Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 327, 2005 г.

М. Гирнык

ТОЧНОСТЬ ПРИБЛИЖЕНИЯ СУБГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ЛОГАРИФМОМ МОДУЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ В ЧЕБЫШЕВСКОЙ МЕТРИКЕ

1. Введение

Результаты о приближении в различных метриках субгармонической в области Ω функции логарифмом модуля аналитической функции имеют многочисленные приложения (см., например, [1–6]), так как построить субгармоническую функцию с требуемыми асимптотическими свойствами зачастую значительно проще, чем аналитическую. Главным образом в связи с этим возникает задача приближения элементов более широкого множества субгармонических функций элементами из меньшего множества аналитических функций. Такая аппроксимация исследовалась рядом авторов. Случай, когда мера Рисса сосредоточена на кривых, рассмотрен в [7–9]. Впервые в общем виде в классе субгармонических в плоскости функций конечного порядка указанное приближение нашел В. Азарин [10]. Это приближение для произвольных субгармонических функций в произвольных областях рассмотрено в статье Р. Юлмухаметова [11], где, в частности, найдена предельно точная аппроксимация для случая плоскости $\mathbb{C}$. Исследования Р. Юлмухаметова продолжены и развиты в разных направлениях рядом авторов (см. обзор в [6], а также недавние работы [12–15]).

Мы используем основные факты и стандартные обозначения теории потенциала [16], напомним некоторые из них. Обозначаем $D(a,r) := \{z : |z-a| < r\}$, $C(a,r) := \{z : |z-a| \leqslant r\}$, $S(a,r) := \{z : |z-a| = r\}$, $A(t,T) := \{z : t \leqslant |z| \leqslant T\}$. Символ m_2 обозначает плоскую меру Лебега, буквами C с индексами мы обозначаем положительные постоянные, в скобках указываем зависимость от параметров. Обозначим через FM множество подмножеств луча $[1,\infty)$, имеющих конечную меру, и подмножеств L промежутка $[0, 1)$, для которых $\int_L (1-x)^{-2}\,dx < \infty$. Пусть $u(z)$ субгармоническая в плоскости $\mathbb{C}$ или в круге $\mathbb{D} := D(0,1)$ функция, тогда μ_u – ее мера Рисса, $B(r,u) := \max\{u(z) : z \in C(0,r)\}$ – максимум, $n(a,r,u) := \mu(C(a,r))$, $n(r) := n(0,r,u)$ – считающие функции меры Рисса. Множество точек, (β,s)-нормальных относительно меры μ в области Ω, $\operatorname{supp}\mu \subset \overline{\Omega}$, задается условием $N(\beta,s,\mu) := \{z \in \Omega : \forall t \in (0,s)(\mu(D(z,t)) \leqslant \beta t)\}$, $N(\beta,s,\mu_1,\dots,\mu_n) = \cap_{j=1}^{j=n} N(\beta,s,\mu_j)$

Запись $a \asymp b$ означает, что $|a| \leqslant \mathrm{Const}\,|b|$ и $|b| \leqslant \mathrm{Const}\,|a|$.

Содержание нашей работы тесно связано с двумя результатами Юлмухаметова, процитируем их (в несколько измененной, но эквивалентной формулировке) [11, с. 278–282].

Теорема A. *Пусть $u(z)$ – субгармоническая функция конечного порядка ρ и пусть $\alpha > \rho$. Тогда существуют целая функция $f(z)$, постоянная $C_1 = a_0 + a_1\alpha$, $a_1 > 1$, зависящая только от α, а также исключительное множество E, зависящее от функций $u(z)$, $f(z)$ и числа α, такие, что*

$$|u(z) - \log|f(z)|| \leqslant C_1(\alpha)\log|z|, \quad z \notin E, \tag{1.1}$$

причем $E \subset \cup_j D(z_j, r_j)$ и

$$\sum_{R \leqslant |z_j| < 2R} r_j = o(R^{\rho-\alpha}), \quad R \to \infty. \tag{1.2}$$

Теорема B. *Пусть целая функция $f(z)$ удовлетворяет соотношению*

$$||z| - \log|f(z)|| = o(\log|z|), \quad E \not\ni z \to \infty. \tag{1.3}$$

Тогда для любого покрытия множества E кругами $\{D(z_j,r_j)\}$ с равномерно ограниченными радиусами и любого числа $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{R \leqslant |z_j| < 2R} r_j \geqslant R^{1-\varepsilon}, \quad R > R(\varepsilon). \tag{1.4}$$

Цель данной работы – усилить и уточнить теорему B, а также доказать аналогичные теоремы для случаев субгармонических функций бесконечного порядка и субгармонических функций в единичном круге. Сформулируем наши результаты.

Теорема 1. *Пусть число $\rho > 0$ и целая функция f удовлетворяет неравенству*

$$||z|^\rho - \log|f(z)|| \leqslant C_2 \log|z|, \quad z \notin E, \tag{1.5}$$

где множество E содержится в объединении кругов $\{D(z_j, r_j)\}$, причем $r_j \leqslant |z_j|^{1-\rho/2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Тогда имеет место оценка

$$\sum_{R \leqslant |z_j| < 2R} r_j \geqslant R^{1+\rho/2-2C_2-3\varepsilon}, \quad R > R(\varepsilon). \tag{1.6}$$

Теорема 2. *Пусть субгармоническая функция $u(z)$ имеет бесконечный порядок, а число ε положительно. Тогда существуют целая функция $f(z)$, постоянная $C_2(\varepsilon)$ и множество E такие, что для всех $z \notin E$ выполнено неравенство*

$$|u(z) - \log|f(z)|| \leqslant C_3(\varepsilon)\left(\log|z| + \log B(|z|, u)\right). \tag{1.7}$$

