Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 327, 2005 г.

С. В. Кисляков, Д. В. Максимов

ИЗОМОРФНЫЙ ТИП ПРОСТРАНСТВА ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДЕННОГО КОНЕЧНЫМ СЕМЕЙСТВОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§1. Введение

Пространство $C^{(\ell)}(\mathbb{T})$ ℓ раз непрерывно дифференцируемых функций на окружности $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ изоморфно пространству $C(\mathbb{T})$: достаточно заметить, что оператор $f\mapsto(\frac{d}{d\theta})^\ell f(e^{i\theta})$ отображает первое пространство на второе, а ядро его состоит только из констант (непостоянных периодических полиномов не бывает). Однако при $k>1$ и $\ell\geqslant 1$ пространство $C^{(\ell)}(\mathbb{T}^k)$ очень не похоже по своим линейно-топологическим свойствам на любое пространство $C(K)$. Этот сюжет имеет некую историю.

Первое опубликованное доказательство неизоморфности пространств $C^{(\ell)}(\mathbb{T}^k)$ и $C(K)$ принадлежит Г. М. Хенкину [1]. Насколько можно судить по анонсу в [2], результат, вероятно, был известен еще А. Гротендику около 1955 г. (упомянем о курьезе: в более ранней работе [3] Гротендик поместил противоположное утверждение с ошибочным доказательством). Результаты Хенкина были передоказаны и усилены в статье [4], использовавшей (вместо усреднений у Хенкина) аппарат теории абсолютно суммирующих операторов и вложений пространств Соболева. В той или иной форме сходный аппарат присутствует и в последующих публикациях [5–9]. Для наших целей интересны статьи [7–9], в которых рассматривались анизотропные аналоги пространств $C^{(\ell)}$. В определении анизотропных пространств требуется непрерывность не всех производных до порядка ℓ включительно, а лишь (обобщенных) производных с индексами из (более или менее) произвольного конечного множества $A\subset(\mathbb{Z}_+)^n$. Опуская некоторые технические детали (см. [9]), можно сказать, что будет или нет такое пространство изоморфно пространству

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 05-01-0924.

$C(\mathbb{T})$ (или $C(\mathbb{T}^n)$ – см. ниже) зависит от того, есть ли в множестве A наибольший элемент относительно покоординатного порядка, т.е. есть ли среди производных, участвующих в определении пространства, доминирующая. Напомним, что все пространства $C(K)$ на несчетных метрических компактах K изоморфны между собой согласно классической теореме Милютина, так что пространства $C(\mathbb{T})$ и $C(\mathbb{T}^n)$ в приведенном выше утверждении равноправны.

Понятие анизотропного пространства гладких функций не очень естественно: не вполне ясно, почему надо настаивать именно на непрерывности некоторого набора производных данной функции вместо дифференциальных выражений общей природы. Дадим точное определение. Пусть $A = \{A_i\}_{i=1}^N$ – набор линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами на торе $\mathbb{T}^n$ (тождественный оператор может как входить, так и не входить в такой набор). Для $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ положим

$$\|f\|_{(A)} = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \|A_i f\|_{C(\mathbb{T}^n)}$$

и обозначим через $C^A(\mathbb{T}^n)$ *банахово* пространство, соответствующее этой норме (имеется в виду то, что получится после пополнения и факторизации по ядру). Нас интересует, когда такое пространство изоморфно пространству $C(\mathbb{T})$ или дополняемому подпространству в нем.

Выскажем общую гипотезу: в качественном плане дело должно обстоять примерно так же, как и в случае анизотропных пространств, т.е. если в множестве A есть дифференциальный оператор, которому в каком-то смысле подчинены остальные, то пространство $C^A(\mathbb{T}^n)$ должно быть изоморфно пространству $C(\mathbb{T})$, а если нет, – не должно вкладываться в $C(\mathbb{T})$ дополняемо.

В настоящей статье мы частично подтвердим эту гипотезу в случае, когда все операторы из A – однородные и одного порядка. Тогда “подчинение” превращается в обычную линейную зависимость: будет показано, что пространство $C^{(A)}(\mathbb{T}^n)$ не вкладывается дополняемо в $C(\mathbb{T})$, если набор A содержит хотя бы два линейно независимых оператора. Удается также доказать изоморфизм $C^{(A)}(\mathbb{T}^2) \sim C(\mathbb{T}^2)$, если все операторы из A кратны одному (для торов высших размерностей здесь возникают трудности).

Как и в [4–9], в настоящей работе используется аппарат теорем вложения и абсолютно суммирующих операторов, однако схема рассуждений отличается от схемы упомянутых статей довольно сильно. Она, однако, восходит к предварительной неопубликованной версии статьи [4], так что теорема вложения, изложенная в §2 (вариант для плоскости), была известна первому автору еще до 1975 г. Кажется, она была новой тогда и, по-видимому, не была переоткрыта с тех пор.

Отметим еще, что в [4–9] доказывалось, что рассматриваемые там *нетривиальные* пространства гладких функций с sup-нормой не изоморфны никакой банаховой решетке, никакому факторпространству пространства $C(\mathbb{T})$ и т.п. Процедура настоящей статьи к таким выводам не приводит, зато хорошо работает в более сложной ситуации пространств $C^{(A)}(\mathbb{T}^n)$.

Пространства, построенные по конечному набору дифференциальных операторов, рассматривались в [10], однако там речь практически не шла об изоморфной классификации.

§2. Теорема вложения

2.1. Подготовительные замечания. Пусть, как и ранее, A – конечный набор линейных дифференциальных операторов на торе $\mathbb{T}^n$ с постоянными коэффициентами. Рассмотрим линейную оболочку $\mathcal{L}$ множества A. Любой оператор T из $\mathcal{L}$ примени́м к любому элементу f пространства $C^{(A)}(\mathbb{T}^n)$, причем Tf – это корректно определенная непрерывная функция на $\mathbb{T}^n$. Если $A_1 = \{T_1, \dots, T_k\}$ – какой угодно базис в $\mathcal{L}$, то пространства $C^{(A)}(\mathbb{T}^n)$ и $C^{(A_1)}(\mathbb{T}^n)$ совпадают по составу элементов и имеют эквивалентные нормы. Любой такой базис $T_1, \dots, T_k$ задает изоморфное вложение пространства $C^{(A)}(\mathbb{T}^n)$ в прямую сумму (обозначим ее через X) k экземпляров пространства $C(\mathbb{T}^{(n)})$:

$$f \mapsto (T_1 f, \dots, T_k f). \tag{1}$$

Пусть Y – образ пространства $C^{(A)}(\mathbb{T}^n)$ при этом вложении. Нас будет интересовать аннулятор пространства Y в X^*. Он состоит из таких наборов $\mu_1, \dots, \mu_k$ борелевских мер на $\mathbb{T}^n$, что

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{\mathbb{T}^n} T_j f d\mu_j = 0$$

для любой функции $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ (эквивалентным образом, для любого тригонометрического полинома f на $\mathbb{T}^n$). Последнее условие равносильно тому, что меры $\mu_1, \dots, \mu_k$ как обобщенные функции удовлетворяют уравнению

$$T_1^*\mu_1 + \dots + T_k^*\mu_k = 0 \tag{2}$$

(T_j^* – дифференциальные операторы, формально сопряженные с T_j).

