Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 327, 2005 г.

А. С. Костенко

СТРУНА КРЕЙНА И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. Введение.

В работе изучается несамосопряженный оператор

$$L_S = \begin{pmatrix} 0 & i\frac{d}{dx} \\ i\frac{d}{dm(x)} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

порожденный в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H} = L^2[0,\ l\rangle \oplus L^2_m[0,\ l\rangle$ струной S. Строгое определение оператора L_S приведено ниже.

М. А. Нудельманом [12] показано, что оператор $-B_S := iL_S$ является максимальным аккретивным, и исследована его характеристическая функция. При этом исследование свойств последней было сведено к исследованию свойств передаточной функции консервативной системы рассеяния с непрерывным временем, в которую оператор B_S был включен в качестве основного оператора системы. Именно, в [12] построена полугруппа Лакса–Филлипса, соответствующая неоднородной струне S, и характеристическая функция $\theta_{B_S}(\cdot)$ оператора струны B_S может быть интерпретирована как матрица рассеяния струны S. С другой стороны, согласно [13] (см. также [1, 3]), существует каноническая биекция между консервативными системами рассеяния и унитарными полугруппами Лакса–Филлипса. Это позволяет найти коэффициенты консервативной системы рассеяния λ_{C_S}, описывающей малые колебания неоднородной струны. Оказывается, что основной оператор полученной системы совпадает с оператором B_S. В [12] установлена также вполне несамосопряженность этой системы, то есть вполне несамосопряженность оператора B_S, и найдена формула, связывающая его характеристическую функцию с коэффициентом динамической податливости $\Gamma(\cdot)$ струны S.

Напомним, что оператор называют вполне несамосопряженным, если он не имеет приводящего подпространства, на котором индуцируется самосопряженный оператор.

В настоящей работе мы изучаем оператор L_S в рамках теории расширений. А именно, мы рассматриваем минимальный симметрический оператор L_0, порожденный струной S. Мы находим его индексы дефекта, указываем граничную тройку оператора L_0^* и находим соответствующую функцию Вейля $M(\cdot)$. Оказывается, что в сингулярном случае $M(\cdot)$ легко выражается через коэффициент динамической податливости струны S. Кроме того, получено простое доказательство вполне несамосопряженности симметрического оператора L_0. Оператор L_S является почти разрешимым расширением оператора L_0 и для нахождения его характеристической функции используется формула для характеристической функции почти разрешимых расширений симметрических операторов, найденная В. А. Деркачем и М. М. Маламудом (см. [7, 8]). Оказывается, что при определенном выборе граничной тройки оператора L_0^*, характеристическая функция оператора L_S совпадает с характеристической функцией, найденной М. А. Нудельманом в [12].

Также описаны расширения оператора L_0, имеющие скалярную характеристическую функцию. Кроме того, вычисление характеристической функции сводится к несложной чисто технической процедуре.

Обозначения: $\mathfrak{H}, \mathcal{H}$ – гильбертовы пространства; $[\mathfrak{H}, \mathcal{H}]$ – множество ограниченных линейных операторов из $\mathfrak{H}$ в $\mathcal{H}$; $[\mathfrak{H}] := [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$; $\mathrm{dom}(A), \mathrm{ran}(A)$ – область определения и область значений оператора A; $\ker(A) = \{f \in \mathfrak{H} : Af = 0\}$ – ядро оператора A; $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(A - \lambda) = \{0\}, \ \mathrm{ran}(A - \lambda) = \mathfrak{H}\}$ – резольвентное множество оператора A; $\mathrm{Im}\, A := (A - A^*)/2i$ – мнимая часть оператора A.

2. Оператор L_S.

Пусть на промежутке $[0,\ l\rangle$ задана неубывающая функция $m(\cdot)$ и $m(0) = 0$. Также будем считать, что $x = 0$ и $x = l$ – точки роста и непрерывности функции $m(\cdot)$, то есть $0 = m(+0) < m(x) < m(l - 0) = m(l)$, $x \in (0, l)$. Знак “$\rangle$” обозначает закрывающую квадратную скобку, если $\mathcal{L} := l + m(l-0) < \infty$ (случай регулярной струны), и закрывающую круглую скобку, если $\mathcal{L} = \infty$ (случай сингулярной струны).

Равенство

$$g(x) = D_m f(x) := -i \frac{df(x)}{dm(x)}, \qquad x \in [0,\ l\rangle\,,$$

означает, что

$$f(x) = f(0) + i \int_0^x g(t)dm(t), \qquad x \in [0,\ l\rangle\,,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега–Стилтьеса (в случае $m(x) = x$ пишут $D_m = D$).

Обозначим через $W_m\,[0,l\rangle$ гильбертово пространство, состоящее из квадратично суммируемых по мере dm функций $f \in L^2_m\,[0,l\rangle$, которые являются абсолютно непрерывными относительно меры Лебега и удовлетворяют соотношению $Df \in L^2\,[0,l\rangle$, наделенное нормой графика

$$\|f\|_{W_m} = \int_0^l |f(t)|^2 dm(t) + \int_0^l |Df(t)|^2 dt.$$

Гильбертово пространство $W^m\,[0,l\rangle$ состоит из квадратично суммируемых функций $f \in L^2\,[0,l\rangle$, которые абсолютно непрерывны относительно меры dm и удовлетворяют соотношению $D_m f \in L^2_m\,[0,l\rangle$. Норма определяется равенством

$$\|f\|_{W^m} = \int_0^l |f(t)|^2 dt + \int_0^l |D_m f(t)|^2 dm(t).$$

Функцию $m(\cdot)$ можно трактовать как функцию распределения масс, насаженных на струну, натянутую на промежутке $[0,l\rangle$. Считая силу натяжения равной 1, получают уравнение малых колебаний нагруженной струны:

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x\, \partial m(x)}, \qquad x \in [0,\mathcal{L}\rangle\,, \quad t \in [0,+\infty)\,, \tag{2}$$

где w – смещение точки струны относительно положения равновесия, t – время.