Исключительное множество E, зависящее от функций $u(z)$, $f(z)$ и числа ε, содержится в объединении кругов $D(z_j, r_j)$, $j \in \mathbb{N}$, причем

$$\sum_{R \leqslant |z_j| < R + (\log B(R,u))^{-1}} r_j = o(B(R,u)^{-\varepsilon}),$$

$$R \to \infty, \quad R \notin L \in FM. \tag{1.8}$$

Теорема 3. *Пусть $v(R) \in C^2[0, \infty)$ – выпуклая функция от $\log R$, $v(R) \to \infty$ при $R \to \infty$ и выполнены условия*

$$\min\{\log v^{(k)}(x) : x \in [R - 2/\log v(R), R + 2/\log v(R)]\} \sim$$

$$\sim \max\{\log v^{(k)}(x) : x \in [R - 2/\log v(R), R + 2/\log v(R)]\} \sim$$

$$\sim \log v^{(k)}(R), \ R \to \infty, \ k = 0, 1, 2. \tag{1.9}$$

Пусть целая функция $f(z)$ удовлетворяет неравенству

$$|v(|z|) - \log|f(z)|| < C_4 \log v(|z|), \ z \notin E, \tag{1.10}$$

где множество E содержится в объединении кругов $D(z_j, r_j)$, $j \in \mathbb{N}$, таких, что $r_j < v(|z_j|)^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\sum_{R \leqslant |z_j| < R + (\log B(R,u))^{-1}} r_j \geqslant v(R)^{1/2-2C_4-2\varepsilon}, \quad R > R(\varepsilon). \tag{1.11}$$

Теорема 4. *Пусть число $\rho > 0$ и аналитическая в круге функция $f(z)$ удовлетворяет неравенству*

$$||1-z|^{-\rho} - \log|f(z)|| \leqslant C_5 \log\frac{1}{|1-z|}, \quad z \notin E, \tag{1.12}$$

где множество E содержится в объединении кругов $\{D(z_j, r_j)\}$, причем $r_j \leqslant |1-z_j|^{1+\rho/2}$. Тогда имеет место оценка

$$\sum_{R\leqslant|z_j|<R+(1-R)/2} r_j \geqslant (1-R)^{-\rho/2+2C_5+3\varepsilon}, \quad R(\varepsilon) < R < 1. \tag{1.13}$$

Теорема 5. *Пусть субгармоническая в $\mathbb{D}$ функция $u(z)$ имеет бесконечный порядок и число ε положительно. Тогда существуют аналитическая в $\mathbb{D}$ функция f, постоянная $C_6(\varepsilon)$ и множество E такие, что для всех $z \notin E$ выполнено неравенство*

$$|u(z) - \log|f(z)|| \leqslant C_6(\varepsilon)\log B(|z|, u). \tag{1.14}$$

Исключительное множество E, зависящее от функций $u(z)$, $f(z)$ и числа ε, содержится в объединении кругов $D(z_j, r_j)$, $j \in \mathbb{N}$, причем

$$\sum_{R\leqslant|z_j|<R+(1-R)^2(\log B(R,u))^{-1}} r_j = o(B(R,u)^{-\varepsilon}),$$
$$R \to 1, \quad R \notin L \in FM. \tag{1.15}$$

Теорема 6. *Пусть $v(R) \in C^2[0,1)$ – выпуклая функция от $\log R$, $v(R) \to \infty$ при $R \to 1$ и выполнены условия*

$$\min\{\log v^{(k)}(x) : x \in [R-2(1-R)^2/\log v(R), R+2(1-R)^2/\log v(R)]\} \sim$$
$$\sim \max\{\log v^{(k)}(x) : x \in [R-2(1-R)^2/\log v(R), R+2(1-R)^2/\log v(R)]\}$$
$$\sim \log v^{(k)}(R), \quad R \to 1, \quad k = 0, 1, 2. \tag{1.16}$$

Пусть аналитическая в $\mathbb{D}$ функция $f(z)$ удовлетворяет неравенству

$$|v(|z|) - \log|f(z)|| < C_7 \log v(|z|), \quad z \notin E, \tag{1.17}$$

и множество E содержится в объединении кругов $D(z_j, r_j)$, $j \in \mathbb{N}$, таких, что $r_j < v(|z_j|)^{-1/2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\sum_{R\leqslant|z_j|<R+(1-R)^2(\log B(R,u))^{-1}} r_j \geqslant v(R)^{1/2-2C_7-2\varepsilon},$$
$$R(\varepsilon) < R < 1. \tag{1.18}$$

Прокомментируем эти формулировки. Теорема 1 усиливает теорему B, анонсированную Юлмухаметовым. Ограничение сверху на радиусы кругов покрытия исключительного множества в этой и других подобных теоремах необходимо: круги $\{D((-1)^n 2^{n-1}, 2^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ покрывают всю плоскость, а

$$\sum_{|z_j|<R} r_j \leqslant 2R.$$

Величина ограничения сверху для радиусов кругов покрытия исключительного множества в теоремах 1, 3, 4, 6 больше или равна, чем радиусы кругов соответсвенно в теореме A и подобных ей, поэтому представляется естественной. Если рассмотреть покрытие плоскости кругами вида $D(z, |z|^{1-\rho/2})$, кратность которого не больше 3, то для такого покрытия

$$\sum_{R\leqslant|z_j|<2R} r_j \asymp R^{1+\rho/2},$$

т.е. множество E все же может являться (и является, как следует из результата Ю. Любарского и Е. Малинниковой) исключительным. Легко видеть, что функции, удовлетворяющие условиям теорем 3 и 6, существуют, например, $v(R) := \exp_k R, v(R) := \exp_k(1/(1-R))$, где $\exp_k$ – это k-ая итерация экспоненты. Теорема 2 усиливает результат работы [17]. Теоремы 4–6 дополняют теоремы статьи [18].

Случаи плоскости, круга, функций конечного и бесконечного порядков имеют свою специфику, поэтому нам не удалось представить теоремы 1, 3, 4, 6 как следствия одной теоремы, хотя их доказательства основаны на общей идее.

Благодарю Р. Юлмухаметова, сообщившего мне идею неопубликованного доказательства теоремы B. Выражаю признательность В. Эйдерману, предложившему применить максимум вместо функции роста по Блюменталю, что позволило усилить результат статьи [17]. Участники Львовского семинара по комплексному анализу, в особенности О. Скаскив и И. Чижиков, внимательно обсудили доказательства результатов и сделали полезные замечания, и мой приятный долг благодарно отметить их труд.

