Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 327, 2005 г.

Д. В. Парилов

ДВЕ ТЕОРЕМЫ О КЛАССАХ ХАРДИ–ЛОРЕНЦА $H^{1,q}$

В данной работе доказываются два основных результата – атомное разложение для пространств Харди–Лоренца $H^{1,q}$ и вариант теоремы Марцинкевича о мультипликаторах для пространства H^1. Обе теоремы объединены общей тематикой – главным объектом изучения являются "слабые" классы Харди $H^{1,q}$.

1. Атомное разложение в пространствах $H^{1,q}$

Атомное разложение в классах Харди хорошо известно и широко используется в гармоническом анализе. Разложение функций на "атомы" крайне полезно с технической точки зрения и основное свое применение находит при изучении классических пространств H^p. Детальное описание различных конструкций, связанных с атомным разложением в пространствах H^p, можно найти в книге [1]. Естественно пытаться обобщить эти результаты на классы Лоренца $H^{p,q}$. Один из частных случаев – атомное разложение в пространстве $H^{1,\infty}$ – описан в статье [2]. В сравнении с пространствами H^p формулировка усложняется, тем не менее, результат можно использовать для оценки сингулярных интегральных операторов на рассматриваемом пространстве.

В этой работе речь пойдет об атомном разложении в пространствах $H^{1,q}$ при $q > 1$. Заметим, что для пространств $H^{p,q}$ случай $p = 1$ представляет наибольший интерес, так как именно при этом показателе в шкале L^p нарушается действие многих классических операторов, в то время как в соответствующих классах Харди они часто остаются ограниченными. Аппарат разбиения функций на атомы – очень эффективное средство проверки такой ограниченности. В доказательстве теоремы для простоты рассматривается случай одной переменной, многомерный результат может быть получен при помощи аналогичных рассуждений. При построении разложения за основу взяты идеи доказательства из книги [1], применявшиеся к случаю пространств

H^p. При доказательстве обратной теоремы – характеризации функций в пространстве $H^{1,q}$ в терминах атомов, используются чисто интерполяционные соображения, по-видимому, ранее не применявшиеся в этом контексте.

Теорема 1.1 (Об атомном разложении в пространстве $H^{1,q}$, где $1 < q < \infty$).

Рассмотрим функцию $f \in \operatorname{Re} H^{1,q}$. Тогда существует последовательность ограниченных функций $\{f_k\}_{-\infty}^{+\infty}$, удовлетворяющая следующим требованиям.

1) $f - \sum\limits_{|k|\leqslant N} f_k \to 0$ *в смысле теории распределений;*

2) *каждая функция f_k в свою очередь может быть разложена в сумму*

$$f_k = \sum_{j=1}^{\infty} g_j^k,$$

где функции g_j^k удовлетворяют следующим требованиям:

(a) *функция g_j^k сосредоточена на интервале $I_j(k)$;*
(b) *интервалы $I_j(k)$ попарно не пересекаются;*
(c) $\int\limits_{I_j(k)} g_j^k = 0$*;*
(d) $\|g_j^k\|_2 \leqslant 2^k |I_j(k)|^{1/2}$*;*
(e) $\left(\sum\limits_k 2^{kq} \left|\bigcup\limits_j I_j(k)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \asymp \|f\|_{\operatorname{Re} H^{1,q}}$.

Обратное утверждение. *Если функция f удовлетворяет условиям* 1), 2), a), c) *и* d)*, интервалы $I_j(k)$ имеют конечную кратность пересечения, а также $\left(\sum\limits_k 2^{kq} \left|\bigcup\limits_j I_j(k)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C_1$, то $f \in \operatorname{Re} H^{1,q}$ и $\|f\|_{\operatorname{Re} H^{1,q}} \leqslant C \cdot C_1$, где C – некоторая абсолютная константа.*

Примечание. *Чтобы получить “классическую” форму атомного разложения, необходимо произвести нормировку функций g_j^k. Если мы рассмотрим $a_j^k = c^{-1} 2^{-k} |I_j(k)|^{-1} g_j^k$, то эти функции a_j^k будут* (1,2)*-атомами, а атомное разложение примет вид $f_k = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_{j,k} a_j^k = \sum\limits_{j=1}^{\infty} c \cdot 2^k |I_j(k)| a_j^k$.*

Доказательство. Пусть $f \in \operatorname{Re} H^{1,q}$. В качестве основной максимальной функции будем использовать

$$P^*_{\nabla,2}(f)(x) = \sup_{(y,t)\in\Gamma_N(x)} |P_t * f(y)|, \text{ где } \Gamma_n(x) = \{(y,s) : |y-x| < N_s\}.$$

По определению пространства $H^{1,q}$ существует такая константа C, что

$$\|P^*_{\nabla,2}(f)(x)\|_{1,q} \leqslant C\|f\|_{\operatorname{Re} H^{1,q}}.$$

Для каждого натурального числа k рассмотрим открытое множество

$$E^k = \{x \in R : P^*_{\nabla,2}(f)(x) > 2^k\} = \bigcup_j I_j(k),$$

где $I_j(k)$ – промежутки.

Каждому интервалу I поставим в соответствие множество $\hat{I}$ на плоскости: $\hat{I} = \{(y,t) \in R^2_+ : [y-t, y+t] \subset I\}$. Кроме того, определим $\widehat{E^k} = \bigcup_j \widehat{I_j(k)}$. Наконец, построим множества $T^k_j = \widehat{I_j(k)} \setminus \widehat{E^{k+}}$ (см. рис. 1).