Уравнение (2) естественным образом порождает оператор (см., например, [12])

$$L_S = \begin{pmatrix} 0 & -D \\ -D_m & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H} = L^2\,[0,l\rangle \oplus L^2_m\,[0,l\rangle$ (дополнительно будем считать, что элементы первого слагаемого ортогональной суммы обращаются в константу на промежутках, свободных от массы). Область определения оператора L_S состоит из вектор-функций

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad f_1 \in W^m\,[0,\ l\rangle\,, \quad f_2 \in W_m\,[0,\ l\rangle\,, \tag{4}$$

удовлетворяющих условию

$$f_1(0) = f_2(0). \tag{5}$$

Кроме того, в случае регулярной струны в правом конце будем различать два вида условий:

$$f_1(l) = 0 \quad \text{либо} \quad f_2(l) = 0. \tag{6}$$

Условие (5) интерпретируется как единичное трение (по поводу струны с трением см. работы [2, 10, 15]).

3. Основные сведения из теории струны Крейна.

Напомним некоторые определения и обозначения спектральной теории струны Крейна, следуя [9].

Через $\varphi(x,\lambda)$ обозначается решение уравнения

$$-\frac{d^2u(x)}{dx\ dm(x)} - \lambda\, u(x) = 0, \tag{7}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(0) = 1, \qquad u^-(0) = 0.$$

Здесь и в дальнейшем знак "$-$" вверху означает производную слева по x, знак "$+$" вверху означает производную справа по x (подробности см. в [9]).

Через $\psi(x,\lambda)$ обозначается решение уравнения (7), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(0) = 0, \qquad u^-(0) = 1.$$

С регулярной струной S, определяемой уравнением (7) и граничным условием $u(l) = 0$ на правом конце, ассоциируется функция

$$\Gamma(\lambda) := \frac{\psi(l,\lambda)}{\varphi(l,\lambda)}, \qquad \lambda \notin [0,\infty)\,, \tag{8}$$

называемая коэффициентом динамической податливости струны.

Если граничное условие на правом конце струны S имеет вид $u^+(l) = 0$, то формула (8) переписывается в виде

$$\Gamma(\lambda) := \frac{\psi^+(l,\lambda)}{\varphi^+(l,\lambda)}, \qquad \lambda \notin [0,+\infty)\,. \tag{9}$$

В случае сингулярной струны S для каждого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0,\ +\infty)$ существует общий предел

$$\Gamma(\lambda) := \lim_{x\to l-0} \frac{\psi(x,\lambda)}{\varphi(x,\lambda)} = \lim_{x\to l-0} \frac{\psi^+(x,\lambda)}{\varphi^+(x,\lambda)}, \qquad \lambda \notin [0,+\infty)\,. \tag{10}$$

Функцию $\Gamma(\cdot)$ называют коэффициентом динамической податливости.

Во всех перечисленных случаях функция $\Gamma(\cdot)$ принадлежит классу Крейна–Стилтьеса и, значит, допускает интегральное представление

$$\Gamma(\lambda) = \gamma + \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\tau(s)}{s-\lambda}, \qquad \lambda \notin [0,+\infty)\,, \tag{11}$$

где $\gamma \geq 0$, а $\tau(\cdot)$ – неубывающая функция, заданная на промежутке $[0,+\infty)$ и удовлетворяющая условиям

$$\tau(s) = \frac{1}{2}\left(\tau(s+0) + \tau(s-0)\right), \qquad \tau(0) = 0, \qquad \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\tau(s)}{1+s} < +\infty.$$

Функция $\tau(\cdot)$ называется главной спектральной функцией струны S, а порождаемая ею мера Лебега–Стилтьеса $d\tau(\cdot)$ – главной спектральной мерой струны S.

4. Характеристические функции почти разрешимых расширений симметрического оператора.

Для изучения собственных расширений симметрических операторов мы будем пользоваться концепцией граничных троек и соответствующих им функций Вейля. Приведем необходимые определения и обозначения, следуя работе [7].

Пусть A – симметрический оператор с плотной областью определения $\operatorname{dom}(A)$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и равными индексами дефекта $n_+(A) = n_-(A)$ $(n_\pm(A) = \dim(\mathfrak{H} \ominus \operatorname{ran}(A \pm iI)))$.

Определение 1 ([5]). *Совокупность* $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, *в которой* $\mathcal{H}$ – *сепарабельное гильбертово пространство, а* Γ_0 *и* Γ_1 – *линейные отображения из* $\mathrm{dom}(A^*)$ *в* $\mathcal{H}$, *называется граничной тройкой для* A^*, *если отображение* $\Gamma : f \to \{\Gamma_1 f, \Gamma_0 f\}$ *из* $\mathrm{dom}(A^*)$ *в* $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ *сюръективно и справедлива формула Грина*

$$(A^*f, g) - (f, A^*g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}, \quad f, g \in \mathrm{dom}(A^*). \tag{12}$$

Отметим, что граничная тройка оператора A^* определяется не единственным образом.

Определение 2 ([7]). *Собственное расширение* $\widetilde{A} \supset A$ *называется почти разрешимым, если существуют граничная тройка* $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *и оператор* $B \in [\mathcal{H}]$ *такие, что* $\mathrm{dom}(\widetilde{A}) = \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_0)$.

Пусть $\widetilde{A_i} := A^* | \ker(\Gamma_i)$, $i \in \{0, 1\}$. Известно (см. [7]), что $\widetilde{A_i} = \widetilde{A_i}^*$, $i \in \{0, 1\}$.

Определение 3 ([7]). *Оператор-функция* $M(\cdot) : \rho(\widetilde{A_0}) \to [\mathcal{H}]$, *определяемая равенством*

$$M(\lambda)\Gamma_0 f_\lambda = \Gamma_1 f_\lambda, \qquad f_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda, \ \lambda \in \rho(\widetilde{A_0}), \tag{13}$$

называется функцией Вейля, соответствующей граничной тройке $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$. *Здесь* $\mathfrak{N}_\lambda := \ker(A^* - \lambda I)$.