2. Доказательства результатов

Для удобства читателей процитируем несколько теорем, используемых в дальнейшем.

Теорема C [11, с. 275]. *Пусть $u(z)$ – функция, субгармоническая в неограниченной области Ω. Тогда существует аналитическая в Ω функция $f(z)$, которая для всех (β, s)-нормальных точек относительно мер Рисса μ_u и $\mu_{\log|f|}$ удовлетворяет неравенству*

$$|u(z) - \log|f(z)|| \leqslant \tag{2.1}$$
$$\left| \int\limits_{D(0,2)} \log|z-\xi|\, d\mu_u(\xi) \right| + C_8|\log s| + C_9 \log|z| + \beta s(|\log s| + 1) + C_{10}.$$

Постоянные C_8, C_9, C_{10} не зависят от области Ω и от функций $u(z)$, $f(z)$.

Теорема D [11, с. 275]. *Пусть $u(z)$ – функция, субгармоническая в ограниченной области Ω. Тогда существует аналитическая в Ω функция $f(z)$, которая для всех (β, s)-нормальных точек относительно мер Рисса μ_u и $\mu_{\log|f|}$ удовлетворяет неравенству*

$$|u(z) - \log|f(z)|| \leqslant$$
$$\leqslant C_{11}|\log s| + C_{12}|\log \operatorname{diam}\Omega| + \beta s(|\log s| + 1) + C_{13}. \tag{2.2}$$

Постоянные C_{11}, C_{12}, C_{13} не зависят от области Ω и от функций $u(z)$, $f(z)$.

Как отмечает Р. Юлмухаметов, оценки сверху для функции $\log|f(z)|$, которые получаются из теорем C и D, выполняются для точек, (β, s)-нормальных относительно только меры μ_u.

Теорема E [19, с. 121]. *Пусть на $[r_0, \infty)$ задана непрерывная неубывающая функция $v(r) \to \infty$ при $r \to \infty$ и пусть $\delta > 0$. Тогда для всех $r \geqslant r_0$, кроме, возможно, множества конечной меры $L \in FM$, выполняется неравенство*

$$v\left(r + \frac{2}{\log v(r)}\right) < v(r)^{1+\delta}. \tag{2.3}$$

Следующая теорема легко получается из теоремы E заменой переменной.

Теорема F. *Пусть на* $[r_0, 1)$ *задана непрерывная неубывающая функция* $v(r) \to \infty$ *при* $r \to 1$ *и пусть* $\delta > 0$. *Тогда для всех* $r_0 \leqslant r < 1$, *кроме, возможно, множества* $L \in FM$, *выполняется неравенство*

$$v\left(r + \frac{2(1-r)^2}{\log v(r)}\right) < v(r)^{1+\delta}. \tag{2.4}$$

Докажем элементарную, но важную лемму.

Лемма 1. *Пусть* $v(x)$ – *дважды непрерывно дифференцируемая функция, заданная на* $[0, \infty)$ *или на* $[0, 1)$ *и*

$$h(x, v) := v(T)\frac{\log x - \log R}{\log T - \log R} + v(R)\frac{\log T - \log x}{\log T - \log R},$$

где числа R, T, $R < T$, *принадлежат множеству определения функции* v. *Тогда для каждого* $x \in [R, T]$ *выполнено неравенство*

$$|h(x, v) - v(x)| \leqslant C_{14}(T-R)^2(v'((R+T)/2)/R + \max_{\xi \in [R,T]} |v''(\xi)|).$$

Доказательство леммы 1. По формуле Тейлора в форме Лагранжа имеем

$$v(x) =$$
$$v\Big(\frac{R+T}{2}\Big) + v'\Big(\frac{R+T}{2}\Big)\Big(x - \frac{R+T}{2}\Big) + \frac{v''(\xi)}{2}\Big(x - \frac{R+T}{2}\Big)^2, \tag{2.5}$$

где $\xi \in [R, T]$,

$$\frac{\log(1 + \frac{x-R}{R})}{\log(1 + \frac{T-R}{R})} = \frac{\frac{x-R}{R} + O((\frac{x-R}{R})^2)}{\frac{T-R}{R} + O((\frac{T-R}{R})^2)} =$$

$$= \frac{x - R + O(\frac{(x-R)^2}{R})}{T - R + O(\frac{(T-R)^2}{R})} = \frac{x-R}{T-R}(1 + O((T-R)/R)),$$
$$(T-R)/R \to 0, \tag{2.6}$$

$$\frac{\log(1 + \frac{T-R}{R}) - \log(1 + \frac{x-R}{R})}{\log(1 + \frac{T-R}{R})} =$$

$$= \frac{T-x}{T-R}(1 + O((T-R)/R)), \quad (T-R)/R \to 0. \tag{2.7}$$

Учитывая (2.5)–(2.7), запишем

$$h(x,v)-v(x)=(v(T)-v(x))\frac{\log(1+\frac{x-R}{R})}{\log(1+\frac{T-R}{R})}+$$

$$+(v(R)-v(x))\frac{\log(1+\frac{T-R}{R})-\log(1+\frac{x-R}{R})}{\log(1+\frac{T-R}{R})}=$$

$$=\Big(v\Big(\frac{T+R}{2}\Big)+v'\Big(\frac{T+R}{2}\Big)\Big(T-\frac{T+R}{2}\Big)+\frac{v''(\xi_1)}{2}\Big(T-\frac{T+R}{2}\Big)^2-$$

$$-v\Big(\frac{T+R}{2}\Big)-v'\Big(\frac{T+R}{2}\Big)\Big(x-\frac{T+R}{2}\Big)-\frac{v''(\xi_2)}{2}\Big(x-\frac{T+R}{2}\Big)^2\Big)\times$$

$$\times\frac{x-R}{T-R}(1+O((T-R)/R))+$$

$$+\Big(v\Big(\frac{T+R}{2}\Big)+v'\Big(\frac{T+R}{2}\Big)\Big(R-\frac{T+R}{2}\Big)+\frac{v''(\xi_3)}{2}\Big(R-\frac{T+R}{2}\Big)^2-$$

$$-v\Big(\frac{T+R}{2}\Big)-v'\Big(\frac{T+R}{2}\Big)\Big(x-\frac{T+R}{2}\Big)-\frac{v''(\xi_4)}{2}\Big(x-\frac{T+R}{2}\Big)^2\Big)\times$$

$$\times\frac{T-x}{T-R}(1+O((T-R)/R))=v'\Big(\frac{T+R}{2}\Big)O((T-R)^2/R)+$$

$$+\Big(\frac{v''(\xi_1)}{2}-\frac{v''(\xi_2)}{2}+\frac{v''(\xi_3)}{2}-\frac{v''(\xi_4)}{2}\Big)O((T-R)^2),$$