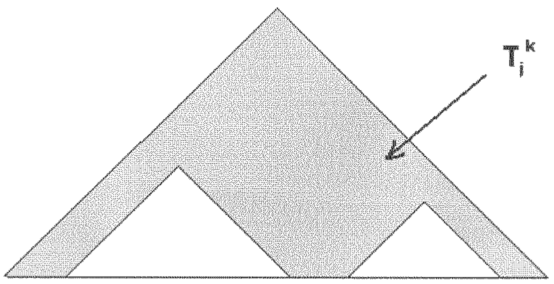

Рис. 1.

Также для каждого $\varepsilon > 0$ обозначим $T_j^{k(\varepsilon)} = \{(y,t) \in T^k_j : f \geqslant \varepsilon\}$. Закрашенная часть соответствует множеству $T_j^{k(\varepsilon)}$ (см. рис. 2).

В процессе доказательства будет использована гладкая функция ψ, обладающая следующими свойствами:

1) $\operatorname{supp}\psi \subset [1,1]$;

2) функция ψ имеет нулевые моменты порядка 0 и 1;

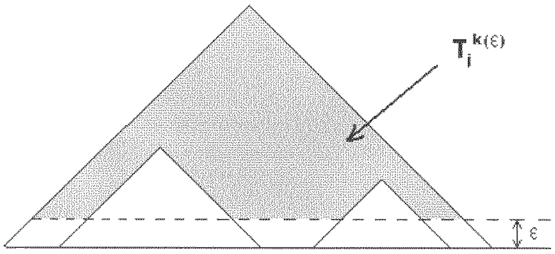

Рис. 2.

3) $\int\limits_0^\infty e^{-2\pi s}\hat\psi(s)ds = -\frac{1}{2\pi}$.

Для построения такой функции достаточно рассмотреть функцию из L^2, сосредоточенную на отрезке $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ и удовлетворяющую условию 2) и такую, что $\int\limits_0^\infty e^{-2\pi s}\widehat{\psi}(s)ds \neq 0$. Сверткой с гладкой функцией можно получить гладкую функцию, удовлетворяющую условиям 1 и 2, а затем нормировкой добиться выполнения условия на $\widehat{\psi}$.

Для любых параметров $j, k \in \mathbb{Z}$ и $\varepsilon > 0$ определим функцию $g_j^k(\varepsilon)$ формулой

$$g_j^k(\varepsilon)(x) = \int\limits_{T_j^{k\varepsilon}} \frac{\partial u}{\partial t}(y,t)\psi_t(x-y)dydt, \quad \text{где} \quad u(x,t) = P_t * f(x).$$

Так как носитель функции ψ лежит в отрезке $[-1,1]$, то функция $(y,t) \mapsto \psi_t(x-y)$ для фиксированного x может быть отлична от нуля только в точках конуса $\Gamma(x) = \{(y,t) : |y-x| < t\}$. Поэтому функция $g_j^k(\varepsilon)$ может быть отлична от нуля только в точках $x \in I_j(k)$.

Оценим L^2-норму функции $g_j^k(\varepsilon)$. Для любой функции $\varphi \in S$ можно написать следующее равенство:

$$\begin{aligned}\langle g_j^k(\varepsilon), \varphi\rangle &= \int\limits_{T_j^{k(\varepsilon)}} \frac{\partial u}{\partial t}(y,t) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_t(x-y)\varphi(x)dxdydt \\ &= \int\limits_{T_j^{k(\varepsilon)}} \frac{\partial u}{\partial t}(y,t)(\psi_t * \varphi)(y)dydt.\end{aligned}$$

По неравенству Коши–Шварца

$$|\langle g_j^k(\varepsilon),\varphi\rangle| \leqslant \Bigg(\int\limits_{T_j^{k(\varepsilon)}} t|\nabla u|^2 dydt\Bigg)^{\frac{1}{2}} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^2_+} |\psi_t * \phi(y)|^2 \frac{dydt}{t}\Bigg)^{\frac{1}{2}}. \qquad (*)$$

Оценим каждый из интегралов. Начнем с первого:

$$\int\limits_{T_j^{k(\varepsilon)}} t|\nabla u|^2 dydt = \frac{1}{2}\int\limits_{T_j^{k(\varepsilon)}} t\nabla(u^2)dydt = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial T_j^{k(\varepsilon)}} \Big(t\frac{\partial(u^2)}{\partial\nu} - u^2\frac{\partial t}{\partial \nu}\Big).$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial\nu}$ – производная по внешней нормали для точек границы $\partial T_j^{k(\varepsilon)}$.

Также использовалась формула Грина. Продолжим оценку:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\partial T_j^{k(\varepsilon)}} \Big(t\frac{\partial(u^2)}{\partial\nu} - u^2\frac{\partial t}{\partial \nu}\Big) \leqslant \int\limits_{\partial T_j^{k(\varepsilon)}} \Big(|u|t\Big|\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big| + \frac{1}{2}u^2\Big|\frac{\partial t}{\partial\nu}\Big|\Big)$$
$$\leqslant C\cdot 2^{2k}|I_j(k)|. \qquad (**)$$

Для доказательства последнего неравенства оценим компоненты интеграла.

