, как мы это делали в случае $k = 1$) величиной e^m. Соответственно, мы имеем ($I = \{1, \dots, m\}$)

$$\int\limits_{\prod\limits_{j=m+1}^{k}[\varepsilon_j,\infty)} \sup_{\prod\limits_{i=1}^{m}[0,\varepsilon_i]} |\Delta_{CI}\partial_I\psi_k| d\gamma^{|CI|} \cdot \prod_{i=1}^{m} c(\varepsilon_i) \leqslant$$

$$\leqslant e^m 2^{k-m} \prod_{j=m+1}^{k} (|f(\theta_j)|R + 1).$$

Таким образом, учитывая вышесказанное, получаем оценку

$$\|\psi_k\|_k = \int\limits_{G^k} |\Delta^k\psi_k| d\Pi^k \leqslant \big(2\int\limits_S d\pi(\theta)(|f(\theta)|R + e + 1)\big)^k.$$

Теорема, тем самым, полностью доказана. □

Литература

1. J. Kerstan, K. Mattes, and J. Mecke, *Infinite divisible point processes.* — Akademie-Verlag, Berlin (1978).
2. W. Linde, *Infinitely divisible and stable measures on Banach spaces.* — Leipzig, Teubner (1983).
3. A. V. Skorokhod, *On the differentiability of measures which correspond to stochastic processes I.* — Theory Probab. Appl. II (1957), 629–649.
4. А. В.Скороход, *Случайные процессы с независимыми приращениями.* — Наука, Москва (1986).
5. Н. В. Смородина, *Асимптотическое разложение для распределения гладкого однородного функционала от строго устойчивого случайного вектора.* — Теория вероятн. и ее примен. **41(1)** (1996), 133–163.
6. Н. В. Смородина, *Асимптотическое разложение для распределения гладкого однородного функционала от строго устойчивого случайного вектора. II.* — Теория вероятн. и ее примен. **44(2)** (1999), 458–465.
7. J. F. C. Kingman, *Poisson Processes.* — Oxford (1993).
8. N. Privault, J. L. Wu, *Poisson stochastic integration in Hilbert spaces.* — Ann. Math. Univ. Bl. Pascal **6** (1999), 41–61; **154** (1998), 444–500.
9. D. Surgailis, *On multiple Poisson stocastic integrals and associated Markov semigroups.* — Probab. Math. Statist. **3**, No. 2 (1984), 217–239.
10. S. Albeverio, N. Smorodina, *The Poisson Analog of the Multiple Wiener-Ito Stochastic Integral.* — SFB 611 Preprint no. 21, University of Bonn (2002).
11. I. M. Gel'fand, M. I. Graev, A. M. Vershik, *Representations of the group of diffeomorphisms.* — Russian Math. Surveys **30** (1975), 3–50.

12. A. Vershik, N. Tsilevich, *Quasi-invariance of the gamma process and multiplicative properties of the Poisson-Dirichlet measures.* — C. R. Acad. Sci. Paris Ser.I Math. No. 329 (1999), 163–168.

Smorodina N. V. The multiple stochastic integrals and “nonpoissonian” transformations of the gamma measure.

We study the transformations of the configuration space and the corresponding transformations of the Poisson measure. For some class of Poisson measures we find conditions for the transformed measure (possible, nonpoissonian) to be absolutely continuous and get the expression for the corresponding Radon-Nikodym derivative. To solve this problem we use the Poisson analog of the multiple stochastic integral. As an example we consider the transformations of the so-called gamma measure.

Санкт-Петербургский
государственный университет
E-mail: smorodin@ns2691.spb.edu

Поступило 11 ноября 2005 г.