и отсюда следует утверждение леммы 1. □

Доказательство теоремы 1. Начнем с изложения идеи доказательства. Сперва мы покажем, что каждый круг вида $D(a, |a|^{1-\rho/2})$, где $f(a)=0$, содержит достаточно большое исключительное множество. Затем будет доказано, что этим же свойством обладает каждый круг несколько большего радиуса, не требуя при этом, чтобы центр круга был нулем функции f. Для завершения доказательства помещаем в кольцо $A(R,2R)$ достаточно много непересекающихся кругов увеличенного радиуса. Сравнивая площади кольца и кругов, получаем оценку (1.6).

Лемма 2. *Пусть $h(z,v,A)$ – наименьшая гармоническая мажоранта субгармонической функции $v(z) := |z|^\rho$, где $\rho > 0$, в кольце $A := A(R - R^{1-\rho/2},\ R + R^{1-\rho/2})$. Тогда*

$$\max\{h(z,v,A) - v(z) : z \in A(R - R^{1-\rho/2},\ R + R^{1-\rho/2})\} \leqslant C_{15},$$

где постоянная C_{15} не зависит от R.

Доказательство леммы 2. Достаточно рассмотреть разность $h(x,v,A) - v(x)$, ибо

$$h(z,v,A) := v(R + R^{1-\rho/2}) \frac{\log|z| - \log(R - R^{1-\rho/2})}{\log(R + R^{1-\rho/2}) - \log(R - R^{1-\rho/2})} +$$

$$+ v(R - R^{1-\rho/2}) \frac{\log|z| - \log(R + R^{1-\rho/2})}{\log(R - R^{1-\rho/2}) - \log(R + R^{1-\rho/2})}$$

является радиально симметрической функцией. Применим лемму 1 к $v(x) = x^\rho$. Так как $\max\{|v'(x)| : x \in [R - R^{1-\rho/2}, R + R^{1-\rho/2}]\} \asymp R^{\rho-1}$, а $\max\{|v''(x)| : x \in [R - R^{1-\rho/2}, R + R^{1-\rho/2}]\} \asymp R^{\rho-2}$, то таким образом получим утверждение леммы 2. $\square$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и $f(a) = 0$. Тогда для любого покрытия кругами пересечения E с $D(a,\ |a|^{1-\rho/2})$ сумма их радиусов не меньше, чем $|a|^{1-\rho/2-2C_2-\varepsilon}$.*

Доказательство леммы 3. Рассмотрим окружности $S(a, t|a|^{1-\rho/2})$, $t \in [1/2, 3/4]$. Если все они пересекаются с множеством E, то пересечение E с кругом $D := D(a,\ |a|^{1-\rho/2})$ покрывается кругами только при условии, что сумма их радиусов не меньше $\frac{1}{8}|a|^{1-\rho/2}$: сравним радиальные проекции множества E и исключительных кругов на радиус D. Если же существует окружность $S := S(a, p|a|^{1-\rho/2})$, $p \in [1/2, 3/4]$, не пересекающаяся с E, то внутри этой окружности верна оценка

$$|h(z, \log|f|, D) - \log|f(z)|| < (2C_2 + \varepsilon)\log|z|, \quad z \notin E, \tag{2.8}$$

где $h(z, \log|f|, D)$ является наименьшей гармонической мажорантой субгармонической функции $\log|f|$ в круге D.

Докажем неравенство (2.8). Обозначим через $h(z,v,D)$ наименьшую гармоническую мажоранту субгармонической функции $v(z) = |z|^\rho$ в круге D. По определению наименьшей гармонической мажоранты и согласно лемме 2 находим

$$0 \leqslant h(z,v,D) - v(z) \leqslant h(z,v,A) - v(z) \leqslant C_{15}. \tag{2.9}$$

Из принципа максимума для гармонических функций следует, что в D имеет место оценка

$$|h(z,v,D)-h(z,\log|f|,D)|\leqslant|h(z_0,v,D)-h(z_0,\log|f|,D)|, \quad (2.10)$$

где $z_0\in S$. Учитывая предположение об S, продолжим оценку (2.10)

$$\begin{aligned}|h(z_0,v,D)-h(z_0,\log|f|,D)|&=\\&=|v(z_0)-\log|f(z_0)||<C_2\log|z_0|<(C_2+\varepsilon)\log|z|. \quad (2.11)\end{aligned}$$

Из (1.5), (2.9)–(2.11) вытекает (2.8).

С другой стороны, из формулы Пуассона–Иенсена для функции $\log|f|$ в круге D, т.е. из формулы

$$\log|f(z)|=h(z,\log|f|,D)-\sum_{a_n\in D}g(z,a_n,D),$$

где $g(z,a_n,D)$ – функция Грина области D с полюсом в нуле a_n функции f, получаем

$$|h(z,\log|f|,D)-\log|f(z)||=\left|\sum_{a_n\in D}g(z,a_n,D)\right|=\sum_{a_n\in D}g(z,a_n,D).$$

Используя известные свойства функции Грина, отсюда находим

$$|h(z,\log|f|,D)-\log|f(z)||\geqslant g(z,a,D)=\log\frac{p|a|^{1-\rho/2}}{|z-a|}. \quad (2.12)$$

Из (2.12) следует, что круг $D(a,|a|^{1-\rho/2-2C_2-\varepsilon})$ содержится в E. □

