Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 326, 2005 г.

М. А. Муратов, В. И. Чилин

$*$-АЛГЕБРЫ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА

1. Введение

Один из первых подходов к введению "некоммутативного варианта" кольца измеримых функций был предложен И. Сигалом [1], который рассмотрел *$*$-алгебру $S(M)$ измеримых операторов, присоединенных к произвольной алгебре фон Неймана M*. Впоследствии, для целей некоммутативного интегрирования, изучались $*$-подалгебры $S(M,\tau)$ в $S(M)$ всех τ-измеримых операторов, ассоциированные с точным нормальным полуконечным следом τ на M (см. например, [2–4]. Алгебры $S(M,\tau)$ и $S(M)$ являются $*$-алгебрами замкнутых, плотно определенных линейных операторов, действующих в том же гильбертовом пространстве H, что и сама алгебра фон Неймана M. При этом все эти операторы присоединены к M, а алгебраические операции в этих $*$-алгебрах совпадают с операциями "сильной суммы", "сильного произведения", перехода к сопряженному оператору и обычного умножения на скаляры. Сама алгебра фон Неймана M является $*$-подалгеброй в $S(M,\tau)$ (и в $S(M)$) и совпадает с множеством всех ограниченных операторов из $S(M,\tau)$ и $S(M)$.

Важный класс других $*$-алгебр $\mathcal{A}$ замкнутых операторов, действующих в гильбертовом пространстве H и присоединенных к алгебре фон Неймана M, у которых $*$-подалгебра

$$\mathcal{A}_b = \{T \in \mathcal{A} : \ T \in \mathcal{B}(H)\},$$

где $\mathcal{B}(H)$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в H, совпадает с M, был введен в [5] Диксоном, который назвал их EW^*-алгебрами. Помимо указанных выше $*$-алгебр $S(M)$ и $S(M,\tau)$, EW^*-алгебрами являются *$*$-алгебры $LS(M)$ локально измеримых операторов, присоединенных к M* ([6, 7]). В [8] показано, что любая EW^*-алгебра $\mathcal{A}$, у которой $\mathcal{A}_b = M$, является $*$-подалгеброй в $LS(M)$, что объясняет уникальность $*$-алгебры $LS(M)$ для алгебры фон Неймана M в классе

EW^*-алгебр.

В настоящей работе рассматриваются $*$-алгебры $S(M)$, $S(M,\tau)$, $LS(M)$ и приводятся условия, при которых они различны и при которых совпадают.

Используется терминология и обозначения из теории алгебр фон Неймана ([9, 10]) и теории измеримых операторов ([1–4, 7]).

2. $*$-алгебра измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана

Пусть H – гильбертово пространство, $\mathcal{B}(H)$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в H, M – подалгебра фон Неймана в $\mathcal{B}(H)$, $P(M)$ – полная решетка всех ортопроекторов в M.

Линейное подпространство D в H называется *присоединенным к M* (обозначение: $D\,\eta\,M$), если $U(D)\subset D$ для любого унитарного оператора U из коммутанта

$$M' = \{S\in\mathcal{B}(H):\ ST = TS\ \forall\ T\in M\}$$

алгебры фон Неймана M. Если D – замкнутое подпространство в H и P_D – оператор ортогонального проектирования на D, то $D\,\eta\,M$ тогда и только тогда, когда $P_D\in P(M)$.

Линейное подпространство D в H называется *сильно плотным в H относительно алгебры фон Неймана M*, если

1) $D\,\eta\,M$;
2) существует такая последовательность проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}\subset P(M)$, что $P_n\uparrow I$, $P_n(H)\subset D$ и $P_n^{\perp}=I-P_n$ – конечный проектор в M для всех $n=1,2,\ldots$, где I – единица алгебры фон Неймана M.

Очевидно, что любое сильно плотное подпространство в H является плотным в H.

Линейный оператор T, действующий в гильбертовом пространстве H, с областью определения $D(T)$, называется *присоединенным к M* (обозначение: $T\,\eta\,M$), если $U(D(T))\subset D(T)$ для любого унитарного оператора U из коммутанта M' и $UT\xi = TU\xi$ для всех $\xi\in D(T)$. Очевидно, что если $T\in\mathcal{B}(H)$ и $T\,\eta\,M$, то $T\in M$.

Замкнутый линейный оператор T с областью определения $D(T)\subset H$, называется *измеримым относительно алгебры фон Ней-*

мана M [1], если $T\,\eta\,M$ и его область определения $D(T)$ сильно плотна в H.