Частный случай уравнения (2), когда размерность n есть 2, а набор $\{T_j\}$ состоит из *всех* однородных дифференциальных мономов $\partial_1^j\partial_2^j$, $j = 0, \dots, \ell$, на торе $\mathbb{T}^2$, особенно интересен для нас (причины станут ясны позже; по определению, $\partial_j f = \frac{\partial}{\partial\theta_j}(f(e^{i\theta}, \dots, e^{i\theta_n})$ на торе $\mathbb{T}^n$). Оператор, формально сопряженный с $\partial_1^{\ell-j}\partial_2^j$, отличается от последнего лишь знаком $(-1)^\ell$, поэтому уравнение (2) для такого набора принимает вид

$$\partial_1^\ell\mu_0 + \partial_1^{\ell-1}\partial_2\mu_1 + \dots + \partial_2^\ell\mu_\ell = 0; \tag{3}$$

здесь $\mu_0, \dots, \mu_l$ – меры на торе $\mathbb{T}^2$.

2.2 Уравнение (3) на плоскости. С уравнением (3) связана теорема вложения, играющая большую роль в дальнейшем. Изучим сначала случай плоскости (формально он нам не будет нужен, но там все выглядит естественней). На плоскости под оператором ∂_j мы, разумеется, понимаем обычную частную производную $\frac{\partial f(x_2,x_2)}{\partial x_j}$ $(j = 1, 2)$.

Теорема 1. *Набор мер $\mu_0, \dots, \mu_\ell$ с компактными носителями на плоскости удовлетворяет уравнению (3) тогда и только тогда, когда найдутся (единственные) обобщенные функции $h_1, \dots, h_\ell$ с компактными носителями такие, что*

$$\partial_2 h_1 = \mu_0, \quad -\partial_1 h_{i-1} + \partial_2 h_i = \mu_{i-1} \quad (1 < i \leqslant \ell), \quad -\partial_1 h_\ell = \mu_\ell. \tag{4}$$

Эти обобщенные функции лежат в $L^2(\mathbb{R}^2)$ и

$$\sum_{i=1}^{\ell} \|h_i\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leqslant C_\ell \sum_{i=0}^{\ell} \|\mu_i\|, \tag{5}$$

где под $\|\mu_i\|$ понимается полная вариация меры μ_i.

Замечание. При $\ell = 1$ система (4) принимает вид $\partial_1 h_1 = -\mu_1$, $\partial_2 h_1 = \mu_0$, так что тогда (5) – это соболевская теорема вложения с предельным показателем. При $\ell > 1$ утверждение к ней не сводится.

Доказательство теоремы. Если $h_1, \dots, h_\ell$ – какие угодно обобщенные функции на плоскости, для которых выполнены уравнения (4), то соотношение (3) для $\mu_0, \dots, \mu_\ell$ проверяется простым подсчетом.

При обратном переходе от (3) к (4) мы начнем со случая функций вместо мер. Пусть $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ – бесконечно гладкие финитные функции на плоскости, удовлетворяющие уравнению, аналогичному (3):

$$\partial_1^\ell \varphi_0 + \partial_1^{\ell-1}\partial_2\varphi_1 + \dots + \partial_1\partial_2^{\ell-1}\varphi_{\ell-1} + \partial_2^\ell\varphi_\ell = 0. \qquad (3')$$

Покажем, что *существуют единственные бесконечно дифференцируемые финитные функции* $u_1, \dots, u_\ell$ *такие, что*

$$\partial_2 u_1 = \varphi_0, \quad -\partial_1 u_{i-1} + \partial_2 u_i = \varphi_{i-1} \quad (1 < i \leqslant \ell), \quad -\partial_1 u_\ell = \varphi_\ell. \quad (4')$$

Доказательство.

I. Единственность очевидна: пусть $\varphi_0 = \dots = \varphi_\ell = 0$, тогда у первого уравнения $\partial_2 u_1 = 0$ может быть лишь нулевое *финитное* решение, мы приходим к той же системе, но для $\ell - 1$ функции и т.д. Для доказательства существования проверим сначала следующее простое утверждение.

II. *Если* $\beta, \gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, k *– натуральное число и* $\partial_2\beta = \partial_1^k\gamma$, *то существует такая функция* $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, *что* $\partial_1^k u = \beta$, $\partial_2 u = \gamma$.

Разумеется, через $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ здесь обозначен класс бесконечно-дифференцируемых финитных функций на плоскости. Доказательство – индукция по k. При $k = 1$ получаем уравнение $\partial_2\beta = \partial_1\gamma$, так что существует функция u из $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, для которой $\partial_1 u = \beta$, $\partial_2 u = \gamma$. Производные этой функции равны нулю вне некоторого круга, поэтому вычитанием константы ее можно сделать финитной.

Пусть утверждение доказано для $k - 1$ $(k > 1)$, а функции β и γ таковы, что $\partial_2\beta = \partial_1^k\gamma$. Из предыдущего абзаца следует, что $\partial_1 w = \beta$, $\partial_2 w = \partial_1^{k-1}\gamma$ для некоторой функции $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. По индукционному предположению, найдется такая функция $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, что $\partial_1^{k-1} u = w$, $\partial_2 u = \gamma$. Тогда $\partial_1^k u = \partial_1 w = \beta$, и все доказано.

III. Теперь пусть выполнено равенство $(3')$. Докажем существование функций $u_1, \dots, u_\ell \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющих системе $(4')$, индукцией по ℓ. Если $\ell = 1$, то $(3')$ принимает вид $\partial_1\varphi_0 = \partial_2(-\varphi_1)$, так что существование нужной функции u_1 следует из утверждения II при $k = 1$. Тем самым, у нас есть база индукции.