После доказательств лемм 2 и 3 продолжим доказательство теоремы 1. Рассмотрим теперь произвольное число $b\in\mathbb{C}$ и круг $D(b,|b|^{1-\rho/2+\varepsilon})$ с $\varepsilon>0$. Снова имеем альтернативу: или все окружности $S(b,t|b|^{1-\rho/2+\varepsilon})$, $t\in[1/2,3/4]$, пересекаются с E, или существует окружность $S(b,p|b|^{1-\rho/2+\varepsilon})$, $p\in[1/2,3/4]$, не пересекающаяся с E. В первом случае сумма радиусов любого покрытия кругами пересечения не меньше, чем $\frac{1}{8}|b|^{1-\rho/2+\varepsilon}$. Во втором случае в круге $D(b,\frac{3}{4}|b|^{1-\rho/2+\varepsilon})$ существует число a такое, что $f(a)=0$. Обоснуем это утверждение. Пусть $E\cap S(p|b|^{1-\rho/2+\varepsilon})=\varnothing$ и f не имеет нулей в круге $D(p|b|^{1-\rho/2+\varepsilon})$, следовательно, $\log|f|$ является гармонической функцией в вышеуказанном круге. Запишем формулу Пуассона–Иенсена

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\log|f(b+p|b|^{1-\rho/2+\varepsilon}e^{i\varphi})|-|b+p|b|^{1-\rho/2+\varepsilon}e^{i\varphi}|^{\rho})\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{p|b|^{1-\rho/2+\varepsilon}}\frac{n(b,t,\log|f|)-n(b,t,v)}{t}\,dt. \tag{2.13}$$

Из определения множества E следует, что левая часть формулы (2.13) есть $O(\log|b|)$. С другой стороны, мера Рисса $n(b,t,\log|f|)$ равна нулю для каждого $t\in[0,p|b|^{1-\rho/2+\varepsilon}]$. Мера Рисса функции $v(z)=|z|^{\rho}$ удовлетворяет соотношению

$$d\mu_v(z)=\frac{1}{2\pi}\Delta v\,dm_2(z)=\frac{1}{2\pi}\rho^2|z|^{\rho-2}\,dm_2(z),$$

где $m_2(z)$ – плоская мера Лебега. Отсюда получаем, что $n(b,t,v)\asymp|b|^{\rho-2}t^2$, $0\leqslant t\leqslant p|b|^{1-\rho/2+\varepsilon}$. Таким образом, правая часть равенства (2.13) имеет порядок $\asymp|b|^{\rho-2}|b|^{2-\rho+2\varepsilon}=|b|^{2\varepsilon}$, и мы пришли к противоречию. Следовательно, круг $D(b,\frac{3}{4}|b|^{1-\rho/2+\varepsilon})$ содержит нуль a функции f. Далее, $D(a,|a|^{1-\rho/2})\subset D(b,|b|^{1-\rho/2+\varepsilon})$ при достаточно большом $|b|$. Применив лемму 3, заключаем, что для любого покрытия пересечения $E\cap D(b,|b|^{1-\rho/2+\varepsilon})$ кругами сумма их радиусов не меньше, чем $|b|^{1-\rho/2-2C_2-\varepsilon}$.

Из сравнения площадей следует, что в кольце $A=A(R,2R)$ можно разместить $\asymp R^2/R^{2-\rho+2\varepsilon}=R^{\rho-2\varepsilon}$ непересекающихся кругов вида $D(b,|b|^{1-\rho/2+\varepsilon})$, каждый из которых содержит такую часть исключительного множества, что для любого ее покрытия кругами сумма радиусов этих кругов не меньше, чем $\asymp R^{1-\rho/2-2C_2-\varepsilon}$. Так как радиусы кругов, покрывающих E, ограничены числом $\asymp R^{1-\rho/2+\varepsilon}$ и поэтому учитываются не более конечного числа раз, причем кратность покрытия не зависит от R, то общая сумма их радиусов больше или равна, чем $\asymp R^{1+\rho/2-2C_2-3\varepsilon}$. □

Доказательство теоремы 2. Согласно теореме C, в условиях теоремы 2 существует целая функция f, удовлетворяющая (1.7) для всех точек $z\in N(\beta,s,\mu_u,\mu_{\log|f|})$, где $\beta=B(r,u)^{1+\varepsilon}$, $s=\beta^{-1}$.

Переходим к доказательству оценки (1.8) величины исключительного множества $E = \mathbb{C} \setminus N(\beta, s, \mu_u, \mu_{\log|f|})$. Положим $\mu := \mu_u + \mu_{\log|f|}$. Далее будет доказано неравенство ($0 < \delta < \varepsilon$)

$$n(r,\mu) < C_{16} B(r,u)^{1+\delta}, \quad r \notin L \in FM. \tag{2.14}$$

В предположении, что (2.14) верно, оценим величину множества E. По определению точки, нормальной относительно меры, каждая точка $z \in E$ является цетром круга $D(z, r_z)$, такого, что $\mu(D(z,r_z)) \geqslant B(|z|,u)^{1+\varepsilon} r_z$, $r_z \in (0,s)$.

По теореме о покрытии [20, с. 246], из покрытия $\{D(z,r_z)\}$ множества E можно выбрать не более чем счетное подпокрытие $\{D(z_j, r_{z_j})\}$ (далее обозначаем $r_j := r_{z_j}$), кратности не более шести, обладающее следующим свойством:

$$\mu(D(z_j, r_j)) \geqslant B(|z_j|, u)^{1+\varepsilon} r_j. \tag{2.15}$$

Положим $R = r + (\log B(r,u))^{-1}$ и рассмотрим сумму

$$\sum_{r<|z_j|\leqslant R} \mu(D(z_j,r_j)) \geqslant B(r,u)^{1+\varepsilon} \sum_{r<|z_j|\leqslant R} r_j. \tag{2.16}$$

Выше мы применили (2.15) и монотонность функции $B(r,u)$. Применяя теорему E и учитывая величины радиусов исключительных кругов, получим

$$\sum_{r<|z_j|\leqslant R} \mu(D(z_j,r_j)) \leqslant 6\mu\left(D\left(R + \frac{1}{B(r,u)^{1+\varepsilon}}\right)\right) =$$

$$= 6\mu\left(D\left(r + \frac{1}{\log B(r,u)} + \frac{1}{B(r,u)^{1+\varepsilon}}\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant 6\mu\left(D\left(r + \frac{2}{\log B(r,u)}\right)\right) \leqslant 6C_{16} B(r,u)^{1+\delta}, \quad r \notin L \in FM. \tag{2.17}$$