1) $|u| \leqslant C\cdot 2^k$ (по определению множества $T_j^{k(\varepsilon)}$).

2) Оценим множитель $t|\frac{\partial u}{\partial\nu}|$. Для этого оценим функции $t\frac{\partial u}{\partial t}$ (оценка функции $t\frac{\partial u}{\partial x}$ может быть получена аналогично).

Рассмотрим шар радиуса $\frac{t}{c}$, где c подбирается таким образом, чтобы шар $B_{\frac{t}{c}}(x,t)$ содержался в конусе $\Gamma_2(z) = \{(y,s) : |y-z| < 2s\}$ для некоторого $z \notin E^{k+1}$, а следовательно $|u| \leqslant F^*_{\nabla,2}(f)(z) \leqslant 2^{k+1}$ в шаре $B_{\frac{t}{c}}(x,t)$.

Воспользовавшись свойством среднего значения для гармонических функций, мы получаем:

$$\Big|t\frac{\partial u}{\partial t}\Big| = \Bigg|\frac{c}{t}\int\limits_{B_{\frac{t}{c}}(x,t)} \frac{\partial u}{\partial t}\Bigg|$$

По формуле Грина $\int\limits_{B_{\frac{t}{c}}(x,t)} \frac{\partial u}{\partial t} = -\int\limits_{\partial B_{\frac{t}{c}}(x,t)} udx$, а тогда

$$\Big|t\frac{\partial u}{\partial t}\Big| = \Bigg|\frac{c}{t}\int\limits_{B_{\frac{t}{c}}(x,t)} \frac{\partial u}{\partial t}\Bigg| = \Bigg|\frac{c}{t}\int\limits_{\partial B_{\frac{t}{c}}(x,t)} udx\Bigg| \leqslant C\cdot 2^k$$

3) $|\frac{\partial t}{\partial \nu}| \leqslant 1$ на $\partial T_j^{k(\varepsilon)}$ – очевидно.

4) $|\partial T_j^{k(\varepsilon)}| \leqslant C|I_j(k)|$ – очевидно из рисунка.

Подставив оценки 1, 2, 3, 4 в $(**)$, мы получаем требуемое неравенство.

Оценим второй интеграл из $(*)$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2_+} |\psi_t * \varphi(y)|^2 \frac{dydt}{t} = \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\psi}_t * \varphi(y)|^2 \frac{dydt}{t}$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\psi}(t\xi)|^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 \frac{d\xi dt}{t}$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \int\limits_0^{+\infty} |\widehat{\psi}(t\xi)|^2 \frac{dtd\xi}{t}$$

$$= \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\psi}(s)|^2 \frac{ds}{s}\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi\right) = C \cdot |\varphi|_2^2.$$

Подставив оценку интеграла в $(*)$, мы получаем $|g_j^k(\varepsilon)|_2 \leqslant C \cdot 2^k |I_j(k)|^{\frac{1}{2}}$.

Все проделанное может быть повторено для $\varepsilon = 0$, однако нельзя гарантировать сходимость всех интегралов. Поэтому мы определим g_j^k как распределение, чье действие на функцию $\psi \in S$ задается следующей формулой:

$$\langle g_j^k, \varphi\rangle = \int\limits_{T_j^k} \frac{\partial u}{\partial t}(y,t) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_t(x-y)\varphi dx\, dy\, dt$$

$$= \int\limits_{T_j^k} \frac{\partial u}{\partial t}(y,t)(\psi_t * \varphi)(y) dx\, dy\, dt.$$

Осуществив предельный переход под знаком интеграла с пробной функцией в определении $g_j^k(\varepsilon)$, можно получить, что $g_j^k(\varepsilon) \to g_j^k$ в смысле теории распределений. Из равномерной по ε ограниченности в L^2 функций $g_j^k(\varepsilon)$ вытекает, что они слабо сходятся в L^2

к функции g_j^k, сосредоточенной на $\overline{I_j(k)}$. Для нормы также выполняется оценка $\|g_j^k\|_2 \leqslant c \cdot 2^k |I_j(k)|^{\frac{1}{2}}$ Так как функции $g_j^k(\varepsilon)$ и g_j^k удовлетворяют тем же условиям на моменты, что и функция ψ, то они принадлежат $\operatorname{Re} H^{1,q}$. Для любой функции $h \in L^2$ с носителем, лежащим в интервале I, и удовлетворяющей условиям на моменты, функция $a(x) = |I|^{-\frac{1}{2}} \|h\|_2^{-1} h(x)$ является $(1,2)$-атомом.