Пусть заданы сепарабельные гильбертовы пространства $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$ и линейные ограниченные операторы $B \in [\mathcal{H}]$, $J \in [\mathcal{H}']$, $K \in [\mathcal{H}', \mathcal{H}]$. Напомним, следуя [4], что совокупность $\Psi = (B,\ \mathcal{H};\ K, J, \mathcal{H}')$ называют операторным узлом или просто узлом, если выполнены соотношения

$$J = J^{-1} = J^*, \qquad KJK^* = \mathrm{Im}\, B = (B - B^*)/2i. \tag{14}$$

Пусть $A_B := A^* | \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_0)$ – почти разрешимое расширение симметрического оператора A. Определим оператор-функцию $\Gamma_0(\cdot)$, полагая $\Gamma_0(\lambda) := \Gamma_0 | \mathfrak{N}_\lambda \in [\mathfrak{N}_\lambda,\ \mathcal{H}]$.

Определение 4 ([7]). *Пусть оператор* B *включен в узел* $\Psi = (B,\ \mathcal{H};\ K, J, \mathcal{H}')$. *Оператор-функцию*

$$W(\lambda) = I + 2iK^*\Gamma_0(A_B^* - \lambda)^{-1}\Gamma_0^*(\overline{\lambda})KJ, \qquad \lambda \in \rho(A_B^*), \tag{15}$$

называют характеристической оператор-функцией оператора A_B.

Справедлива следующая

Теорема 1 ([7]). *Пусть* $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *– некоторая граничная тройка оператора* A^*, $M(\cdot)$ *– соответствующая функция Вейля,* $B \in [\mathcal{H}]$ *и* $\Psi = (B,\ \mathcal{H};\ K, J, \mathcal{H}')$ *– операторный узел. Тогда характеристическая оператор-функция* $W(\cdot)$ *оператора* A_B *имеет вид*

$$W(\lambda) = I + 2iK^*(B^* - M(\lambda))^{-1}KJ. \tag{16}$$

Замечание 1 ([7]). Если $\ker(\operatorname{Im} B) = \{0\}$, то при надлежащем выборе узла Ψ характеристическая функция оператора A_B имеет вид

$$W(\lambda) = (B - M(\lambda))(B^* - M(\lambda))^{-1}. \tag{17}$$

5. Вполне несамосопряженность оператора L_0.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H} = L^2[0,\ l\rangle \oplus L^2_m[0,\ l\rangle$ замкнутый симметрический оператор

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0 & -D \\ -D_m & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

с областью определения

$$\operatorname{dom}(L_0) = \{f \in W^m[0,\ l\rangle \oplus W_m[0,\ l\rangle : f(0) = f(l) = 0\}$$

в случае регулярной струны, и с областью

$$\operatorname{dom}(L_0) = \{f \in W^m[0,\ l\rangle \oplus W_m[0,\ l\rangle : f(0) = 0\}$$

в случае сингулярной.

Теорема 2. *Оператор* L_0 *вида* (18) *является простым симметрическим оператором. При этом* $n_\pm(L_0) = 2$, *если струна регулярна, и* $n_\pm(L_0) = 1$, *если она сингулярна.*

Доказательство. **(i)** Пусть $f \in \mathfrak{N}_\lambda(L_0)$ – дефектный вектор оператора L_0, то есть

$$L_0^* \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in \operatorname{dom}(L_0^*). \tag{19}$$

Следуя [6] (см. также [2, стр. 456–458]), рассмотрим отображение $S : [0, l\rangle \to [0, \mathcal{L}\rangle$, полагая

$$s(x) = x + m(x). \tag{20}$$

Так как $s(x)$ строго возрастающая функция, то соотношение (20) позволяет определить неубывающую обратную функцию $x = x[s]$, считая ее для всех s из интервала $x_0+m(x_0-0)<s<x_0+m(x_0+0)$ равной x_0. Далее, функции $x[s]$ и $m[s]:=m(x(s))$ абсолютно непрерывны относительно переменной s и их производные

$$h_1(s):=\frac{dx[s]}{ds}, \qquad h_2(s):=\frac{dm[s]}{ds} \tag{21}$$

неотрицательны и удовлетворяют почти всюду на $[0,\mathcal{L}\rangle$ условию

$$h_1(s)+h_2(s)=1, \qquad h_i(s)\geq 0. \tag{22}$$

Замена

$$y(s)=\begin{pmatrix} y_1(s)\\ y_2(s)\end{pmatrix}:=f(x[s])=\begin{pmatrix} f_1(x[s])\\ f_2(x[s])\end{pmatrix} \tag{23}$$

приводит систему (19) к каноническому виду

$$Jy'(s)=\lambda H(s)y(s), \qquad s\in[0,\ \mathcal{L}\rangle\,; \qquad y(0)=y(\mathcal{L})=0, \tag{24}$$

$$(\text{в сингулярном случае}\ \ y(0)=0),$$

где

$$J=\begin{pmatrix} 0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}\ , \qquad H(s)=\begin{pmatrix} h_1(s) & 0\\ 0 & h_2(s)\end{pmatrix}.$$

Кроме того, при данном преобразовании индексы дефекта оператора L_0 совпадают с формальными индексами дефекта системы (24) (см. [16, с. 577]). Из условия (22) и абсолютной непрерывности функций $x[s]$ и $m[s]$ следует, что система (24) является определенной, поэтому, согласно [16 (Предложение 2.19)], формальные индексы дефекта совпадают с индексами дефекта системы (24). Таким образом, индексы дефекта оператора L_0 совпадают с индексами дефекта системы (24).

Согласно [9], в регулярном случае $n_\pm(L_0)=2$.

Рассмотрим сингулярный случай. Так как $trH(s)=1$, то, согласно теореме де Бранжа–Каца–Крейна [9] (см. также [16], где содержится существенное обобщение этой теоремы), система (24) имеет индексы дефекта (1, 1), а значит, и $n_\pm(L_0)=1$.