Из (2.16) и (2.17) следует (1.8). Осталось доказать неравенство (2.14). Из условия $u(z) \leqslant B(|z|,u)$ и формулы Иенсена получим

$$B(R,u) \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi})\,d\varphi \geqslant \int_r^R \frac{n(t,\mu_u)}{t}\,dt \geqslant$$

$$\geqslant n(r,\mu_u)\log\frac{R}{r} \geqslant C_{17}\frac{n(r,\mu_u)}{r\log B(r,u)}.$$

Отсюда по теореме E следует, что

$$n(r,\mu_u) \leqslant C_{17}B(r,u)^{1+\delta/2} r \log B(r,u) < \\ < B(r,u)^{1+\delta},\ r \notin L \in FM. \quad (2.18)$$

Из оценки (2.18) следует (1.8), но только для множества $E_u := \mathbb{C} \setminus N(\beta, s, \mu_u)$. Согласно замечанию к теореме C, целая функция $f(z)$, существование которой утверждает эта теорема, удовлетворяет неравенству

$$\log|f(z)| \leqslant u(z) + C_3(\varepsilon)(\log B(|z|,u) + \log|z|) \leqslant \\ \leqslant 2B(|z|,u), \quad z \notin E_u. \quad (2.19)$$

Из оценки (1.8) для исключительного множества E_u следует, что для любого z существует окружность $S(0,t)$, $t \in [r,R]$, где $r = |z|$, $R = r + (\log B(r,u))^{-1}$, все точки которой (β,s)-нормальны относительно меры μ_u. Применяя принцип максимума для субгармонических функций и учитывая неубывание $B(r,u)$, из (2.19) получаем неравенство

$$\log|f(z)| \leqslant 2B(R,u) + C_3(\varepsilon)\log|z| \leqslant 2B(r,u)^{1+\delta/2},$$

которое выполняется для всех z, кроме $|z| = r \notin L \in FM$. Снова по формуле Иенсена выводим

$$n(r,\mu_{\log|f|}) \leqslant 2C_{17}B(R,u)^{1+\delta/2} r \log B(r,u) < \\ < B(r,u)^{1+\delta}, \quad r \notin L \in FM. \quad (2.20)$$

Сочетая (2.18) и (2.20), приходим к (2.14).

Доказательство теоремы 3.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3 *и* $f(a) = 0$. *Тогда для любого покрытия пересечения* $E \cap D(a, v(|a|)^{-1/2})$ *кругами сумма их радиусов не меньше, чем* $v(|a|)^{-2C_4-1/2-\varepsilon}$.

Доказательство леммы 4 аналогично доказательству леммы 3, поэтому мы его не приводим, отметим только, что здесь используются свойства функции $v(R)$, заявленные в теореме 3. □

Рассмотрим теперь произвольное число $b \in \mathbb{C}$ и круг $D(b, r(b))$, где $r(b) = v(|b|)^{-1/2+\varepsilon}$. Либо все окружности $S(b, sr(b))$, $p \in [1/2, 3/4]$, пересекаются с E, либо есть окружность такого вида, которая с E не пересекается. В первом случае пересечение

$E\cap D(b,r(b))$ покрывается кругами с суммой радиусов больше, чем $\frac{1}{8}r(b)$. Во втором случае существует число $a\in D(b,\frac{3}{4}r(b))$ такое, что $f(a)=0$. Обоснуем это утверждение. Предположим, что функция f не имеет нулей в круге $D(b,pr(b))$. Запишем для него формулу Пуассона–Иенсена

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\log|f(b+sr(b)e^{i\varphi})|-v(|b+sr(b)e^{i\varphi}|))\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{pr(b)}\frac{n(b,t,\log|f|)-n(b,t,v)}{t}\,dt. \qquad (2.21)$$

Плотность меры Рисса μ_v субгармонической функции $v(|z|)$ равна $\frac{1}{2\pi}\Delta v(|z|)\geqslant v(|z|)^{1-\varepsilon}$, $z\in D(b,sr(b))$. Поэтому

$$n(b,t,v)\geqslant v(|b|)^{1-\varepsilon}t^2. \qquad (2.22)$$

Из предположения, что окружность $S(b,sr(b))$ не пересекается с исключительным множеством, следует, что левая сторона равенства (2.21) есть $O(\log v(|b|))$, $b\to\infty$, а из (2.22) вытекает, что правая сторона равенства (2.21) больше, чем $v(|b|)^{2\varepsilon}$, т.е. пришли к противоречию. Следовательно, круг $D(b,sr(b))$ содержит нуль a функции f. Кроме того, $D(a,v(|a|)^{-1/2})\subset D(b,\frac{3}{4}r(b))$ при достаточно большом $|b|$. Итожим: для любого покрытия кругами $E\cap D(b,r(b))$ сумма их радиусов больше, чем $v(|a|)^{-2C_4-1/2-\varepsilon}\geqslant v(|b+r(b)|)^{-2C_4-1/2-\varepsilon}\geqslant(v(|b|)^{-2C_4-1/2-\varepsilon})^{1+\varepsilon}\geqslant v(|b|)^{-2C_4-1/2-2\varepsilon}$.