Проведем индукционный переход от $\ell-1$ к ℓ ($\ell > 1$). Уравнение $(3')$ можно переписать в виде $\partial_1\sigma + \partial_2\tau = 0$, где

$$\sigma = \partial_1^{\ell-1}\varphi_0, \quad \tau = \partial_1^{\ell-1}\varphi_1 + \partial_1^{\ell-2}\partial_2\varphi_2 + \dots + \partial_2^{\ell-1}\varphi_\ell.$$

Мы уже знаем, что найдется функция $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ такая, что

$$\partial_2\alpha = \sigma, \quad \partial_1\alpha = -\tau. \tag{6}$$

Первое из уравнений (6) означает, что $\partial_2\alpha = \partial_1^{\ell-1}\varphi_0$, а тогда утверждение, доказанное в п. II, дает функцию $u_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ такую, что

$$\partial_2 u_1 = \varphi_0, \quad \partial_1^{\ell-1}u_1 = \alpha. \tag{7}$$

Подставляя последнюю формулу для α во второе уравнение в (6) и вспоминая, что такое τ, получим

$$\partial_1^{\ell-1}(\varphi_1 + \partial_1 u_1) + \partial_1^{\ell-2}\partial_2\varphi_2 + \dots + \partial_2^{\ell-1}\varphi_\ell = 0.$$

По индукционному предположению, найдутся такие функции $u_2, \dots, u_\ell \in D(\mathbb{R}^2)$, что

$$\partial_2 u_2 = \varphi_1 + \partial_1 u_1, \quad \partial_1 u_{i-1} + \partial_2 u_i = \varphi_i \quad (2 < i \leqslant \ell), \quad -\partial_1\varphi_\ell = \varphi_\ell.$$

Вместе с первым равенством в (7) это дает все, что нужно. $\square$

Основную оценку сформулируем в виде леммы.

Лемма 1. *Пусть выполнены уравнения* $(4')$, *причем все участвующие функции лежат в* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. *Тогда* $\sum\limits_{i=1}^{n}\|u_1\|_{L^2} \leqslant C_\ell \sum\limits_{i=0}^{n}\|\varphi_i\|_{L^1}$.

Доказательство. Если e – вектор (не обязательно единичной длины) на плоскости с координатами a и b, то производная функции f вдоль вектора e – это по определению $a\partial_1 f + b\partial_2 f$ (обозначение: $\partial_e f$).

Проверим, что *если* e_1 и e_2 – *линейно независимые векторы на плоскости, а* $\alpha, \beta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}|\alpha\beta| \leqslant C(e_1, e_2)\int\limits_{\mathbb{R}^2}|\partial_{e_1}\alpha| \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^2}|\partial_{e_2}\beta|. \tag{8}$$

Действительно, заменой переменных дело сводится к случаю, когда $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, а тогда

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} |\alpha(s,t)\beta(s,t)|ds\,dt \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \max_s |\alpha(s,t)|dt \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} \max_t |\beta(s,t)|dt$$
$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} |\partial_1\alpha(s,t)|ds\Big)dt \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} |\partial_2\beta(s,t)|dt\Big)ds.$$

Возвращаясь к уравнениям $(4')$, возьмем вещественное число p, умножим i-е уравнение на p^i $(i = 0,\dots,\ell)$ и сложим полученные равенства. В результате придем к формуле

$$\partial_{e_p} u^{(p)} = \varphi^{(p)}, \tag{9}$$

где

$$u^{(p)} = u_1 + pu_2 + \dots + p^{\ell-1}u_\ell, \quad \varphi^{(p)} = \varphi_0 + p\varphi_1 + \dots + p^\ell\varphi_\ell,$$
$$e_p = (-p, 1) \tag{10}$$

Теперь зафиксируем 2ℓ попарно различных вещественных чисел $p_1,\dots,p_\ell$; $q_1,\dots,q_\ell$. В силу неравенства (8) получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} |u^{(p_1)}||u^{(q_j)}| \leqslant C \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\varphi^{(p_i)}| \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\varphi^{(q_j)}|$$
$$\leqslant C(p_1,\dots,p_\ell,q_1\dots,q_\ell)\Big(\sum_{k=0}^{\ell} \|\varphi_k\|_{L^1}\Big)^2. \tag{10}$$

Наконец, каждая из функций $u_1,\dots,u_\ell$ есть линейная комбинация функций $u^{(p_i)}$ с коэффициентами, выражающимися через числа p_i (надо решить линейную систему с определителем Вандермонда). Аналогично, каждая из функций $u_1,\dots,u_\ell$ есть линейная комбинация функций $u^{(q_j)}$. Теперь видно, что неравенство (10) ведет к утверждению леммы. $\square$

Теорема 1 выводится из леммы 1 простым предельным переходом. Пусть $\{K_n\}$ – бесконечно-дифференцируемая аппроксимативная единица на плоскости, причем носители функций K_n компактны и стягиваются в точку 0 при $n \to \infty$. При фиксированном n функции $\varphi_0 = K_n * \mu_0,\dots,\varphi_\ell = K_n * \mu_\ell$ удовлетворяют уравнению ($3'$). Найдем бесконечно гладкие финитные решения уравнений ($4'$) с этими правыми частями; в силу леммы 1, эти решения будут ограничены в L^2 равномерно по n, а их носители будут лежать в некотором круге, не зависящем от n. Осталось взять слабые предельные точки в L^2 при $n \to \infty$ – тогда мы придем к финитному решению системы (4), удовлетворяющему неравенству (5).

Чтобы доказать единственность, свернем любое финитное обобщенное решение однородной системы $\partial_2 h_1 = 0$, $-\partial_1 h_1 + \partial_2 h_2 = 0$, $\dots, -\partial_1 h_n = 0$ с ядром K_n, тогда получится обычное решение из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, а такое может быть только нулевым. Так как $\lim_{n\to\infty} K_n * h_j = h_j$ (в смысле обобщенных функций), то $h_j = 0$. $\square$

2.3. Уравнение (3) на двумерном торе. На торе уравнение ($3'$) выполняется, если каждая из функций φ_j зависит лишь от одной переменной (на плоскости ненулевых решений такого рода не было из-за финитности). С другой стороны, система ($4'$) для таких φ_j вполне может оказаться неразрешимой в периодических функциях. Так будет, например, если φ_0 – ненулевая постоянная: неразрешимо первое уравнение. Поэтому теорема 1 переносится на тор с некоторыми отличиями.

Назовем обобщенную функцию Φ на торе $\mathbb{T}^2$ *правильной*, если $\widehat{\Phi}(n_1, n_2) = 0$ всякий раз, когда $n_1 = 0$ или $n_2 = 0$. Тем самым ясен смысл и таких терминов как "правильная мера" или "правильный тригонометрический полином." Если μ – мера на торе $\mathbb{T}^2$, рассмотрим ее маргинальные меры ρ_1 и ρ_2 на $\mathbb{T}$: $\rho_1(e) = \mu(e \times \mathbb{T})$, $\rho_2(e) = \mu(\mathbb{T} \times e)$, и положим $\mu_1 = \rho_1 \times \lambda$, $\mu_2 = \lambda \times \rho_2$, где λ – нормированная мера Лебега на окружности $\mathbb{T}$. Легко понять, что

$$\hat{\mu}_1(n) = \hat{\mu}(n, 0), \quad \hat{\mu}_2(n) = \hat{\mu}(0, n) \quad \text{при} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому мера $\nu = \mu - \mu_1 - \mu_2 + \hat{\mu}(0,0)\,(\lambda \times \lambda)$ правильна и $\|\nu\| \leqslant 4\|\mu\|$. Мера ν называется *правильной частью* меры μ.