(ii) Докажем вполне несамосопряженность оператора L_0. Предположим противное. Тогда имеет место разложение пространства $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_1\oplus\mathfrak{H}_2$, относительно которого $L_0=C_1\oplus C_2$, и при этом

$C_1 = C_1^*$, а C_2 – вполне несамосопряженный симметрический оператор. Следовательно, оператор L_0^2 индуцирует в $\mathfrak{H}_1$ самосопряженный оператор C_1^2. Заметим, что

$$L_0^2 = \begin{pmatrix} DD_m & 0 \\ 0 & D_m D \end{pmatrix},$$
$$\operatorname{dom}(L_0^2) = \{f \in L^2\,[0,\ l\rangle \oplus L_m^2\,[0,\ l\rangle : f \in \operatorname{dom}(L_0), L_0 f \in \operatorname{dom}(L_0)\}.$$

Покажем, что оператор L_0^2 является ортогональной суммой двух симметрических операторов, каждый из которых вполне несамосопряжен. Ограничимся сингулярным случаем (в регулярном случае рассуждения аналогичны). Рассмотрим в $L^2\,[0,l\rangle$ самосопряженный оператор с условием Неймана в левом конце

$$L_N f = -\frac{d^2 f}{dx dm(x)},$$
$$\operatorname{dom}(L_N) = \{f \in L^2\,[0,l\rangle : f \in W^m\,[0,l\rangle\,, Df \in W_m\,[0,l\rangle\,, (Df)(0) = 0\}.$$

Рассмотрим обобщенное преобразование Фурье $U : f \to F$, где $f \in L^2\,[0,l\rangle$, а

$$F(\lambda) = (Uf)(\lambda) := \int_0^l f(x)\varphi(x,\lambda)dx.$$

Известно (см. теорему 10.1, а также “Основную теорему” в регулярном случае об ортогональности спектральных функций струны в [9]), что U изометрически отображает $L^2\,[0,l\rangle$ на $L_{d\tau}^2\,[0,+\infty\rangle$. При этом оператор L_N переходит в оператор умножения

$$(A_{d\tau}F)(\lambda) := \lambda F(\lambda),$$
$$\operatorname{dom}(A_{d\tau}) = \{F \in L_{d\tau}^2\,[0,+\infty\rangle : \int_0^{+\infty} |\lambda F(\lambda)|^2 d\tau(\lambda) < \infty\}.$$

Заметим, что обратное преобразование задается тем же ядром $\varphi(x,\lambda)$. Простая проверка показывает, что граничное условие $f(0) = 0$ при отображении U переходит в условие

$$\int_0^{+\infty} F(\lambda)d\tau(\lambda) = 0.$$

Следовательно, симметрический оператор

$$L_N^0 f = -\frac{d^2 f}{dx dm(x)},$$
$$\mathrm{dom}(L_N) = \{f \in L^2[0,l\rangle : f \in W^m[0,l\rangle,$$
$$Df \in W_m[0,l\rangle, f(0) = (Df)(0) = 0\},$$

унитарно эквивалентен оператору

$$(A_{d\tau}^0 F)(\lambda) := \lambda F(\lambda),$$
$$\mathrm{dom}(A_{d\tau}^0) = \left\{F \in L_{d\tau}^2[0,+\infty\rangle : \int_0^{+\infty} |\lambda F(\lambda)|^2 d\tau(\lambda) < \infty, \right.$$
$$\left. \int_0^{+\infty} F(\lambda) d\tau(\lambda) = 0\right\}.$$

Оператор $A_{d\tau}^0$ (см. [11]) – модель симметрического оператора с индексами (1,1), и, согласно [11], он вполне несамосопряжен. Из унитарной эквивалентности вытекает вполне несамосопряженность оператора L_N^0.

Аналогичным образом можно показать, что симметрический оператор, порождаемый дифференциальным выражением $D_m D$ в $L_m^2[0,l\rangle$, также является вполне несамосопряженным. Следовательно, оператор L_0^2 вполне несамосопряжен.

Полученное противоречие доказывает вполне несамосопряженность оператора L_0. □

Замечание 2. Так как в сингулярном случае индексы дефекта системы (24) минимальны, то существует предел

$$\lim_{s\to+\infty} y^*(s) J y(s) = 0.$$

Следовательно, из (23) для всех $f \in \mathrm{dom}(L_0^*)$ вытекает существование предела

$$\lim_{x\to l-0} f^*(x) J f(x) = 0, \qquad f \in \mathrm{dom}(L_0^*). \tag{25}$$

Следствие 1. *Оператор L_S является вполне несамосопряженным.*

Доказательство. Вполне несамосопряженность оператора L_S вытекает из вполне несамосопряженности оператора L_0. Действительно, в случае сингулярной струны, как показано выше, оператор L_S является одномерным квазиэрмитовым расширением вполне несамосопряженного симметрического оператора L_0 и, значит, является вполне несамосопряженным.

В случае регулярной струны оператор L_S также является одномерным расширением некоторого вполне несамосопряженного симметрического оператора. Например, для струны S с граничным условием в правом конце $f_2(l) = 0$ рассмотрим оператор

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -D \\ -D_m & 0 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

с областью определения

$$\operatorname{dom}(L) = \{f \in W^m\,[0,\ l\rangle \oplus W_m\,[0,\ l\rangle : f_1(0) = f_2(0) = f_2(l) = 0\}.$$

Очевидно (см. теорему 2), что L является симметрическим оператором, причем $n_\pm(L) = 1$. Вполне несамосопряженность оператора L устанавливается аналогично доказательству вполне несамосопряженности оператора L_0. Кроме того, L_S является одномерным квазиэрмитовым расширением оператора L и, следовательно, является вполне несамосопряженным.