В кольце $A(R,R+(\log v(R))^{-1})$ можно разместить $\asymp Rv(R)^{1-2\varepsilon}/\log v(R)$ непересекающихся кругов вида $D(b,r(b))$ (сравнение площадей). В каждом из них сумма радиусов кругов, покрывающих E, больше, чем $v(R)^{-2C_4-1/2-2\varepsilon}$ (в этом месте и выше использовано, что по теореме E в кольце $A(R,R+(\log v(R))^{-1})$ выполняется соотношение $r(b)\asymp v(R)^{-1/2+\varepsilon}$) и кратность покрытия конечна, следовательно, общая сумма радиусов больше, чем $v(R)^{-2C_4+1/2-4\varepsilon}$. □

Доказательство теоремы 4. Мы надеемся, что квалифицированный читатель с пониманием воспримет эскизное изложение.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4 и $f(a) = 0$. Тогда для любого покрытия пересечения $E \cap D(a, (1-|a|)^{1+\rho/2})$ кругами сумма их радиусов не меньше, чем $(1-|a|)^{2C_5+1+\rho/2+\varepsilon}$.*

Доказательство леммы 5 опускается, так как оно аналогично доказательству леммы 3. $\square$

Далее с применением леммы 5 показываем, что для любого покрытия кругами пересечения множества E с произвольным кругом вида $D(b, (1-|b|)^{1+\rho/2-\varepsilon})$ сумма их радиусов не меньше, чем $(1-|b|)^{2C_5+1+\rho/2+\varepsilon}$. Повторяя прежние аргументы, устанавливаем, что общая сумма радиусов кругов, покрывающих часть E, содержащуюся в кольце $A(R, R + (1-R)/2)$, не меньше, чем $\asymp \frac{1-R}{(1-R)^{2+\rho-2\varepsilon}}(1-R)^{2C_5+1+\rho/2+\varepsilon} = (1-R)^{2C_5-\rho/2+3\varepsilon}$. $\square$

Доказательство теоремы 5. Применим теорему D, в которой положим $\Omega = \mathbb{D}$, $\beta = B(|z|, u)^{1+\varepsilon}$, $s = \beta^{-1}$. Согласно теореме D в условиях теоремы 5 существует аналитическая в $\mathbb{D}$ функция $f(z)$, удовлетворяющая неравенству (1.14) для (β, s)-нормальных точек относительно мер μ_u и $\mu_{\log|f|}$. Обозначим $\nu = \mu_u + \mu_{\log|f|}$. Далее будет показано, что имеет место оценка

$$\nu(r) \leqslant C_{18} B(r, u)^{1+\delta}, \quad r \notin L \in FM. \tag{2.23}$$

В предположении, что неравенство (2.23) верно, оценим величину исключительного множества E. По определению точки, нормальной относительно меры, каждая точка $z \in E$ является центром круга $D(z, r_z)$ такого, что

$$\nu(D(z, r_z)) > B(|z|, u)^{1+\varepsilon} r_z, \quad r_z \in (0, B(|z|, u)^{-1-\varepsilon}). \tag{2.24}$$

По теореме о покрытии [19, с. 246], из покрытия $\{D(z, r_z)\}$ множества E можно выбрать не более чем счетное подпокрытие $\{D(z_j, r_j)\}$ (здесь $r_j := r_{z_j}$), кратности не более 6. Применяя оценку (2.24), имеем

$$\sum_{|z_j| \in [r,R]} \nu(D(z_j, r_j)) \geqslant B(r, u)^{1+\varepsilon} \sum_{|z_j| \in [r,R]} r_j. \tag{2.25}$$

С другой стороны, как следует из (2.23), (2.24)

$$\sum_{|z_j| \in [r,R]} \nu(D(z_j, r_j)) \leqslant 6\nu\left(D\left(0, R + B(r, u)^{-1-\varepsilon}\right)\right) =$$

$$= 6\nu\left(D\left(0, r+\frac{(1-r)^2}{\log B(r,u)}+B(r,u)^{-1-\varepsilon}\right)\right) <$$

$$< 6\nu\left(D\left(0, r+\frac{2(1-r)^2}{\log B(r,u)}\right)\right) < 6C_{18}B(r,u)^{1+\delta}. \qquad (2.26)$$

Сравнивая неравенства (2.25) и (2.26) (в последнем положено $\delta = \varepsilon/2$), получаем (1.15).

Осталось доказать оценку (2.23). Не уменьшая общности, можем считать, что $u(0) = 0$, тогда из формулы Пуассона–Иенсена следует

$$B(R,u) \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi})\,d\varphi \geqslant$$

$$\geqslant \int_r^R \frac{n(t,\mu_u)}{t}\,dt \geqslant n(r,\mu_u)\log\frac{R}{r}. \qquad (2.27)$$

Из (2.27) и теоремы F получаем, что

$$n(r,u)\log\left(1+\frac{(1-r)^2}{r\log B(r,u)}\right) \leqslant B(R,u) \leqslant B(r,u)^{1+\delta},\ r \notin L \in FM,$$

а отсюда вытекает неравенство

$$n(r,u) \leqslant B(r,u)^{1+\delta}\log B(r,u)/(1-r)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2B(r,u)^{1+\delta}, \quad r \notin L \in FM. \quad (2.28)$$

Поэтому для множества $E_u := \mathbb{D} \setminus N(\beta, s, \mu_u)$ выполняется (1.15). Согласно замечанию к теоремам C, D, функция f удовлетворяет оценке сверху

$$\log|f(z)| \leqslant u(z) + C_6(\varepsilon)\log B(|z|,u) \leqslant 2B(|z|,u),\ z \notin E_u. \qquad (2.29)$$

Из (2.28) и доказательства неравенств (2.25), (2.26) следует, что для любой точки $z \in \mathbb{D}$ существует окружность $S(0,T)$, $T \in [(r+r)/2, R)$, все точки которой (β, s)-нормальны относительно меры μ_u. Тогда из (2.29) получаем неравенство

$$\log|f(z)| \leqslant 2B(T,u),\ z \in S(0,T). \qquad (2.30)$$

Опять по формуле Пуассона–Иенсена имеем

$$\int_r^T \frac{\mu_{\log|f|}(t)}{t}\,dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Te^{i\varphi})|\,d\varphi \leqslant 2B(T,u),$$

а отсюда выводим

$$n(r,\mu_{\log|f|})\log\frac{T}{r} \leqslant 2B(T,u) \leqslant 2B(R,u) \leqslant \\ \leqslant 2B(r,u)^{1+\delta}, \quad r \notin L \in FM$$

и далее

$$n(r,\mu_{\log|f|}) \leqslant \frac{2B(r,u)^{1+\delta}}{\log\left(1+\frac{(1-r)^2}{2\log B(r,u)}\right)} \leqslant 4B(r,u)^{1+\delta}\log B(r,u)(1-r)^{-2} \leqslant \\ \leqslant 4B(r,u)^{1+2\delta}. \tag{2.31}$$

Таким образом, в сочетании (2.31) с (2.28) неравенство (2.23) доказано. □

Доказательство теоремы 6, как и доказательство теоремы 4, излагаем вкратце. Применяется следующее утверждение.