Обозначим через $S(M)$ множество всех линейных операторов в H, измеримых относительно алгебры фон Неймана M. Если $T \in S(M)$, $\lambda \in \mathbf{C}$ (где $\mathbf{C}$ – поле комплексных чисел), то $\lambda T \in S(M)$ и сопряженный оператор T^* к T также измерим относительно M [1]. Кроме того, если $T, S \in S(M)$, то операторы $T+S$ и TS определены на плотных подпространствах и допускают замыкания, которые называются соответственно сильной суммой и сильным произведением операторов T и S и обозначаются $T\dot{+}S$ и $T * S$. В [1] показано, что $T\dot{+}S$ и $T * S$ принадлежат $S(M)$ и относительно рассмотренных алгебраических операций $S(M)$ является $*$-алгеброй с единицей I над полем $\mathbf{C}$. При этом M есть $*$-подалгебра в $S(M)$. В дальнейшем сильную сумму и сильное произведение операторов T и S мы будем обозначать, как и обычные, через $T+S$ и TS.

Если T – замкнутый линейный оператор с плотной областью определения в H и $T = U|T|$ – полярное разложение оператора T, где $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ – модуль оператора T, а U – соответствующая частичная изометрия, то $T \in S(M)$ тогда и только тогда, когда $U \in M$ и $|T| \in S(M)$ [7]. В следующем предложении приводится удобный критерий измеримости замкнутого оператора T на языке спектрального семейства для $|T|$.

Предложение 1 [7]. *Пусть T – замкнутый оператор в H, $T\,\eta\,M$, $T = U|T|$ – полярное разложение T, $\{E_\lambda\}$ – спектральное семейство проекторов для $|T|$, $\lambda \in \mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ – поле действительных чисел. Тогда $U \in M$ и $E_\lambda \in P(M)$ для всех $\lambda \in \mathbf{R}$. При этом $T \in S(M)$ в том и только в том случае, когда область определения $D(T)$ оператора T плотна в H и $E_\lambda^\perp$ – конечный проектор для некоторого $\lambda > 0$.* $\square$

При доказательстве предложения 1 существенно используется следующая лемма, которая нам понадобится в приводимом ниже примере 1.

Лемма [7]. *Пусть T – замкнутый оператор в H с плотной областью определения $D(T), T\,\eta\,M$, $\{E_\lambda\}$ – спектральное семейство проекторов для $|T|, \lambda \in \mathbf{R}$. Если $P \in P(M), P(H) \subseteq D(T)$, $TP \in \mathcal{B}(H)$ и $\|TP\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} < \lambda$, то $E_\lambda^\perp \precsim P^\perp$ (напомним, что отношение $E \precsim Q$ для проекторов $E, Q \in P(M)$ означает, что $E \sim E_1 \leqslant Q$, а* *эквивалентность проекторов $E \sim E_1$ равносильна существованию такой частичной изометрии $V \in M$, что $V^*V = E_1$ и $VV^* = E$).* $\Box$

Из предложения 1 непосредственно вытекает, что в случае, когда M – алгебра фон Неймана типа III, или когда M – фактор типа I, всегда имеет место равенство $S(M) = M$. Для алгебр фон Неймана типа II это равенство уже неверно.

Пример. Пусть в алгебре фон Неймана M существует возрастающая последовательность проекторов $\{E_n\}$, такая что $E = \sup_{n\geqslant 1} E_n$ – конечный проектор и $E_n \neq E$ при всех $n = 1, 2, \ldots$. Покажем, что тогда $S(M) \neq M$.

Действительно, пусть $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$, $E_n \uparrow E$, $E_n \neq E$ при всех $n = 1, 2, \ldots$. Положим $P_n = E^{\perp} + E_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $P_n \uparrow I$ и $P_n^{\perp} = E - E_n$ – конечный проектор в M. Рассмотрим в гильбертовом пространстве H всюду плотное линейное подпространство $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(H)$ и определим линейный оператор T на D, полагая $T\xi = n\xi$ для всех $\xi \in (P_n - P_{n-1})(H)$, $n = 1, 2, \ldots$, где $P_0 = 0$.

Покажем, что оператор T допускает замыкание.