Покажем, что одномерное квазиэрмитово расширение $\widetilde{A}$ вполне несамосопряженного симметрического оператора A будет вполне несамосопряженным оператором. Согласно первой формуле Неймана, имеем

$$\operatorname{dom}(\widetilde{A}) = \operatorname{dom}(A) \dotplus \operatorname{span}\{\widetilde{f}\}, \qquad \widetilde{f} \in \mathfrak{N}_i \dotplus \mathfrak{N}_{-i}, \tag{27}$$

к тому же

$$(\widetilde{A}\widetilde{f}, \widetilde{f}) = (A^*\widetilde{f}, \widetilde{f}) \neq (\widetilde{f}, A^*\widetilde{f}) = (\widetilde{f}, \widetilde{A}\widetilde{f}). \tag{28}$$

Предположим, что $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$ приводящее подпространство оператора $\widetilde{A}$, в котором $\widetilde{A}$ индуцирует самосопряженный оператор $A_1 = A_1^* := \widetilde{A}|_{\mathfrak{H}_1}$. Из (27) и (28) с очевидностью вытекает, что

$P_{\mathfrak{H}_1} \operatorname{dom}(\widetilde{A}) \subset \operatorname{dom}(A)$ (здесь $P_{\mathfrak{H}_1}$ – ортопроектор в $\mathfrak{H}$ на подпространство $\mathfrak{H}_1$). Следовательно,

$$A_1 = \widetilde{A}|_{\mathfrak{H}_1} = A|_{\mathfrak{H}_1},$$

а это противоречит вполне несамосопряженности оператора A.$\square$

Замечание 3. Значительно более сложное доказательство вполне несамосопряженности оператора L_S получено в [12]. Именно, доказательство вполне неунитарности полугруппы $V_S(t)$, порожденной оператором струны $B_S = -iL_S$, основано на анализе поведения резольвенты оператора B_S.

В свою очередь, вполне несамосопряженность симметрического оператора L_0 вытекает из результатов работы [12], так как L_0 является сужением вполне несамосопряженного оператора L_S на область $\operatorname{dom}(L_0)$.

Замечание 4. Стоит еще отметить, что все результаты этого пункта будут верны и при самых общих предположениях на функцию распределения масс $m(\cdot)$. А именно, можно считать, что $m(\cdot)$ – неубывающая функция на $[0, l\rangle$ такая, что $m(0) = 0$. Однако при этом минимальный симметрический оператор L_0 не обязан быть плотно заданным (так будет, например, если $m_0 = m(+0) - m(0) > 0$, так как в этом случае функционал $\delta : f \to f(0)$ ограничен в $L^2_m[0, l\rangle$). Тогда L_0^* уже будет линейным отношением, область определения которого состоит из так называемых "продленных функций" (см. [9]).

6. Характеристическая функция оператора L_S.

Характеристическая функция $W(\cdot)$ почти разрешимого расширения $\widetilde{A}$ вполне несамосопряженного симметрического оператора A, определяемая соотношением (15), зависит от выбора граничной тройки Π оператора A^*, а также от способа включения граничного оператора B в узел φ. Однако, $W(\cdot)$ определяется единственным образом с точностью до J-унитарных множителей (см. [7]).

Оказывается, что при определенном выборе граничной тройки оператора L_0^*, характеристическая функция оператора струны L_S совпадает с функцией, найденной М. А. Нудельманом в [12].

Теорема 3. *Пусть S – сингулярная струна, $\Gamma(\cdot)$ – коэффициент динамической податливости струны S, и L_S – оператор вида* (3)–(5). *Тогда:*

1) *совокупность* $\Pi = \{\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, *в которой*

$$\Gamma_1 f = f_2(0), \quad \Gamma_0 f = i f_1(0) \quad (\Gamma_i : \mathrm{dom}(L_0^*) \to \mathbb{C}, \ i \in \{0, 1\}), \tag{29}$$

образует граничную тройку оператора L_0^**;*

2)

$$M(\lambda) = -\frac{1}{\lambda \Gamma(\lambda^2)}$$

– функция Вейля, соответствующая граничной тройке Π*;*

3) *одна из характеристических функций оператора* L_S *имеет вид*

$$W(\lambda) = \frac{1 - i\lambda\Gamma(\lambda^2)}{1 + i\lambda\Gamma(\lambda^2)}. \tag{30}$$

Доказательство. 1) В сингулярном случае, согласно теореме 2, $n_\pm(L_0) = 1$ и имеет место формула (25). Следовательно, формула Грина (12) принимает вид

$$(L_0^* f, g) - (f, L_0^* g) = -i(f_1(0)\overline{g_2(0)} + f_2(0)\overline{g_1(0)}).$$

Таким образом, совокупность

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}, \qquad \Gamma_1 f = f_2(0), \qquad \Gamma_0 f = i f_1(0) \tag{31}$$

определяет граничную тройку оператора L_0^*.

2) Пусть $f(x,\lambda) = \begin{pmatrix} f_1(x,\lambda) \\ f_2(x,\lambda) \end{pmatrix} \in \mathfrak{N}_\lambda(L_0)$, то есть $L_0^* f - \lambda f = 0$, и $f \in \mathrm{dom}(L_0^*)$. Тогда функции f_1 и f_2 удовлетворяют условиям

$$-\frac{d^2 f_1(x,\lambda)}{dx\,dm(x)} = \lambda^2 f_1(x,\lambda), \qquad f_2(x,\lambda) = \frac{i}{\lambda}\frac{df_1(x,\lambda)}{dm(x)}. \tag{32}$$

Из (25) и последнего равенства для $f(x,\lambda) \in \mathfrak{N}_\lambda$ имеем

$$\lim_{x \to l-0} f_1(x,\lambda) \cdot \frac{df_1(x,\lambda)}{dm(x)} = 0. \tag{33}$$

Функции $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$ являются линейно независимыми решениями уравнения (7), поэтому, учитывая соотношения (7) и (32)–(33), получаем

$$f(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \psi(x,\lambda^2) - \Gamma(\lambda^2)\varphi(x,\lambda^2) \\ i(\psi_m'(x,\lambda^2) - \Gamma(\lambda^2)\varphi_m'(x,\lambda^2))/\lambda \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Далее, согласно (29), находим

$$\Gamma_1 f(x,\lambda) = \frac{i}{\lambda}, \quad \Gamma_0 f(x,\lambda) = -i\Gamma(\lambda^2).$$