Теорема 2. *Меры $\mu_0, \dots, \mu_\ell$ на торе $\mathbb{T}^2$ удовлетворяют уравнению* (3) *тогда и только тогда, когда найдутся такие (единственные) правильные обобщенные функции $h_1, \dots, h_\ell$ на торе, что*

$$\partial_2 h_1 = \nu_0, \quad -\partial_1 h_{i-1} + \partial_2 h_i = \nu_{i-1} (1 < i \leqslant \ell), \quad -\partial_1 h_n = \nu_\ell,$$

где ν_i – это правильная часть меры μ_i. Эти функции h_i лежат в

$L^2(\mathbb{R}^2)$ и

$$\sum_{i=1}^{\ell}\|h_i\|_{L^2(\mathbb{T})}\leqslant C_\ell\sum_{i=0}^{\ell}\|\nu_i\|\leqslant C'_\ell\sum_{i=0}^{\ell}\|\mu_i\|.$$

Доказывается это утверждение на основе той же идеи, что и теорема 1, но есть различия, на которых мы остановимся. Не будем на этот раз обсуждать стандартный предельный переход, а просто решим соответствующую задачу для тригонометрических полиномов (к ней все сводится, например, сверткой с ядром Фейера по каждой переменной).

Теорема 2′. *Пусть $\varphi_0,\dots,\varphi_\ell$ – правильные тригонометрические полиномы от двух переменных. Они удовлетворяют уравнению (3′) тогда и только тогда, когда найдутся (единственные) правильные тригонометрические полиномы $u_1,\dots,u_\ell$ от двух переменных, для которых выполнены равенства (4′). При этом*

$$\sum_{i=1}^{\ell}\Bigl(\iint\limits_{\eta,\theta\in[-\pi,\pi]}|u_i(\eta,\theta)|^2d\eta d\theta\Bigr)^{1/2}\leqslant C_\ell\sum_{i=0}^{\ell}\iint\limits_{\eta,\theta\in[-\pi,\pi]}|\varphi_i(\eta,\theta)|d\eta d\theta.$$

Доказательство. Сначала установим единственность. Пусть тригонометрические полиномы $u_1,\dots,u_\ell$ удовлетворяют уравнениям (4′) с $\varphi_0=\dots=\varphi_\ell=0$. Тогда функция u_1 не зависит от второй переменной ($\partial_2 u_1=0$), и равенство $-\partial_1 u_1+\partial_2 u_2=0$, т.е. $\frac{\partial}{\partial\theta}u_2(\eta,\theta)=\frac{\partial}{\partial\eta}u_1(\eta)$ возможно лишь, если $\partial_1 u_1=0$. Значит, u_1 – постоянная, необходимо равная нулю, поскольку $\hat{u}_1(0,0)=0$. Рассуждая таким же образом, последовательно получим, что $u_j=0$ при всех j.

Разрешимость системы (4′) при условии (3′) доказывается так же, как в теореме 1. Надо только заметить, что для периодических функций система $\partial_1 u=\beta$, $\partial_2 u=\gamma$ с правильными β и γ разрешима тогда и только тогда, когда $\partial_2\beta=\partial_1\gamma$; при этом решение u тоже можно выбрать правильным. Нам потребуется оценка коэффициентов Фурье функций u_j.

Лемма 2. *Справедливо неравенство*

$$|\hat{u}_j(k,n)|\leqslant\frac{C_\ell}{|k|+|n|}\sum_{j=0}^{\ell}|\hat{\varphi}_j(k,n)|\leqslant\frac{C_\ell}{|k|+|n|}\sum_{j=0}^{\ell}\|\varphi_j\|_{L^1([-\pi,\pi]^2)},$$
$$k\neq0,n\neq0,\quad j=1,\dots,n.$$

Доказательство. Пусть $k \neq 0$ и $n \neq 0$. Из первого уравнения в $(4')$ находим $\hat{u}_1(k,n) = \frac{1}{in}\widehat{\varphi}_0(k,n)$, из второго $\hat{u}_2(k,n) = \frac{1}{in}\widehat{\varphi}_1(k,n)+\frac{k}{n}\widehat{\varphi}_0(k,n))$, и т.д. Это дает нужную оценку при $|k| \leqslant |n|$. В противном случае делаем то же самое, но начиная с последнего уравнения в $(4')$. $\square$

Приступим к оценке L^2-норм функций u_j. Определим периодические функции (с периодом 2π по каждой из переменных) $u^{(p)}$ и $\varphi^{(p)}$ на плоскости, а также вектор e_p формулами (10), *считая p натуральным числом*. Как и ранее, функции $u^{(p)}$ и $\varphi^{(p)}$ связаны соотношением

$$\partial_{e_p} u^{(p)} = \varphi^{(p)},$$

однако теперь оно не позволяет восстановить $u^{(p)}$ по $\varphi^{(p)}$ интегрированием. Именно, пусть c_{kn} – коэффициенты Фурье функции $u^{(p)}$. Напишем

$$u^{(p)}(\eta,\theta) = \sum_{(k,n):n\neq kp} c_{kn}e^{ik\eta}e^{in\theta} + \sum_{(k,n):n=kp} c_{kn}e^{ik\eta}e^{in\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha^{(p)} + \beta^{(p)}.$$

Тогда $\partial_{e_p}\beta^{(p)} = 0$ и, следовательно,

$$\partial_{e_p}\alpha^{(p)} = \varphi^{(p)}. \tag{12}$$

Из леммы 2 вытекает, что

$$\begin{aligned}\|\beta^{(p)}\|_{L^2}^2 = 4\pi^2 \sum_{k\neq 0} |c_{k,kp}|^2 &\leqslant C'_\ell \sum_{k\neq 0} \frac{1}{k^2(1+p)^2}\left(\sum_{j=0}^{\ell} \|\varphi_j\|_{L^2}\right)^2 \\ &\leqslant C''_\ell \left(\sum_{j=0}^{\ell} \|\varphi_j\|_{L^1}\right)^2. \end{aligned}\tag{13}$$

Что касается функции $\alpha^{(p)}$, то для каждого натурального m она удовлетворяет соотношению

$$\int_{-m\pi}^{m\pi} \alpha^{(p)}(x+te_p)dt = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{14}$$

которое вместе с (12) позволяет восстановить ее по функции $\varphi^{(p)}$. Для этого достаточно воспользоваться следующим простым утверждением, доказательство которого мы оставляем читателю.