Для функции $h \in \operatorname{Re} H^1$, сосредоточенной на I, верна оценка $\|h\|_{\operatorname{Re} H^1} \leqslant C|I|^{\frac{1}{2}} \|h\|_2$. Учитывая оценку

$$\|h\|_{\operatorname{Re} H^{1,q}} \leqslant \|h\|_{\operatorname{Re} H^1},$$

получаем оценку

$$\|h\|_{\operatorname{Re} H^{1,q}} \leqslant C|I|^{\frac{1}{2}} \|h\|_2.$$

Используя это неравенство, можно сразу получить, что

$$g_j^k(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} g_j^k \quad \text{в} \quad \operatorname{Re} H^{1,q}.$$

Проверим условие e):

$$\left(\sum_k 2^{kq} \left| \bigcup_j I_j(k) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_k 2^{kq} |E_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\approx \left(\sum_k \int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \lambda^{q-1} |\{|P^*_{\nabla,2} f| > \lambda\}|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{\operatorname{Re} H^{1,q}}.$$

Необходимо проверить равенство $f = \sum\limits_{k,j} g_j^k$ в пространстве S'. Покажем, что $f = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sum\limits_{k,j} g_j^k(\varepsilon)$ в S'. Рассмотрим функцию $\varphi \in S$, тогда верна следующая цепочка равенств

$$\langle \sum_{k,j} g_j^k(\varepsilon), \varphi \rangle = \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(y,t)(\psi_t * \varphi)(y) dy\, dt$$

$$= (\text{Равенство Парсеваля})$$

$$= \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi|\xi|t)) e^{-2\pi|\xi|t} \widehat{\psi}(t|\xi|)) \frac{dt}{t} \hat{f}(\xi) \widehat{\varphi}(-\xi) d\xi$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-2\pi s)e^{-2\pi x}\widehat{\psi}(s)\frac{ds}{s}\hat{f}(\xi)\widehat{\varphi}(-\xi)d\xi \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)d\xi,$$

так как

$$\int\limits_{\varepsilon|\xi|}^{\infty}(-2\pi s)e^{-2\pi s}\widehat{\psi}(s)\frac{ds}{s}\to 1 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0.$$

Перестановка интегралов законна, так как первый интеграл, содержащий преобразование Фурье, является абсолютно сходящимся. Более того, выполняется неравенство

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-2\pi s}|\widehat{\varphi}(s)|ds<\infty;$$

таким образом,

$$\langle\sum_{k,j} g_j^k(\varepsilon),\varphi\rangle \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)\widehat{\varphi}(-\xi)\,\partial\,\xi=\langle f,\varphi\rangle,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство обратного утверждения. Рассмотрим функцию f, удовлетворяющую всем условиям теоремы:

1) $f-\sum\limits_{|k|\leqslant N} f_k\to 0$ в смысле теории распределений;
2) $f_k=\sum\limits_j g_j^k$;
3) g_j^k сосредоточены на интервалах $I_j(k)$;
4) интервалы $I_j(k)$ имеют конечную кратность пересечения;
5) $\|g_j^k\|_2\leqslant 2^k|I_j(k)|^{\frac12}$, $\int g_j^k=0$;
6) $A=\big(\sum\limits_k 2^{kq}\big|\bigcup\limits_j I_j(k)\big|^q\big)^{\frac1q}<\infty$.

Необходимо доказать, что функция f лежит в пространстве $H^{1,q}$ и выполняется следующая оценка для нормы:

$$\|f\|_{1,q}\leqslant CA.$$

Зафиксируем параметр λ и рассмотрим две вспомогательные функции

$$u=\sum_{2^k\leqslant\lambda} f_k,\quad u=\sum_{2^k>\lambda} f_k.$$

Возьмем вспомогательную кусочно-постоянную функцию φ на $\mathbb{R}_+$, принимающую значение $\sum\limits_j |I_j(k)|$ на интервале $[2^k, 2^{k+1})$. По определению функций f_k выполняется следующая оценка на норму в L^2:

$$\|u\|^2 \leqslant C \sum_{2^k \leqslant \lambda} 2^k \big(\sum_j |I_j(k)| \big)^{\frac{1}{2}} \leqslant C' \int\limits_0^{2\lambda} \varphi(\tau)^{\frac{1}{2}} d\tau.$$

Покажем, что функция v принадлежит пространству H^p, $p < 1$, где показатель p достаточно близок к единице. Формула для v после нормировки превращается в разложение функции v на $(p, 2)$-атомы $[2^{-k}|I_j(k)|^{-\frac{1}{p}} g_j^k]$:

$$v = \sum_{2^k > \lambda} \sum_j 2^k |I_j(k)|^{\frac{1}{p}} [2^{-k} |I_j(k)|^{-1p} g_j^k]$$

Тогда верна следующая оценка для нормы:

$$\|v\|_{H^p} \leqslant C \bigg(\sum_{2^k > \lambda} 2^{kp} \sum_j |I_j(k)| \bigg)^{\frac{1}{p}} \leqslant C' \bigg(\int\limits_\lambda^\infty \tau^{p-1} \varphi(\tau) d\tau \bigg)^{\frac{1}{p}}.$$

Оценим норму функции f в пространстве $H^{1,q}$ (фактически мы повторяем выкладки из доказательства неравенства Харди):

$$\int\limits_0^\infty \lambda^{q-1} |\{P_{\nabla,2} f > \lambda\}|^q d\lambda$$

$$\leqslant C \int\limits_0^\infty \lambda^{q-1} \bigg[\lambda^{-2} \bigg(\int\limits_0^{2\lambda} \varphi(\tau)^{\frac{1}{2}} d\tau \bigg)^2 + \lambda^{-p} \int\limits_\lambda^\infty \tau^{p-1} \varphi(\tau) d\tau \bigg]^q d\tau.$$