Следовательно, функция Вейля, соответствующая граничной тройке (29), определяется равенством

$$M(\lambda) = -\frac{1}{\lambda\Gamma(\lambda^2)}. \tag{35}$$

3) Полагая $B = -i$, определим почти разрешимое расширение L_B оператора L_0: $\mathrm{dom}(L_B) := \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_0)$. Легко видеть, что

$$\mathrm{dom}(L_S) = \mathrm{dom}(L_B) = \{f \in \mathrm{dom}(L_0^*) : f_1(0) = f_2(0)\}. \tag{36}$$

Так как $\operatorname{Im} B = (B - B^*)/2i = -1 = K(-1)K^*$, где $K = 1$, то, учитывая вид функции Вейля $M(\cdot)$, находим по формуле (16) характеристическую функцию оператора L_S:

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= 1 - 2i\left(i + \frac{1}{\lambda\Gamma(\lambda^2)}\right)^{-1} = \\ &= 1 - 2i\frac{\lambda\Gamma(\lambda^2)}{i + \lambda\Gamma(\lambda^2)} = \frac{1 - i\lambda\Gamma(\lambda^2)}{1 + i\lambda\Gamma(\lambda^2)}. \end{aligned} \tag{37}$$

□

Замечание 5. Отметим, что в сингулярном случае несамосопряженные почти разрешимые расширения оператора L_0 имеют вид

$$L_B = \begin{pmatrix} 0 & -D \\ -D_m & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{dom}(L_B) = \{f \in W^m[0,\ l\rangle \oplus W_m[0,\ l\rangle : \Gamma_1 f = B\Gamma_0 f\},$$

где $B = a + ib \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, а граничная тройка $\Pi = \{\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ определена соотношениями (29). Таким образом, граничное условие в левом конце для оператора L_B имеет вид

$$f_2(0) + (b - ia)f_1(0) = 0, \qquad b \neq 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Несложные вычисления показывают, что характеристическая функция расширения L_B определяется следующим образом:

$$W_B(\lambda) = \frac{1 + (a + ib)\lambda\Gamma(\lambda^2)}{1 + (a - ib)\lambda\Gamma(\lambda^2)}.$$

Рассмотрим теперь регулярный случай.

Теорема 4. *Пусть* S – *регулярная струна,* $\Gamma(\cdot)$ – *ее коэффициент динамической податливости,* L_S – *оператор вида* (3)–(6) *и* L_0 – *соответствующий симметрический оператор. Тогда:*

1) *совокупность* $\Pi_1 = \{\mathbb{C}^2, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, *в которой* $\Gamma_i : \mathrm{dom}(L_0^*) \to \mathbb{C}^2$, $i \in \{0,1\}$,

$$\Gamma_1 f = \mathrm{col}(-f_1(l),\ f_2(0)), \qquad \Gamma_0 f = \mathrm{col}(if_2(l),\ if_1(0)), \tag{38}$$

образует граничную тройку оператора L_0^*;

2) *совокупность* $\Pi_2 = \{\mathbb{C}^2, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, *в которой* $\Gamma_i : \mathrm{dom}(L_0^*) \to \mathbb{C}^2$, $i \in \{0,1\}$,

$$\Gamma_1 f = \mathrm{col}(if_2(l),\ f_2(0)), \qquad \Gamma_0 f = \mathrm{col}(f_1(l),\ if_1(0)), \tag{39}$$

также образует граничную тройку оператора L_0^*;

3) *одна из характеристических функций оператора* L_S *имеет вид*

$$W(\lambda) = \frac{1 - i\lambda\Gamma(\lambda^2)}{1 + i\lambda\Gamma(\lambda^2)}. \tag{40}$$

Доказательство. (i) В регулярном случае формула Грина (12) принимает вид

$$(L_0^* f, g) - (f, L_0^* g) = \\ = -i(f_1(0)\overline{g_2(0)} + f_2(0)\overline{g_1(0)}) + i(f_1(l)\overline{g_2(l)} + f_2(l)\overline{g_1(l)}). \tag{41}$$

Таким образом доказательство пунктов (1) и (2) вытекает из (41) и несложных вычислений.

(ii) Рассмотрим регулярную струну с условием в правом конце вида $f_1(l) = 0$. Выбирая Π_1 вида (38) в качестве граничной тройки и полагая $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, получим

$$\mathrm{dom}(L_S) = \mathrm{dom}(L_{B_1}) = \{f \in \mathrm{dom}(L^*) : \Gamma_1 f = B_1 \Gamma_0 f\}. \tag{42}$$

Согласно (32), вектор-функция $f(x,\lambda) \in \mathrm{dom}(L_0^*)$ является решением уравнения $L_0^* y(x) - \lambda y(x) = 0$, то есть $f \in \mathfrak{N}_\lambda(L_0)$, в том и только том случае, когда она имеет вид

$$f(x,\lambda) = \begin{pmatrix} c_1\psi(x,\lambda^2) + c_2\varphi(x,\lambda^2) \\ i(c_1\psi_m'(x,\lambda^2) + c_2\varphi_m'(x,\lambda^2))/\lambda \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}. \tag{43}$$

Пусть $M(\cdot) = \begin{pmatrix} M_{11}(\cdot) & M_{12}(\cdot) \\ M_{21}(\cdot) & M_{22}(\cdot) \end{pmatrix}$ – матричное представление функции Вейля, соответствующей граничной тройке Π_1. Тогда из (38) и (43) находим

$$\Gamma_1 f(x,\lambda) = \begin{pmatrix} -c_1\psi(l,\lambda^2) - c_2\varphi(l,\lambda^2) \\ ic_1/\lambda \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_0 f(x,\lambda) = \begin{pmatrix} -(c_1\psi_m'(l,\lambda^2) + c_2\varphi_m'(l,\lambda^2))/\lambda \\ ic_2 \end{pmatrix};$$