Лемма 3. *Пусть f – непрерывная функция на отрезке $[a,b]$ и пусть $g'=f$ и $\int\limits_a^b g=0$. Тогда $g(x)=\int\limits_a^x f(t)dt-\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b(b-t)f(t)dt$.*

Пусть q – еще одно натуральное число, $q\neq p$. Оценим интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\alpha^{(p)}||\alpha^{(q)}|d\eta\,d\theta$. При достаточно большом $m=m(p,q)$ этот интеграл не превосходит величины $C(p,q)I$, где

$$I=\int\limits_{-m\pi}^{m\pi}\int\limits_{-m\pi}^{m\pi}|\alpha^{(p)}(te_p+se_q)||\alpha^{(q)}(te_p+se_q)|dt\,ds:$$

надо только, чтобы квадрат $[-\pi,\pi]^2$ содержался в множестве $\{te_p+se_q:|t|\leqslant m\pi,\ |s|\leqslant m\pi\}$. Константа $C(p,q)$ возникает из-за преобразования меры при невырожденной линейной замене переменных. Далее, пользуясь равенствами (14) и (12) и леммой 3, можем написать

$$\begin{aligned}I&\leqslant\int\limits_{-m\pi}^{m\pi}\max_{t\in[-m\pi,m\pi]}|\alpha^{(p)}(te_p+se_q)|ds\int\limits_{-m\pi}^{m\pi}\max_{s\in[-m\pi,m\pi]}|\alpha^{(q)}(te_p+se_q)|dt\\&\leqslant C\int\limits_{-m\pi}^{m\pi}\Bigl(\int\limits_{-m\pi}^{m\pi}|\varphi^{(p)}(te_p+se_q|dt\Bigr)ds\cdot\int\limits_{-m\pi}^{m\pi}\Bigl(\int\limits_{-m\pi}^{m\pi}|\varphi^{(q)}(te_p+se_q)|ds\Bigr)dt.\end{aligned}$$

В последних повторных интегралах возвратимся к стандартным декартовым координатам и заметим, что получившаяся область интегрирования покрывается конечным числом $A=A(p,q)$ целочисленных сдвигов фундаментальной области $[-\pi,\pi]^2$. Окончательно, это приводит к оценке

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\alpha^{(p)}(\eta,\theta)||\alpha^{(q)}(\eta,\theta)|\leqslant B(p,q)\Bigl(\sum_{j=0}^{\ell}\|\varphi_j\|_{L^1}\Bigr)^2. \tag{15}$$

Возьмем 2ℓ попарно различных натуральных чисел $p_1,\dots,p_\ell$; $q_1,\dots,q_\ell$ и выразим функции $u_1,\dots,u_\ell$ через $u^{(p_1)},\dots,u^{(p_\ell)}$ и (отдельно) через $u^{(q_1)},\dots,u^{(q_\ell)}$:

$$u_j=\sum_i a_{ji}u^{(p_i)},\quad u_j=\sum_i b_{ji}u^{(q_i)},$$

где коэффициенты зависят только от $p_1, \dots, p_\ell$ (в первой формуле) или только от $q_1, \dots, q_\ell$ (во второй). Напомним, что для этого надо решить линейную систему с определителем Вандермонда. Имеем:

$$\|u_j\|_{L^2}^2 = \langle u_j, u_j \rangle \leqslant \sum_{i,k} |a_{ji} b_{jk}| |\langle u^{(p_i)}, u^{(q_k)} \rangle|. \tag{16}$$

Оценим одно скалярное произведение справа в (16):

$$\langle u^{(p_i)}, u^{(q_k)} \rangle = \langle \alpha^{(p_i)}, \alpha^{(q_k)} \rangle + \langle \alpha^{(p_i)}, \beta^{(q_k)} \rangle + \langle \beta^{(q_k)}, u^{(q_k)} \rangle,$$

откуда в силу (15) и (13) при любом $\varepsilon > 0$ (конкретное значение ε будет зафиксировано чуть позже) найдем

$$\begin{aligned} |\langle u^{(p_i)}, u^{(q_k)} \rangle| \leqslant B(\{p_i\}, \{q_i\}) \Bigl(\sum_{s=0}^{\ell} \|\varphi_s\|_{L^1} \Bigr)^2 + \frac{1}{\varepsilon} (\|\beta^{(q_k)}\|_{L^2}^2 + \|\beta^{(p_i)}\|_{L^2}^2) \\ + \varepsilon (\|\alpha^{(p_i)}\|_{L^2}^2 + \|u^{(q_k)}\|_{L^2}^2) \\ \leqslant B(\{p_i\}, \{q_i\}) \Bigl(\sum_{s=0}^{\ell} \|\varphi_s\|_{L^1} \Bigr)^2 + D_\ell \frac{1}{\varepsilon} \Bigl(\sum_{s=0}^{\ell} \|\varphi_s\|_{L^1} \Bigr)^2 + C\varepsilon \sum_{t=1}^{\ell} \|u_t\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

При последнем переходе мы воспользовались тем, что $\|\alpha^{(p_i)}\|_{L^2} \leqslant \|u^{(p_i)}\|_{L^2}$.

Подставив эту оценку в (16) и просуммировав по j, придем к неравенству

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\ell} \|u_j\|_{L^2}^2 \leqslant B'(\{p_i\}, \{q_i\}, \ell, \varepsilon) \Bigl(\sum_{j=0}^{\ell} \|\varphi_j\|_{L^1} \Bigr)^2 \\ + \varepsilon C(\{p_i\}, \{q_i\}, \ell) \sum_{j=1}^{\ell} \|u_j\|^2. \end{aligned}$$

Осталось выбрать ε так, что $\varepsilon \cdot C(\{p_1\}, \{q_i\}, \ell) = 1/2$. □

§3. Неизоморфность

В этом параграфе мы докажем основной результат статьи.

Теорема 3. *Пусть $A = \{A_1, \dots, A_s\}$ – набор однородных дифференциальных операторов порядка ℓ с постоянными коэффициентами на торе $\mathbb{T}^n$. Если среди операторов A_k есть хотя бы два линейно независимых, то пространство $C^{(A)}(\mathbb{T}^n)$ не вкладывается дополняемо в $C(K)$ ни для какого компакта K.*

3.1. Свед*е*ние к размерности 2. Пусть $n > 2$. Чтобы избежать громоздких формул, покажем, как понизить размерность n на единицу (вместо того, чтобы снизить ее до двух за один шаг).

В п. 2.1 отмечалось, что вместо набора $A_1, \dots, A_s$ можно взять любой базис в линейной оболочке этих операторов. Так как эта линейная оболочка имеет размерность по крайней мере 2, можно считать, что в нашем наборе присутствуют операторы вида

$$V = 1 \cdot \partial_1^{q_1} \partial_2^{q_2} \dots \partial_n^{q_n} + 0 \cdot \partial_1^{p_1} \partial_2^{p_2} \dots \partial_n^{p_n} + \dots,$$
$$W = 0 \cdot \partial_1^{q_1} \partial_2^{q_2} \dots \partial_n^{q_n} + 1 \cdot \partial_1^{p_1} \partial_2^{p_2} \dots \partial_n^{p_n} + \dots,$$

где $q_1 + \dots + q_n = p_1 + \dots + p_n = \ell$, но мультииндексы $(q_1, \dots, q_n)$ и $(p_1, \dots, p_n)$ различны. Изменив нумерацию переменных, можем считать, что $q_1 \neq p_1$.