Лемма 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 6 *и* $f(a) = 0$. *Тогда для любого покрытия пересечения* $E \cap D(a, v(|a|)^{-1/2})$ *кругами сумма их радиусов не меньше, чем* $v(|a|)^{-2C_7-1/2-\varepsilon}$. □

Затем мы показываем, что для любого покрытия кругами пересечения множества E с произвольным кругом $D(b, v(|b|)^{-1/2+\varepsilon})$ сумма радиусов кругов покрытия не меньше, чем $v(|b|)^{-2C_7-1/2-\varepsilon}$. В кольце $A(R, R+(1-R)^2/\log v(R)))$ можно разместить порядка $\frac{(1-R)^2 v(R)^{1-2\varepsilon}}{\log v(R)}$ непересекающихся кругов такого вида (сравнение площадей). В каждом из них сумма радиусов кругов, покрывающих E, больше, чем $v(R)^{-2C_7-1/2-\varepsilon}$ (в этом месте и выше использовано, что по теореме F в кольце $A(R, R+(1-R)^2/\log v(R))$ выполняется соотношение $r(b) \asymp v(R)^{-1/2+\varepsilon}$) и кратность покрытия конечна, следовательно, общая сумма радиусов больше, чем $v(R)^{-2C_7+1/2-31\varepsilon}$. □

Литература

1. С. Н. Мергелян, *Равномерные приближения функций комплексного переменного.* — УМН **7**, No. 2 (1952), 31–122.

2. A. Beurling, P. Malliavin, *On Fourier transforms of measures with compact support.* — Acta Math. **107** (1962), 291–391.
3. Н. У. Аракелян, *Целые функции конечного порядка с бесконечным множеством дефектных значений.* — Докл. АН СССР **170**, No. 2 (1966), 999–1002.
4. П. З. Агранович, В. Н. Логвиненко, *О массивности исключительного множества многочленного асимптотического представления субгармонической функции.* — Препринт 45–87, ФТИНТ АН УССР, Харьков (1988), 18.
5. Ю. И. Любарский, М. Л. Содин, *Аналоги функций типа синуса для выпуклых областей.* — Препринт 17–86, ФТИНТ АН УССР, Харьков (1986), 42.
6. D. Drasin, *Approximation of subharmonic functions with applications.* — in: Approximation, Complex Analysis, and Potential Theory. Proc. of the NATO ASI. Montreal, Canada, 3 to 14 July 2000, Kluwer Academic Publishers. Dordrecht-Boston-London (2001), pp. 163–189.
7. B. Kielberg, *On certain integral and harmonic functions. A study in minimum modulus.* — Thesis, University of Uppsala (1948).
8. P. B. Kennedy, *A class of integral functions bounded on certain curves.* — Proc. London Math. Soc. **6** (1956), 518–547.
9. W. Al-Katifi, *On the asymptotic values and parths of certain integral and meromorphic functions.* — Proc. London Math. Soc. **16** (1966), 599–634.
10. В. С. Азарин, *О лучах вполне регулярного роста целой функции.* — Мат. сб. **79**, No. 4 (1969), 463–476.
11. Р. С. Юлмухаметов, *Аппроксимация субгармонических функций.* — Anal. Math. **11**, No. 3 (1985), 257–282.
12. M. Girnyk, A. Goldberg, *Approximation of subharmonic functions by logarithms of moduli of entire functions in integral metrics.* — Israel Math. Conf. Proc. **15** (2001), 117–135.
13. Yu. Lyubarskii, Eu. Malinnikova, *On approximation of subharmonic functions.* — J. d'Analyse Math. **83** (2001), 121–149.
14. I. Chyzhykov, *Approximation of subharmonic functions of slow growth.* — Math. Fiz. Anal. Geom. **9** (2002), 509–520.
15. И. Чижиков, *Аппроксимация субгармонических функций.* — Алгебра и Анализ **16**, Вып. 3 (2004), 211–237.
16. W. K. Hayman, P. B. Kennedy, *Subharmonic functions.* V. 1. — Academic Press, London-New York-San Francisco (1976).
17. М. А. Гирнык, *О приближении субгармонической функции бесконечного порядка логарифмом модуля целой функции.* — Мат. заметки **50**, 4 (1991), 57–60.
18. М. А. Гирнык, *Приближение функции, субгармонической в круге, логарифмом модуля аналитической функции.* — Укр. мат. ж. **48**, No. 8 (1994), 1080–1083.
19. А. А. Гольдберг, И. В. Островский, *Распределение значений мероморфных функций.* — Наука, М. (1970).
20. Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала.* — Наука, М. (1966).

Hirnyk M. (Girnyk M.) Exactness of approximation of a subharmonic function by the logarithm of the modulus of an analytic function in the Chebyshev metric.

It is known that a subharmonic function $u(z)$ of finite order ρ can be approximated by the logarithm of the modulus of an entire function $f(z)$ at the point z up to $C \log |z|$ outside a very small exceptional set. We prove that if a constant C decreases, then, beginning with the value $C = \rho/4$, the exceptional set enlarges substantially. This improves a result by Yulmukhametov. We also prove similar results for subharmonic functions of infinite order and functions subharmonic in the disk.

The main result of the article is the following.

Theorem 1. Suppose a number ρ is positive, and an entire function $f(z)$ satisfies the condition

$$||z|^\rho - \log |f(z)|| \leqslant C \log |z|, \ \ z \notin E,$$

where $E \subset \cup_j \{z : |z - z_j| < r_j\}$, $r_j < |z_j|^{1-\rho/2-2C+\varepsilon}$, and $\varepsilon > 0$. Then

$$\sum_{R \leqslant |z_j| \leqslant 2R} r_j \geqslant R^{1+\rho/2-2C-3\varepsilon}, \ \ R > R(\varepsilon).$$

Львовская коммерческая академия
Поступило 7 июля 2005 г.
E-mail: hirnyk@lac.lviv.ua