Заменим q-ю степень суммы под интегралом суммой q-х степеней слагаемых, а затем оценим каждое из получившихся слагаемых по отдельности. Начнем с первого:

$$\int\limits_0^\infty \lambda^{-q-1} \bigg(\int\limits_0^{2\lambda} \varphi(\tau)^{\frac{1}{2}} d\tau \bigg)^{2q} d\lambda \leqslant c \int\limits_0^\infty \lambda^{q-1} \bigg(\int\limits_0^1 \varphi(2\lambda\xi)^{\frac{1}{2}} d\xi \bigg)^{2q} d\lambda$$

$$\leqslant c\bigg(\int\limits_0^1\bigg(\int\limits_0^\infty \lambda^{q-1}\varphi(2\lambda\xi)^q d\lambda\bigg)^{\frac{1}{2q}}d\xi\bigg)^{2q}.$$

Последняя оценка получена из оценки нормы интеграла интегралом от нормы. Далее,

$$c\bigg(\int\limits_0^1\bigg(\int\limits_0^\infty \lambda^{q-1}\varphi(2\lambda\xi)^q d\lambda\bigg)^{\frac{1}{2q}}d\xi\bigg)^{2q}$$

$$\leqslant c\bigg(\int\limits_0^1\bigg(\int\limits_0^\infty \varphi(s)^q\left(\frac{s}{2\xi}\right)^{q-1}\frac{1}{2\xi}ds\bigg)^{\frac{1}{2q}}d\xi\bigg)^{2q}$$

$$\leqslant c\bigg(\int\limits_0^1 \xi^{-\frac{1}{2}}d\xi\bigg)^{2q}\int\limits_0^\infty \varphi(s)^q s^{q-1}ds \asymp c'\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{kq}\varphi(2^k)^q \asymp c\cdot A.$$

Таким образом, $\|u\|_{1,q}\leqslant c\cdot A$.

Оценим второе слагаемое:

$$\int\limits_0^\infty \lambda^{q-1-pq}\bigg(\int\limits_\lambda^\infty \tau^{p-1}\varphi(\tau)d\tau\bigg)^q d\lambda \leqslant c\int\limits_0^\infty \lambda^{q-1}\bigg(\int\limits_1^\infty \varphi(\lambda\xi)\xi^{p-1}d\xi\bigg)^q d\lambda$$

$$\leqslant c\bigg(\int\limits_1^\infty\bigg(\int\limits_0^\infty (\varphi(\lambda\xi)\xi^{p-1})^q\lambda^{q-1}d\lambda\bigg)^{\frac{1}{q}}d\xi\bigg)^q.$$

В последней оценке мы вновь оценим норму интеграла:

$$c\bigg(\int\limits_1^\infty\bigg(\int\limits_0^\infty (\varphi(\lambda\xi)\xi^{p-1})^q\lambda^{q-1}d\lambda\bigg)^{\frac{1}{q}}d\xi\bigg)^q$$

$$= c\bigg(\int\limits_1^\infty\bigg(\int\limits_0^\infty \varphi(s)^q\xi^{(p-1)q}\left(\frac{s}{\xi}\right)^{q-1}\frac{1}{\xi}ds\bigg)^{\frac{1}{q}}d\xi\bigg)^q$$

$$= c\bigg(\int\limits_1^\infty \xi^{p-2}d\xi\bigg)^q\bigg(\int\limits_0^\infty \varphi(s)^q s^{q-1}ds\bigg) \asymp c\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{kq}\varphi(2^k)^q \asymp c\cdot A.$$

Таким образом, $v\in H^{1,q}$ и $\|v\|_{1,q}\leqslant cA$, а значит искомая функция f лежит в пространстве $H^{1,q}$ и выполняется необходимая оценка на норму. $\square$

2. Теорема Марцинкевича

Теорема Марцинкевича – важный результат гармонического анализа. Приведем ее классическую формулировку в одномерном случае.

Теорема Марцинкевича. *Пусть m – функция на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $\|m\|_\infty \leqslant c$;
2) $\int\limits_I |m'| \leqslant c$ *для любого диадического интервала* I.

Тогда оператор T_m, заданный равенством $(Tf)^\wedge = m\hat{f}$, отображает пространство L^p в пространство L^p при $p > 1$.

Формулировка теоремы Марцинкевича в многомерном случае выглядит более громоздкой (см. [5]).

Если показатель p равен 1, сказать что-то определенное про действие оператора достаточно трудно даже в одномерном случае. Для многих переменных ситуация еще более осложняется тем, что действие оператора представляет собой некоторую комбинацию сингулярных интегральных операторов по *различным* переменным. Хотя в размерности 1 в доказательстве встречаются лишь однократные сингулярные интегралы, их финальная комбинация уже таковым не является, и поэтому ограниченность мультипликатора получается лишь при $p > 1$ (нет, вообще говоря, даже слабого типа (1, 1)). Однако, в размерности 1 все же некоторую информацию в случае $p = 1$ можно получить – именно этому и посвящен настоящий параграф. Похожие утверждения встречались в литературе, однако, вероятно, в виде, сформулированном ниже, результат получен впервые. В доказательстве применяются вещественные методы. При доказательстве для простоты мы ограничиваемся операторами $(T_m f)^\wedge = m\hat{f}$ и $\mathrm{supp}(m) \subset \mathbb{R}^+$. Подобный результат для всей прямой может быть сведен к этому случаю.

Теорема 2.1. *Пусть m – функция на $\mathbb{R}^+$, удовлетворяющая условию теоремы о мультипликаторах:*

1) $\|m\|_\infty \leqslant c$;
2) $\int\limits_{2^l}^{2^{l+1}} |m'| \leqslant c$ *при всех* $l \in \mathbb{Z}$.