Если $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D$, $\|\xi_k\|_H \longrightarrow 0$ и $\|T\xi_k - -\eta\|_H \longrightarrow 0$ при $k \to \infty$, где $\eta \in H$, то для каждого фиксированного n имеем, что $\|P_n\xi_k\|_H \longrightarrow 0$ и $\|TP_n\xi_k - P_n\eta\|_H \longrightarrow 0$ при $k \to \infty$.

Полагая $Q_m = P_m - P_{m-1}$, получим, что

$$\left\| \sum_{m=1}^{n} Q_m\xi_k \right\|_H^2 = \sum_{m=1}^{n} \|Q_m\xi_k\|_H^2 = \sum_{m=1}^{n} \|P_m\xi_k - P_{m-1}\xi_k\|_H^2 \longrightarrow 0$$

при $k \to \infty$ и

$$\|TP_n\xi_k - P_n\eta\|_H^2 = \left\| T\sum_{m=1}^{n} Q_m(\xi_k - \eta) \right\|_H^2 = \left\| \sum_{m=1}^{n} mQ_m(\xi_k - \eta) \right\|_H^2 = \\ = \sum_{m=1}^{n} \|mQ_m(\xi_k - \eta)\|_H^2 \longrightarrow 0$$

при $k \to \infty$.

Отсюда следует, что $Q_m\eta = 0$ для всех $m = 1, 2, \ldots, n$, то есть $P_n\eta = 0$ для любых $n = 1, 2, \ldots$. Так как $P_n \uparrow I$, то это означает, что $\eta = 0$, и потому оператор T допускает замыкание $\overline{T}$, которое, в силу определения T, является положительно определенным оператором, присоединенным к M.

Обозначим через $\{E_\lambda\}$ спектральное семейство проекторов для оператора $\overline{T} = |\overline{T}|$. Поскольку $\|\overline{T}P_n\|_{\mathcal{B}(H)} = \|TP_n\|_{\mathcal{B}(H)} \leq n < n+1$, то, в силу леммы 1, $E_{n+1}^\perp \precsim P_n^\perp$, и поэтому $E_{n+1}^\perp$ – конечный проектор. Отсюда, согласно предложению 1, получим, что $\overline{T} \in S(M)$. Так как $E_n \neq E$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$, то найдутся такие номера $n_1 < n_2 < \ldots$, что $P_{n_{k+1}} - P_{n_k} \neq 0$, в частности, $\|\overline{T}\xi_k\| \geq n_k$ для некоторых $\xi_k \in (P_{n_{k+1}} - P_{n_k})(H)$ с $\|\xi_k\| = 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Это означает, что $\overline{T}$ не принадлежит M, и потому $S(M) \neq M$. $\square$

Предложеие 2. *Если M – алгебра фон Неймана типа* II, *то $S(M) \neq M$.*

Доказательство. Возьмем произвольный ненулевой конечный проектор $E \in P(M)$. Так как M имеет тип II, то в $P(M)$ нет атомов. В частности, найдется такая последовательность ненулевых проекторов $\{Q_n\}_{n=1}^\infty \subset P(M)$, что $Q_n \leq E$ и $Q_n Q_m = 0$ при $n \neq m$, где $n, m = 1, 2, \ldots$, и $E = \sup_{n \geq 1} Q_n$. Положим $E_n = \sup_{1 \leq m \leq n} Q_m = \sum_{m=1}^n Q_m$. Тогда $E_n \in P(M)$, $E_n \uparrow E$ и $E_n \neq E$ при каждом $n = 1, 2, \ldots$. Из примера 1 непосредственно следует, что $S(M) \neq M$. $\square$

В следующей теореме даются необходимые и достаточные условия для совпадения $*$-алгебр $S(M)$ и M.

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *$S(M) = M$.*

(ii) *M представима в виде прямой суммы $M = \sum\limits_{n=0}^{m} M_n$, где M_0 – алгебра фон Неймана типа* III, *а M_n – факторы типа* I, *$n = 1, 2, \ldots, m$ (m – некоторое натуральное число, некоторые из слагаемых могут отсутствовать).*

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$. Пусть $S(M) = M$. Используя предложение 2 и представление алгебры фон Неймана M в виде прямой суммы алгебр фон Неймана типов I, II и III, получим, что $M = M_0 \bigoplus N$, где M_0 – алгебра фон Неймана типа III, а N – алгебра фон Неймана типа I. Существует такой центральный проектор $Z \in P(Z(N))$, где $Z(N) = N \bigcap N'$ – центр алгебры фон Неймана N, что ZN – атомическая алгебра фон Неймана, а в решетке $P((I_N - Z)N)$ нет атомов (I_N – единица алгебры N).