и для определения элементов $M_{ij}(\cdot)$ матрицы $M(\cdot)$ мы получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} -c_1\psi(l,\lambda^2) - c_2\varphi(l,\lambda^2) = \\ = \frac{-M_{11}(\lambda)}{\lambda}\left(c_1\psi_m'(l,\lambda^2) + c_2\varphi_m'(l,\lambda^2)\right) + M_{12}(\lambda)ic_2, \\ \dfrac{ic_1}{\lambda} = \dfrac{-M_{21}(\lambda)}{\lambda}\left(c_1\psi_m'(l,\lambda^2) + c_2\varphi_m'(l,\lambda^2)\right) + M_{22}(\lambda)ic_2 \end{cases} \tag{44}$$

После элементарных преобразований она примет вид

$$\begin{cases} c_1(-\psi(l,\lambda^2) + \dfrac{1}{\lambda}M_{11}(\lambda)\psi_m'(l,\lambda^2)) = \\ = c_2(\varphi(l,\lambda^2) - \frac{1}{\lambda}M_{11}(\lambda)\varphi_m'(l,\lambda^2) + iM_{12}(\lambda)), \\ c_1(\frac{i}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}M_{21}(\lambda)\psi_m'(l,\lambda^2)) = \\ = c_2(-\frac{1}{\lambda}M_{21}(\lambda)\varphi_m'(l,\lambda^2) + iM_{22}(\lambda)) \end{cases} \tag{45}$$

Так как коэффициенты c_1 и c_2 независимы, то из (45) приходим к равенствам

$$\begin{gathered} M_{11}(\lambda) = \lambda\frac{\psi(l,\lambda^2)}{\psi_m'(l,\lambda^2)}, \quad M_{21}(\lambda) = \frac{-i}{\psi_m'(l,\lambda^2)}, \\ M_{22}(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\frac{\varphi_m'(l,\lambda^2)}{\psi_m'(l,\lambda^2)}, \end{gathered} \tag{46}$$

$$M_{12}(\lambda) = i\varphi(l,\lambda^2) - i\frac{\psi(l,\lambda^2)}{\psi_m'(l,\lambda^2)}\varphi_m'(l,\lambda^2) = \frac{i}{\psi_m'(l,\lambda^2)}. \tag{47}$$

Включим оператор B_1 в операторный узел $\Psi = (B_1, \mathcal{H}; K,\ J,\ E)$. Так как мнимая часть $\operatorname{Im} B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ вырождена, то положим

$$\begin{gathered} \mathcal{H} = \mathbb{C}^2, \quad E = \mathbb{C}; \quad J = -1, \\ K = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, \quad K^* = (0,\ 1). \end{gathered} \tag{48}$$

Условие узла $\operatorname{Im} B_1 = KJK^*$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (-1) \cdot (0,\ 1)$.

Теперь, согласно теореме 1 (см. (16)), находим характеристическую функцию почти разрешимого расширения L_S оператора L_0:

$$W(\lambda) = I + 2iK^*(B_1^* - M(\lambda))^{-1}KJ = 1 - 2i\frac{-M_{11}(\lambda)}{\det(B_1^* - M(\lambda))}. \quad (49)$$

С учетом формул (46) и (47), после несложных вычислений находим

$$W(\lambda) = \frac{\varphi(l,\lambda^2) - i\lambda\psi(l,\lambda^2)}{\varphi(l,\lambda^2) + i\lambda\psi(l,\lambda^2)} = \frac{1 - i\lambda\Gamma(\lambda^2)}{1 + i\lambda\Gamma(\lambda^2)}. \quad (50)$$

(iii) Пусть теперь L_S оператор регулярной струны S с краевым условием $f_2(l) = 0$. В этом случае

$$\operatorname{dom}(L_S) = \operatorname{dom}(L_{B_2}) = \{f \in \operatorname{dom}(L^*) :\ \Gamma_1 f = B_2\Gamma_0 f\}, \quad (51)$$

где $B_2 = B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, а граничная тройка Π_2 определена соотношениями (39).

Так как дефектный вектор $f(x,\ \lambda) \in \mathfrak{N}_\lambda(L_0^*)$ имеет вид (43), то из (39) получаем

$$\Gamma_0 f(x,\lambda) = \begin{pmatrix} c_1\psi(l,\lambda^2) + c_2\varphi(l,\lambda^2) \\ ic_2 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_1 f(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\lambda}(c_1\psi'_m(l,\lambda^2) + c_2\varphi'_m(l,\lambda^2)) \\ ic_1/\lambda \end{pmatrix}.$$

Далее, аналогично рассуждениям пункта **(ii)** находим элементы матрицы Вейля $M(\cdot)$, соответствующей тройке Π_2:

$$M_{11}(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\frac{\psi'_m(l,\lambda^2)}{\psi(l,\lambda^2)}, \qquad M_{12}(\lambda) = -\frac{i}{\lambda\psi(l,\lambda^2)},$$

$$M_{21}(\lambda) = \frac{i}{\lambda\psi(l,\lambda^2)}, \qquad M_{22}(\lambda) = -\frac{\varphi(l,\lambda^2)}{\lambda\psi(l,\lambda^2)}. \quad (52)$$

Так как $B_2 = B_1$, то по формуле (49) вычисляем характеристическую функцию оператора L_S струны S. Она имеет вид

$$W(\lambda) = \frac{\varphi'_m(l,\lambda^2) - i\lambda\psi'_m(l,\lambda^2)}{\varphi'_m(l,\lambda^2) + i\lambda\psi'_m(l,\lambda^2)} = \frac{1 - i\lambda\Gamma(\lambda^2)}{1 + i\lambda\Gamma(\lambda^2)}. \quad (53)$$

Теорема доказана. □

Замечание 6. Отметим, что формула (30), связывающая характеристическую функцию оператора L_S с коэффициентом динамической податливости струны S, остается справедливой для произвольных распределений масс $m(\cdot)$. Кроме того, для таких струн имеют место аналоги теорем 3–4 (основные сведения о граничных тройках и характеристических функциях почти разрешимых расширений неплотно заданных симметрических операторов содержатся в [8]).