Тогда оператор T_m, заданный равенством $(Tf)^\wedge = m\hat{f}$, отображает пространство $H^1(\mathbb{R})$ в пространство $H^{1,\infty}(\mathbb{R})$.

План доказательства

1. Рассмотрим функцию $f \in H^1(\mathbb{R})$ и набор функций φ_k, удовлетворяющих следующим условиям:

(a) $\widehat{\varphi}_0 \in C^\infty$;
(b) $\widehat{\varphi}_k(\xi) = \widehat{\varphi}_0(2^{-k}\xi)$;
(c) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}_k = 1$;
(d) $\operatorname{supp} \widehat{\varphi}_k \subset [2^{k-1}, 2^{k+1}]$.

Тогда последовательность $\{f * \varphi_k\}_{k=-\infty}^{\infty} = \{T_{\widehat{\varphi}_k f}\}$ лежит в пространстве $H^1(\mathbb{R}, l^2)$.

2. Рассмотрим функцию m, удовлетворяющую условию теоремы Марцинкевича о мультипликаторах:

(a) $\|m\|_\infty \leqslant C$,
(b) $\int\limits_{2^l}^{2^{l+1}} |m'| \leqslant c$, $l \in \mathbb{Z}$.

Оператор T_m естественным образом действует на функции $u = \{u_k\}$, лежащие в $H^1(\mathbb{R}, l^2)$ и удовлетворяющие условию $\operatorname{supp} \hat{u}_k \subset [2^{k-1}, 2^{k+1})$:

$$T_m\{u_k\} = \{T_m u_k\}.$$

Тогда T_m переводит каждую такую функцию в пространстве $H^{1,\infty}(\mathbb{R}, l^2)$.

3. Рассмотрим оператор S, задаваемый следующим равенством:

$$S(g_k) = \sum g_k * \psi_k,$$

где функции ψ_k удовлетворяют условиям (a) и (b), $\operatorname{supp} \hat{\psi}_k \subset [2^{k-2}, 2^{k+2}]$, а $\hat{\psi}_k|_{[2^{k-1}, 2^{k+1}]} \equiv 1$.

Тогда оператор S действует из пространства $H^{1,\infty}(\mathbb{R}, l^2)$ в пространстве $H^{1,\infty}(\mathbb{R})$.

Таким образом будет выполняться следующая “цепочка”:

$$\begin{aligned} f \in H^1(\mathbb{R}) \mapsto \{T_{\widehat{\varphi}_k} f\} \in H^1(\mathbb{R}, l^2) \mapsto \{T_m T_{\widehat{\varphi}_k} f\} \in H^{1,\infty}(\mathbb{R}, l^2) \\ \mapsto S\{T_m T_{\widehat{\varphi}_k} f\} = T_m f \in H^{H^{1,\infty}}(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{1}$$

Доказательство. 1) Докажем первый переход.

Проверим условия теоремы об l^2-значном сингулярном операторе для оператора $Tf = \{\varphi_k * f\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, доказанной в [1].

Поскольку, очевидным образом, оператор T действует из $L^2(\mathbb{R})$ в $L^2(l^2, \mathbb{R})$, нам достаточно проверить выполнение условия D_∞ (см. [1]) для оператора T_{φ_k}. В общем случае для сверточного оператора с ядром K это условие имеет следующий вид: найдется такое $\alpha > 0$, что

$$\|K(x-y) - K(x)\| \leqslant c\frac{|y|^\alpha}{|x|^{\alpha+1}} \quad \text{при} \quad |x| \geqslant 2|y|.$$

В нашем случае для проверки условия D^∞ для ядра $\{\varphi_k\}$ достаточно доказать следующее неравенство:

$$\left(\sum |\varphi_k(x-y) - \varphi_k(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant c\frac{|y|^\alpha}{|x|^{\alpha+1}} \quad \text{при} \quad |x| \geqslant 2|y|.$$

По определению функций φ_k выполнено следующее соотношение:

$$\widehat{\varphi}_k(\xi) = \widehat{\varphi}_0(2^{-k}\xi).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\varphi_k(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}_k(\xi)e^{i\xi x}d\xi &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}_0(2^{-k}\xi)e^{i(2^k x)(2^{-k}\xi)}2^k d\frac{\xi}{2^k} \\ &= 2^k\varphi_0(2^k x).\end{aligned}$$

По свойствам преобразования Фурье для функции $\varphi_0(x)$ верны следующие оценки:

$$|\varphi_0(x)| \leqslant c,$$

$$|\varphi_0(x) - \varphi_0(x-y)| \leqslant \frac{c|y|}{(1+|x|)} \quad \text{при} \quad |x| \geqslant 2|y|$$

$$(\varphi_0 \text{ – быстро убывающая функция}).$$

Тогда для функций φ_k выполнена следующая оценка при $|x| \geqslant 2|y|$:

$$|\varphi_k(x) - \varphi_k(x-y)| \leqslant c\min\left\{2^k, \frac{2^{2k}|y|}{(1+|2^k x|)^5}\right\} \leqslant c\min\left\{2^k, \frac{|y|}{2^{3k}|x|^5}\right\}.$$