В пространстве $C^{(A)}(\mathbb{T}^n)$ рассмотрим подпространство E, порожденное характерами тора $\mathbb{T}^n$ вида $z_1^{m_1} \dots z_{n-1}^{m_{n-1}} z_n^{m_n}$, у которых $m_{n-1} = m_n$. Это подпространство дополняемо. Действительно, пусть ν – мера на $\mathbb{T}^n$, соответствующая функционалу

$$f \mapsto \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(1, \dots, 1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}) d\theta, \quad f \in C(\mathbb{T}^n).$$

Тогда

$$\hat{\nu}(m_1, \dots, m_n) = \begin{cases} 0, & m_{n-1} \neq m_n \\ 1, & m_{n-1} = m_n, \end{cases}$$

так что оператор свертки с мерой ν есть проектор, переводящий $C^{(A)}(\mathbb{T}^n)$ на Y (отметим, что оператор свертки с *любой* мерой непрерывен в $C^{(A)}(\mathbb{T}^n)$).

С другой стороны, Y можно интерпретировать как некое пространство функций от $n-1$ переменной $z_1, z_2, \dots, z_{n-2}, \zeta$, где $\zeta = z_{n-1} z_n$, т.е. как некое пространство $\widetilde{Y}$ функций на торе $\mathbb{T}^{n-1}$. Дифференциальный моном $\partial_1^{t_1} \dots \partial_{n-1}^{t_{n-1}} \partial_n^{t_n}$ действует на этом пространстве как $\partial_1^{t_1} \dots (\frac{\partial}{\partial \zeta})^{t_{n-1} + t_n}$, т.е. $\widetilde{Y}$ – это пространство $C^{(B)}(\mathbb{T}^{n-1})$ для некоторого набора B однородных дифференциальных операторов порядка ℓ на $\mathbb{T}^{n-1}$. Операторам V и W в наборе B будут соответствовать два линейно независимых оператора, поскольку $q_1 \neq p_1$.

Далее повторяем процедуру, пока размерность не станет равной 2. В результате получим некий набор A_1 однородных дифференциальных операторов порядка ℓ на $\mathbb{T}^2$ такой, что пространство $C^{(A_1)}(\mathbb{T}^2)$ дополняемо вкладывается в $C^{(A)}(\mathbb{T}^n)$, а среди операторов набора A_1 есть по крайней мере 2 линейно независимых. Ясно, что теорему достаточно доказать для $C^{(A_1)}(\mathbb{T}^2)$.

3.2. Применение теоремы Гротендика. Итак, пусть $n = 2$ в теореме 3. Пусть $A = \{T_1 \dots, T_k\}$, где

$$T_i = \sum_{j=0}^{\ell} a_{ij} \partial_1^{\ell-j} \partial_2^j, \quad i = 1, \dots, k. \tag{17}$$

Как уже отмечалось в начале §2, важна лишь линейная оболочка операторов $\{T_i\}_{i=1}^k$. Поскольку размерность этой линейной оболочки – по крайней мере 2, мы можем считать, что матрица $\{a_{ij}\}$ устроена следующим образом: существуют два индекса j_0 и j_1 такие, что $j_0 < j_1$, $a_{1j} = 0$ при $j < j_0$, $a_{1,j_0} = 1$, $a_{2,j} = 0$ при $j < j_1$, $a_{2,j_1} = 1$ и $a_{2,j} = 0$ при $i > 2$ и $j \leqslant j_1$ (попросту мы делаем два шага в приведении матрицы $\{a_{ij}\}$ к "треугольному виду" с возможной перестановкой строк).

Вложим пространство $C^{(A)}(\mathbb{T}^2)$ в прямую сумму k экземпляров пространства $C(\mathbb{T}^2)$ как в формуле (1) и обозначим через Z аннулятор образа этого вложения в $M(\mathbb{T}^2) \oplus \dots \oplus M(\mathbb{T}^2)$ (k прямых слагаемых; $M(\mathbb{T}^2)$ – пространство мер).

Если бы пространство $C^{(A)}(\mathbb{T}^2)$ вкладывалось дополняемо в $C(K)$ для какого-нибудь компакта K, то пространство Z было бы дополняемо в $M(\mathbb{T}^2) \oplus \dots \oplus M(\mathbb{T}^2)$ (это утверждение – общее место в теории банаховых пространств), а тогда для Z выполнялось бы заключение теоремы Гротендика: всякий линейный непрерывный оператор из Z в гильбертово пространство оказался бы абсолютно суммирующим и, тем более, 2-абсолютно суммирующим. Мы укажем оператор из Z в $L^2(\mathbb{T}^2) \oplus \dots \oplus L^2(\mathbb{T}^2)$ (ℓ прямых слагаемых), который не таков. Это завершит доказательство теоремы 3.

Вспомним, что если $(\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in Z$, то выполнено уравнение (2), которое в силу однородности дифференциальных операторов $T_1, \dots, T_k$ принимает вид

$$T_1\gamma_1 + \dots + T_k\gamma_k = 0,$$

а в силу формулы (17) оно эквивалентно тому, что

$$\partial_1^\ell \mu_0 + \partial_1^{\ell-1}\partial_2\mu_1 + \cdots + \partial_1\partial_2^{\ell-1}\mu_{\ell-1} + \partial_2^\ell \mu_\ell = 0,$$

где

$$\mu_j = \sum_{m=1}^{k} a_{mj}\gamma_{in}, \quad j = 0, \ldots, \ell.$$

Пусть $h_1, \ldots, h_\ell$ – функции из $L^2(\mathbb{T}^2)$, построенные по мерам $\mu_0, \ldots, \mu_\ell$ как в теореме 2. Искомый оператор R действует по правилу $R : (\gamma_1, \ldots, \gamma_k) \mapsto (h_1, \ldots, h_\ell)$. Он непрерывен из Z в $L^2(\mathbb{T}^2) \oplus \cdots \oplus L^2(\mathbb{T}^2)$ по той же теореме 2.

Чтобы доказать, что оператор R не является 2-абсолютно суммирующим, мы построим некую специальную последовательность элементов пространства Z. Будем считать меры $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ правильными, тогда система уравнений, связывающая функции h_j и меры γ_m, выглядит так:

$$\partial_2 h_1 = \sum_{m=1}^{k} a_{m_0}\gamma_m, \quad -\partial_1 h_j + \partial_2 h_{j+1} = \sum_{m=1}^{k} a_{mj}\gamma_m \, (1 \leqslant j < \ell),$$

$$-\partial_1 h_\ell = \sum_{m=1}^{k} a_{m\ell}\gamma_m.$$

В последующих построениях мы будем заниматься лишь такими наборами правильных мер, что $\gamma_3 = \cdots = \gamma_k = 0$. Вспомним о том, что матрицу $\{a_{mj}\}$ мы привели к специальному виду, описанному сразу после формулы (17). Первое уравнение, в котором правая часть может быть не равна нулю, – это либо $\partial_2 h_1 = \gamma_1$ (если $j_0 = 0$), либо $-\partial_1 h_{j_0} + \partial_2 h_{j+1} = \gamma_1$ (если $j_0 > 0$). Во втором случае мы положим $h_1 = \cdots = h_{j_0} = 0$, так что, как бы то ни было, первым нетривиальным уравнением будет

$$\partial_2 h_{j_0+1} = \gamma_1. \tag{18}$$

Следующая группа уравнений будет выглядеть так:

$$-\partial_1 h_j + \partial_2 h_{j+1} = a_{1j}\gamma_1, \quad j_0 < j < j_1, \tag{19}$$