Оператор L_S является максимальным аккумулятивным, так как $\operatorname{Im} B \leq 0$. Кроме того, характеристическая функция $W(\cdot)$ принимает вещественные значения на отрицательной мнимой полуоси. М. Г. Крейн показал (см. [9], а также [14]), что каждая S-функция $\Gamma(\cdot)$ является коэффициентом динамической податливости некоторой струны (регулярной или сингулярной). Из этого факта и вида характеристической функции $W(\cdot)$ оператора L_S М. А. Нудельман в [12] вывел следующее утверждение.

Следствие 2 ([12]). *Всякий простой максимальный аккумулятивный оператор, имеющий скалярную характеристическую функцию, которая принимает вещественные значения на мнимой отрицательной полуоси* $(0, -i\infty)$, *унитарно эквивалентен оператору струны вида* (3)–(6).

Замечание 7. Рассмотрим регулярный случай. Пусть $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ и $B \neq B^*$. Рассмотрим несамосопряженное почти разрешимое расширение оператора L_0, порождаемое матрицей B и граничной тройкой Π_1 вида (38), либо тройкой Π_2 вида (39), т.е.

$$\operatorname{dom}(L_B) = \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_0).$$

Отметим, что оператор L_B является диссипативным (аккумулятивным) тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im} B \geq 0$ $(\operatorname{Im} B \leq 0)$.

Кроме того, оператор L_B имеет скалярную характеристическую функцию в точности тогда, когда $rank(\operatorname{Im} B) = 1$.

Рассмотрим, например, оператор с несамосопряженным граничным условием в правом конце

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 0 & -D \\ -D_m & 0 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{dom}(\tilde{L}) = \{f \in W^m\,[0,\ l\rangle \oplus W_m\,[0,\ l\rangle : f_2(0) = 0, f_1(l) = -f_2(l)\}.$$

В этом случае граничные условия могут быть переписаны в виде

$$\begin{pmatrix} -f_1(l) \\ f_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} if_2(l) \\ if_1(0) \end{pmatrix}.$$

Ясно, что данный оператор является аккумулятивным. Воспользовавшись формулами (46) и (47), а также теоремой 1, после несложных вычислений находим характеристическую функцию оператора $\tilde{L}$

$$W_{\tilde{L}}(\lambda) = \frac{\varphi'_m(l,\lambda^2) - i\lambda\varphi(l,\lambda^2)}{\varphi'_m(l,\lambda^2) + i\lambda\varphi(l,\lambda^2)}.$$

Так как $\tilde{\Gamma}(\lambda) = \varphi(l,\lambda^2)/\varphi'_m(l,\lambda^2)$ также является невырожденной S-функцией (см. [9]), то, согласно последнему следствию, оператор $\tilde{L}$ унитарно эквивалентен оператору L_S вида (3)–(6) с некоторым распределением масс $\tilde{m}(\cdot)$.

Автор выражает искреннюю благодарность М. М. Маламуду за руководство работой и полезные советы.

Литература

1. А. А. Адамян, Д. З. Аров, *Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов.* — Мат. исследования, Кишинев **2** (1966), 3–64.
2. Д. З. Аров, *Реализация канонической системы с диссипативным краевым условием на одном конце сегмента по коэффициенту динамической податливости.* — Сиб. мат. журн. **16**, No. 3 (1975), 440–463.
3. D. Z. Arov, A. A. Nudelman, *Passive linear stationary dynamical scattering systems with continuous time.* — Integr. Equat. Oper. Theory **24**, No. 1 (1996), 1–45.
4. М. С. Бродский, *Треугольные и жордановы представления линейных операторов.* — Наука, М. (1969).
5. В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.* — Наукова думка, Киев (1984).
6. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения.* — Наука, М. (1967).
7. В. А. Деркач, М. М. Маламуд, *Характеристические функции почти разрешимых расширений эрмитовых операторов.* — Укр. мат. журн. **44** (1992), 435–459.
8. В. А. Деркач, М. М. Маламуд, *Расширение теории эрмитовых операторов и проблема моментов.* — Анализ 3, Итоги науки и техники. Серия Соврем. мат. и ее прил. **5**, ВИНИТИ, М. (1993).
9. И. С. Кац, М. Г. Крейн, *О спектральных функциях струны.* Дополнение II к книге Ф. Аткинсона "Дискретные и непрерывные задачи". — Мир, М. (1968).

10. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *О некоторых спектральных свойствах неоднородной струны с диссипативным граничным условием.* — J. Operator Theory **22** (1989), 369–395.
11. М. М. Маламуд, С. М. Маламуд, *Спектральная теория операторных мер в гильбертовом пространстве. Алгебра и анализ* **15** (2003), 1–77.
12. М. А. Нудельман, *Струна Крейна и характеристические функции максимальных диссипативных операторов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **290** (2002), 138–167.
13. Ю. Л. Шмульян, *Инвариантные подпространства полугрупп и схема Лакса–Филлипса.* — Одесский институт инженеров морского флота, Одесса (1986). Деп. в ВИНИТИ 12.11.86, 8009-В86.
14. H. Dym, H. P. McCean, *Gaussian Processes, Function Theory and the Inverse Spectral Problem.* — Acad. Press, New York (1976).
15. S. V. Hruščev, *The Regge problem for strings, unconditionally convergent eigenfunction expansions, and unconditional bases of exponentials in* $L^2(-T,T)$. — J. Operator Theory **14** (1985), 67–85.
16. M. Lesch, M. Malamud, *On the deficiency indices and self-adjontness of symmetric Hamiltonian systems* $L^2(\mathbb{R})$. — J. Diff. Eqs **189** (2003), 556–615.

Kostenko A. S. The Krein string and characteristic functions of non-self-adjoint operators.

The operator generated by the Krein string is investigated in the framework of the extension theory of symmetric operators. A simple proof of the complete non-self-adjointness of the operator is proposed. The scattering function of the string is obtained with the help of the Derkach–Malamud formula for characteristic functions of almost solvable extensions.

Донецкий национальный университет
Украина
E-mail: duzer80@mail.ru

Поступило 7 сентября 2005 г.