Найдем наибольшее целое число k_0, удовлетворяющее неравенству

$$2^{k_0} \leqslant \frac{|y|}{2^{3k_0}|x|^5}.$$

Следовательно, $2^{4k_0} \leqslant \frac{|y|}{|x|^5}$, а из условия максимальности k_0 мы получаем соотношение $2^{k_0} \sim \frac{|y|^{\frac14}}{|x|^{5\frac54}}$. Теперь мы можем оценить квадратичную сумму при $|x| \geqslant |2y|$:

$$\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\varphi_k(x) - \varphi_k(x-y)|^2\Big)^{\frac12}$$

$$\leqslant c\Big(\sum_{j=0}^{-\infty} 2^{2j} + \Big(\frac{|y|}{2^{3k_0}|x|^5}\Big)^2 \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{6j}}\Big)^{\frac12}$$

$$\sim c\Big(\Big(\frac{|y|^{\frac14}}{|x|^{2+\frac14}}\Big)^2 \Big(\sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-2j} + \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-6j}\Big)\Big)^{\frac12} \leqslant c_1 \frac{|y|^{\frac14}}{|x|^{1+\frac14}}.$$

Таким образом первый переход доказан.

2) Докажем второй переход. Пусть $u = \{u_k\} \in H^1(\mathbb{R}, l^2)$, причем $\operatorname{supp} \hat u_k \subset [2^{k-1}, 2^{k+1})$. Необходимо доказать, что $\{T_m u_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in H^{1,\infty}(\mathbb{R}, l^2)$ с соответствующей оценкой нормы. Обозначив через I_k интервал $[2^{k-1}, 2^{k+1}]$, можем записать

$$(T_m(u_k))^\wedge(\xi) = m(\xi)\hat u_k(\xi)$$

$$= m(2^{k-1})\hat u_k(\xi) + \int_{2^{k-1}}^{2^{k+1}} m'(\tau)\chi_{(-\infty,\xi]}(\tau)\hat u_k(\xi)d\tau$$

$$= m(2^{k-1})\hat u_k(\xi) + \int_{2^{k-1}}^{2^{k+1}} m'(\tau)(T\chi_{[\tau,+\infty)} u_k)^\wedge(\xi)d\tau.$$

Применим обратное преобразование Фурье:

$$T_m u_k = m(2^{k-1})u_k + \int_{\mathbb{R}} \chi_{I_k} m'(\tau) R_\tau P R_{-\tau} u_k d\tau. \qquad (2)$$

Через P здесь обозначен проектор Рисса, $(Ph)^\wedge = \hat h \chi_{\mathbb{R}_+}$, а через R_τ – оператор умножения на $e^{i\tau x}$.

Так как функция m ограничена, то внеинтегральный член не вызывает проблем. Рассмотрим пространство H, состоящее из функций $u(\tau,k)$, удовлетворяющих следующему неравенству

$$\|u(\tau,k)\|_H = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \sum_k \chi_{I_k}(\tau)|m'(\tau)|u(\tau,k)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Возьмем H-значную функцию

$$g(y;\tau,k) = e^{-i\tau y} u_k(y).$$

Ясно, что функция $g(y;\tau,k)$ лежит в $L^1(\mathbb{R};H)$. Необходимо проверить, что

$$\left\{\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{I_k}(\tau)m'(\tau)R_\tau P g(\,\cdot\,;\tau,k)d\tau\right\}_{-\infty}^{+\infty} \in H^{1,\infty}(\mathbb{R},l^2). \qquad (*)$$

Результат действия оператора T_m на функцию $g(\tau,y,t)$ является аналитической функцией, а значит, следуя [1, Глава II, §4], для доказательства включения $(*)$ достаточно проверить выполнение условия D_1 равномерно по $t>0$ для ядер

$$K_t(x,y,\tau,k) = \left\{\frac{\chi_{I_k}(\tau)m'(\tau)e^{i\tau(x+it)}}{x+it-y}\right\}_{-\infty}^{+\infty}$$

В общем случае, для оператора с несверточным ядром $K(u,v)$ это условие имеет следующий вид:

$$\int\limits_{|u-v_1|>2|v_1-v_2|} \|K(u,v_1)-K(u,v_2)\|dx \leqslant D_1(K) < \infty.$$

В нашем случае для проверки условия D_1 по переменной y надо доказать, что

$$\int\limits_{x\notin 2I} \|K_t(x,y_1,\tau,k)-K_t(x,y_2,\tau,k)\|_{L(H,l^2)}dx \leqslant C$$

при $y_1,y_2\in I$. Но и действительно,

$$\int\limits_{x\notin 2I} \|K_t(x,y_1,\tau,k)-K_t(x,y_2,\tau,k)\|_{L(H,l^2)}dx$$

$$= \int\limits_{x\notin 2I} \int\limits_{\mathbb{R}} \max_k \left(\chi_{I_k}(\tau)|m'(\tau)|e^{-2tr} \Big| \frac{1}{x+it-y_1} - \frac{1}{x+it-y_2} \Big|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \int\limits_{x\notin 2I} \Big| \frac{1}{x+it-y_1} - \frac{1}{x+it-y_2} \Big| \max_k \left(\int\limits_{I_k} e^{-2t\tau}|m'(\tau)|d\tau \right)^{\frac{1}{2}} dx \leqslant C.$$

Таким образом проверено условие D_1 и доказан переход 2.

3) Докажем третий переход.