а затем последует уравнение

$$-\partial_1 h_{j_1} + \partial_2 h_{j_1+1} = a_{1j_1}\gamma_1 + \gamma_2 \tag{20}$$

Остальные уравнения будут таковы:

$$-\partial_1 h_j + \partial_2 h_{j+1} = a_{1j}\gamma_1 + a_{2j}\gamma_2, j_1 < j < \ell; \quad -\partial_1 h_\ell = a_{1\ell}\gamma_1 + a_{2\ell}\gamma_2. \tag{21}$$

Пусть теперь s и t – натуральные числа. Положим $\gamma_1 = z_1^s z_2^t d\lambda$, $\gamma_2 = c_{st} z_1^s z_2^t d\lambda$ (λ – нормированная мера Лебега на торе $\mathbb{T}^2$), где коэффициент c_{st} предстоит определить так, чтобы нашлись функции $h_1, \dots, h_\ell$, удовлетворяющие соотношениям (18)–(21). Если это будет проделано, то набор мер

$$\Delta_{st} = \{z_1^s z_2^t d\lambda, \quad c_{st} z_1^s z_2^t d\lambda, \quad 0, \dots, 0\} \tag{22}$$

будет лежать в пространстве Z. Нам будет важно, чтобы достаточно много среди коэффициентов c_{st} были равномерно ограничены; важно также проследить за поведением функций h_j (которые теперь зависят еще и от s и t, но мы не отражаем этого в обозначениях).

В качестве решения последнего уравнения в (21) возьмем функцию

$$h_\ell = -\frac{1}{is}(a_{1\ell} + c_{st} a_{2\ell}) z_1^s z_2^t.$$

Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$-\partial_1 h_{\ell-1} = (a_{1,\ell-1} + c_{st} a_{2,\ell-1}) z_1^s z_2^t + \frac{t}{s}(a_{1\ell} + c_{st} a_{2\ell}) z_1^s z_2^t.$$

Чтобы его разрешить, надо снова поделить правую часть на $(-is)$, и т.д. Продолжим движение “вверх”, пока не придем к уравнению для h_{j_1+1}:

$$-\partial_1 h_{j_1+1} = \left(A\big(\tfrac{t}{s}\big) + c_{st} B\big(\tfrac{t}{s}\big)\right) z_1^s z_2^t, \tag{23}$$

где A и B – полиномы степени не выше ℓ и с коэффициентами, выражающимися через числа a_{kj}.

После этого тем же способом придем к уравнению для h_{j_1}, двигаясь на этот раз от уравнения (18) “вниз”: решением уравнения (18) будет функция

$$h_{j_0+1} = \frac{1}{it} z_1^s z_2^t, \tag{24}$$

откуда и из следующего уравнения (см. (19)) получаем $\partial_2 h_{j_0+2} = a_{1j} z_1^s z_2^t + \frac{s}{t} z_1^s z_2^t$. Функция h_{j_0+2} находится делением правой части на it и т.д. Через несколько шагов придем к уравнению

$$\partial_2 h_{j_1} = D\big(\tfrac{s}{t}\big) z_1^s z_2^t, \tag{25}$$

где снова D – полином степени не выше ℓ, коэффициенты которого выражаются через числа a_{kj}.

Находя h_{j_1+1} и h_{j_1} из (23) и (25) и подставляя выражения для них в (20), придем к уравнению

$$c_{st}\left(1+\tfrac{t}{s}B\big(\tfrac{t}{s}\big)\right) = -a_{1j_1} - \tfrac{s}{t}D\big(\tfrac{s}{t}\big) - \tfrac{t}{s}A\big(\tfrac{t}{s}\big) \tag{26}$$

для коэффициента c_{st}. Наложим на индексы s и t ограничение $\delta/2 \leqslant \frac{t}{s} \leqslant \delta$, где число δ выбрано так, чтобы величина $\left|\frac{t}{s}B\big(\frac{t}{s}\big)\right|$ всегда была меньше $1/2$. Число δ можно считать зависящим лишь от коэффициентов $\{a_{ij}\}$. Тогда значение коэффициента c_{st}, найденное из уравнения (26), будет ограничено сверху равномерно по s и t, $\delta/2 \leqslant \frac{t}{s} \leqslant \delta$.

Теперь заметим, что двойная последовательность (22) при условии $\delta/2 \leqslant t/s \leqslant \delta$ является слабо 2-суммируемой в Z: для любого набора $X = (x_0, x_1, \dots, x_\ell)$ функций из $L^\infty(\mathbb{T}^2)$, очевидно, имеем

$$\Big(\sum_{s,t} |\langle \Delta_{st}, X\rangle|^2\Big)^{1/2} \leqslant C \max_{0\leqslant j\leqslant \ell} \|x_j\|_{L^\infty}.$$

Это вытекает из ортогональности системы $\{z^s z^t\}$ в $L^2(\lambda)$ и ограниченности коэффициентов c_{st}. Если бы оператор R был 2-суммирующим, получилось бы

$$\sum_{s,t:\frac{\delta}{2}\leqslant\frac{t}{s}\leqslant\delta} \|R\Delta_{st}\|^2 < \infty.$$

С другой стороны, левая часть этого равенства в силу (24) больше или равна сумме

$$\sum_{s,t:\frac{\delta}{2}\leqslant\frac{t}{s}\leqslant\delta} t^{-2} = \sum_{t\in\mathbb{N}} \sum_{\frac{t}{\delta}\leqslant s\leqslant\frac{2t}{\delta}} t^{-2} \geqslant C\delta^{-1}\sum_{t\in\mathbb{N}} t^{-1} = \infty.$$

Это противоречие доказывает теорему 3. □

§4. Набор из одного оператора

4.1. Предположим теперь, что все дифференциальные операторы набора A кратны одному оператору T,

$$T = \sum_{\substack{k_1<\cdots<k_n \\ k_1+\cdots+k_n=\ell}} a_{k_1,\ldots,k_n}\partial_1^{k_1}\ldots\partial_n^{k_n}.$$

Свяжем с оператором T характеристический полином

$$P(\xi) = P(\xi_1,\ldots,\xi_n) = \Sigma a_{k_1,\ldots,k_n}(i\xi_1)^{k_1}\ldots(i\xi_n)^{k_n}.$$

Нам удалось получить лишь следующий простой, но не вполне удовлетворительный результат.