Для этого необходимо показать, что оператор S действует из пространства $H^{1,\infty}(\mathbb{R}, l^2)$ в пространство $H^{1,\infty}(\mathbb{R})$. Для этого воспользуемся атомным разложением в пространстве $H^{1,\infty}(\mathbb{R})$, полученным в [2]. В случае скалярных функций этот результат формулировался в §1.

Если функция f лежит в пространстве $\operatorname{Re} H^{1,\infty}$, то существует последовательность ограниченных функций $\{f_k\}_{-\infty}^{+\infty}$, удовлетворяющая следующим требованиям

1) $v - \sum\limits_{|k|\leqslant N} v_k \to 0$ в смысле теории распределений;

2) каждая функция v_k в свою очередь может быть разложена в сумму $v_k = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \beta_{ki}$, где функции β_{ki} удовлетворяют следующим требованиям:

(a) функция β_{ki} сосредоточена на интервале Q_{ki} и интервалы Q_{ki} имеют конечную кратность пересечения;

(b) $\int\limits_{Q_{ki}} \beta_{ki} = 0$;

(c) $\|\beta_{ki}\|_{L^\infty} \leqslant C \cdot 2^k$ и $\sum\limits_i m(Q_{ki}) \leqslant C_1 \cdot 2^{-k}$.

Для пространства $\operatorname{Re} H^{1,\infty}(\mathbb{R}, l^2)$ имеет место аналогичный результат с тем же доказательством. Покажем, что сверточный оператор T с ядром K, удовлетворяющим условию D_∞ (см. переход 1), действует из пространства $H^{1,\infty}(\mathbb{R}, l^2)$ в пространстве $H^{1,\infty}(\mathbb{R})$. Разобьем функцию v в сумму двух функций g_0 и g_1:

$$v = g_0 + g_1 = \sum_{k=-\infty}^{k_0} f_k + \sum_{k=k_0}^{\infty} f_k.$$

Достаточно показать, что

$$m\{x \,|\, |P^*_{\nabla,2} Tf(x)| \geqslant \alpha\} \leqslant \frac{c}{\alpha} \|f\|_{H^{1,\infty}}.$$

Оператор T ограниченно действует в пространствах L^2 и H^p, где $p < 1$ и p достаточно близко к 1 (см. [1, Гл. III, Теорема 7.9]; в той теореме наложены чуть более сильные условия на ядро оператора, однако соответствующее утверждение верно и в нашем случае). Таким образом, справедливы следующие оценки:

$$\|P^*_{\nabla,2}Tg_0\|_{L^2} \leqslant C\|g_0\|_{H^2},$$

$$\|P^*_{\nabla,2}Tg_1\|_{L^p} \leqslant C\|g_1\|_{H^p}.$$

Оценим норму функции g_0 в пространстве H^2:

$$\|g_0\|_{H^2} \leqslant \Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0}\sum_i m(Q_{ki})\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^k\Big)^{\frac{1}{2}} \asymp 2^{\frac{k_0}{2}}.$$

Тогда $\{x|\,|P^*_{\nabla,2}Tg_0(x)| \geqslant \alpha\} \leqslant C \cdot 2^{k_0}\alpha^2$. Рассмотрим разложение функции g_1 на (p,∞)-атомы. Для этого нормируем функции β_{ki}:

$$\|g_1\|_{L^p} \leqslant \Big\|\sum_{k,i}(2^{-k}\beta_{ki}|Q_{ki}|^{-\frac{1}{p}})2^k|Q_{ki}|^{\frac{1}{p}}\Big\| = \Big(\sum_{k=k_0}^{N}\sum_i 2^{kp}|Q_{ki}|\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \Big(\sum_{k=k_0}^{N} 2^{k(p-1)}\Big)^{\frac{1}{p}} \asymp 2^{k_0\frac{p-1}{p}}$$

Следовательно,

$$m\{|\,|NTg_1(x)| \geqslant \alpha\} \leqslant C \cdot 2^{k_0(p-1)}\alpha^{-p}.$$

Взяв $2^{k_0} = \alpha$, получим неравенство

$$m\{x|\,|P^*_{\nabla,2}Tf(x)| \geqslant \alpha\} \leqslant \frac{c}{\alpha}\|f\|_{H^{1,\infty}}. \qquad \square$$

Литература

1. J. Garcia-Cuerva, J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics.* North–Holland (1986).
2. R. Fefferman and F. Soria, *The space Weak H^1.* — Studia Mathematica **85**, No. 1 (1986), 1–16.
3. F. J. Ruiz and J. L. Torrea, *Calderón–Zygmund theory for operator-valued kernels.* — Advances in mathematics **62**, No. 1 (1986), 1–46.
4. A. Torchinsky, *Real-variable methods in harmonic analysis.* — Academic Press, Inc. (1986).

5. И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* Мир, М. (1973).

Parilov D. V. Two theorems on the Hardy–Lorentz classes $H^{1,q}$.

In this paper two main topics are described. First, we obtain atomic decomposition for the spaces $H^{1,q}$, $1 < q < \infty$ (this case has not been considered before). Second, we show that a multiplier that meets the condition of the Marcinkiewicz Theorem, acts from H^1 to $H^{(1,\infty)}$.

С.-Петербургское
отделение Математического
института им. В. А. Стеклова

Поступило 16 мая 2005 г.