Теорема 4. *При сделанных предположениях, пространство $C^{(A)}(\mathbb{T}^n)$ изоморфно пространству $C(\mathbb{T}^n)$ при любом из следующих условий: а) $n = 2$; б) полином P не обращается в нуль в точках целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$.*

Доказательство. Пусть $E = \{\xi \in \mathbb{Z}^n : P(\xi) \neq 0\}$. Обозначим через U замкнутую линейную оболочку множества мономов $z_1^{\xi_1}\ldots z_n^{\xi_n}$, $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in E$, в пространстве $C(\mathbb{T}^n)$. Ясно, что пространства U и $C^{(A)}(\mathbb{T}^n)$ изоморфны (на коэффициентах Фурье изоморфизм задается формулой $\{c_\xi\}_{\xi\in E} \leftrightarrow \{P(\xi)c_\xi\}_{\xi\in E}$). При условии б) имеем $U = C(\mathbb{T}^n)$, так что доказывать больше нечего. Если выполнено условие а) (размерность равна 2), то все целочисленные решения уравнения $P(\xi) = 0$ – это целочисленные точки на не более, чем конечном объединении прямых с рациональным углом наклона, проходящих через 0. Тогда легко видеть, что пространство U дополняемо в $C(\mathbb{T}^2)$ (проектор выражается через свертки с подходящими мерами на $\mathbb{T}^2$, наподобие того, что делалось в соответствующем месте §3).

Собственно, на этом можно было бы и остановиться, однако нетрудно понять, что в таком случае $U \sim C(\mathbb{T})$ (или, что то же самое, в силу теоремы Милютина, $U \sim C(\mathbb{T}^2)$). Именно, в U легко найти дополняемое подпространство, изоморфное $C(\mathbb{T})$, – достаточно рассмотреть рациональную прямую, отличную от всех упомянутых. А тогда нужный изоморфизм получается из декомпозиционного метода Пелчинского, см., например, [11]. Мы опускаем детали. $\square$

4.2. Другие модели. Из доказательства теоремы 4 видно, что, начиная с размерности 3, очень вероятно существование пространств вида $C^{\{T\}}(\mathbb{T}^n)$, построенных по одному дифференциальному оператору и не вкладывающихся дополняемо в $C(K)$ ни для какого K, – однако это связано скорее со свойствами самого пространства $C(\mathbb{T}^n)$ и его трансляционно-инвариантных подпространств, чем с гладкостью. Такой эффект (если он обнаружится) будет, скорее, случайным обстоятельством: для других "моделей" пространства $C^{(A)}$ этого не происходит.

Чтобы объяснить, что понимается под моделью, отметим, что обычные пространства ℓ раз непрерывно дифференцируемых функций – такие как $C^{(\ell)}(\mathbb{T}^n)$, $C^{(\ell)}(\overline{G})$ (G – область в $\mathbb{R}^n$ с не слишком экзотичной границей) или $C_0^{(\ell)}(\mathbb{R}^n)$ (функции, стремящиеся к нулю на бесконечности вместе со всеми производными до порядка ℓ включительно) изоморфны друг другу при фиксированных n и ℓ. Таким образом, их все можно считать моделями одного и того же пространства.

В общем случае неясно, изоморфны ли, например, пространства $C^{(A)}(\mathbb{T}^n)$ и $C_0^{(A)}(\mathbb{R}^n)$ (второе определяется очевидным образом), однако их тоже можно рассматривать как разные модели одной и той же ситуации. Аналог теоремы 4 для пространства $C_0^A(\mathbb{R}^n)$ свободен от случайных обстоятельств.

Предложение 1. *Если набор A состоит из одного ненулевого дифференциального оператора T (не обязательно однородного), то $C_0^{(A)}(\mathbb{R}^n) \sim C_0(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Первое пространство изометрически вкладывается во второе с помощью отображения $f \mapsto Tf$. Если μ – конечная мера на $\mathbb{R}^n$, ортогональная всем функциям Tf, то $P(\xi)\widehat{\mu}(\xi) = 0$ для характеристического полинома P оператора T. Так как функция $\widehat{\mu}$ непрерывна, а множество $\{\xi \in \mathbb{R}^n : P(\xi) = 0\}$ нигде не плотно в $\mathbb{R}^n$, то $\mu = 0$. $\square$

Заметим, однако, что за удобства придется платить: при попытке перенести теорему 3 на пространства $C_0^{(A)}(\mathbb{R}^n)$ возникают некоторые неприятности, которыми мы пока решили не заниматься.

Литература

1. Г. М. Хенкин, *Отсутствие равномерного гомеоморфизма между пространствами гладких функций от одного и от n переменных* ($n \geqslant 2$). — Матем. сб. **74**, No. 4 (1967), 595–606.
2. A. Grothendieck, *Erratum an mémoire: produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* — Ann. Inst. Fourier (Grenoble) No. 6 (1955–1956), 117–120.
3. A. Grothendieck, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espace du type* $C(K)$. — Canad, J. Math. **5** (1953), 129–173.
4. С. В. Кисляков, *Соболевские операторы вложения и неизоморфность некоторых банаховых пространств.* — Функц. анализ и его прилож. **9**, No. 4 (1975), 22–27.
5. С. В. Кисляков, *В пространстве непрерывно-дифференцируемых функций на торе нет локально-безусловной структуры.* — Препринт ЛОМИ P-1-77 (1977), 18 с.
6. S. Kwapień and A. Pełczyński, *Absolutely summing operators and translation-invariant spaces of functions on compact abelian groups.* — Math. Nachr. **94** (1980), 303–340.
7. A. Pełcziński and K. Senator, *On isomorphisms of anisotropic Sobolev spaces with "classical Banach spaces" and Sobolev-type embedding theorem.* — Studia Math. **84** (1986), 169–215.
8. Н. Г. Сидоренко, *Неизоморфность некоторых банаховых пространств гладких функций пространству непрерывных функций.* — Функц. анализ из его прилож. **21**, No. 4 (1987), 91–93.
9. С. В. Кисляков и Н. Г. Сидоренко, *Отсутствие локальной безусловной структуры в анизотропных пространствах гладких функций.* — Сибирск. мат. журн. **29**, No. 3 (1988), 64–77.
10. A. Pełczyński, *Boundedness of the canonical projection for Sobolev spaces generated by finite families of linear differential operators.* — In: Analysis in Urbana, Vol. I (Urbana, IL, 1986–1987); 395–415. London Math. Soc. Lecture notes series, 137, Cambridge University Press, 1989.
11. А. Пелчинский, *Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения.* Мир, М. (1970).

Kislyakov S. V., Maksimov D. V. Isomorphic type of the space of smooth functions determined by a finite family of differential operators.

On the torus $\mathbb{T}^n$ with $n \geqslant 2$, the space mentioned in the title is not isomorphic to a complemented subspace of $C(K)$ if the finite family in question consists of homogeneous differential operators of one and the same order with constant coefficients and at least two among them are linearly independent.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
E-mail: skis@pdmi.ras.ru

Поступило 1 ноября 2005 г.