Допустим что $Z \neq I_N$. Так как $(I_N - Z)N$ имеет тип I, то в $P((I_N - Z)N)$ существует ненулевой конечный проектор. Повторяя доказательство предложения 2, получим, что в этом случае $S(M) \neq M$, что не так. Следовательно, $Z = I_N$, то есть N – атомическая алгебра фон Неймана типа I.

Пусть $\{Q_i\}_{i \in J}$ множество всех атомов в $P(Z(N))$, $M_i = Q_i N$, $i \in J$, J – некоторое множество индексов. Тогда из равенства $Z(M_i) = Q_i Z(N) = Q_i \mathbf{C}$, получим, что M_i – факторы типа I.

Предположим, что J – бесконечное множество. Выберем ненулевые конечные проекторы $E_i \in M_i$ и положим $E = \sup_{i \in J} E_i$. Поскольку $E_i = E_i Q_i$, $Q_i Q_j = 0$ при $i \neq j$, $Q_i \in Z(M)$, то E – конечный проектор. Поэтому, повторяя рассуждения примера 1, получим, что $S(M) \neq M$, что не так. Следовательно, J – конечное множество, то есть M представима в виде прямой суммы $M = \sum\limits_{n=0}^{m} M_n$, где M_0 – алгебра фон Неймана типа III, а M_n – факторы типа I, $n = 1, 2, \dots, m$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть M есть прямая сумма $\sum\limits_{n=0}^{m} M_n$, где M_0 – алгебра фон Неймана типа III, а M_n – факторы типа I, $n = 1, 2, \dots, m$. Если $T \in S(M)$, то найдется такая последовательность $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$, что $P_n \uparrow I$, $P_n(H) \subseteq D(T)$ и $P_n^{\perp}$ – конечные проекторы, $n = 1, 2, \dots$. Поскольку $P_n^{\perp} \downarrow 0$ и в каждом факторе M_i, $i = 1, 2, \dots, m$, может быть только конечная последовательность конечных проекторов, убывающая к нулю, то $P_n^{\perp} = 0$, начиная с некоторого номера. Это означает, что $D(T) = H$ и $T \in M$, т.е. $S(M) = M$. $\square$

3. $*$-АЛГЕБРА ЛОКАЛЬНО ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА

Замкнутый линейный оператор T, действующий в гильбертовом пространстве H, называется *локально измеримым относительно алгебры фон Неймана* M, если $T \eta M$ и существует такая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральных проекторов из M, что $Z_n \uparrow I$ и $TZ_n \in S(M)$ для всех $n = 1, 2, \dots$ [7].

Обозначим через $LS(M)$ множество всех линейных операторов, локально измеримых относительно M. В [7] доказано, что $LS(M)$ является $*$-алгеброй с единицей I над полем $\mathbf{C}$ относительно операций сильного сложения и умножения и перехода к сопряженному оператору (умножение на скаляры определяется обычным образом, причем считается, что $0 * T = 0$). При этом $S(M)$ является $*$-подалгеброй в $LS(M)$.

Так же, как и для измеримых операторов, можно сформулировать следующий критерий локальной измеримости замкнутого оператора T на языке спектрального семейства для $|T|$.

Предложение 3 [7]. *Пусть T – замкнутый оператор в H, $T \eta M$, $T = U|T|$ – полярное разложение T, $\{E_\lambda\}$ – спектральное семейство проекторов для $|T|$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Тогда $T \in LS(M)$ в том и только в том случае, когда область определения $D(T)$ оператора T плотна в H и существует такиая последовательность центральных проекторов $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(M))$, что $Z_n \uparrow I$ и $Z_n E_n^{\perp}$ – конечный проектор в M для всех $n = 1, 2, \ldots$.* □

Из утверждения 3 непосредственно вытекает, что если M – конечная алгебра фон Неймана или фактор, алгебры $S(M)$ и $LS(M)$ совпадают. В общем случае это не так.

Пример 2. Пусть в алгебре фон Неймана M существует возрастающая к единице последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральных проекторов, для которой проекторы $(I - Z_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, бесконечны. Покажем, что тогда $LS(M) \neq S(M)$.

Для этого рассмотрим в H всюду плотное подпространство $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n(H)$ и определим линейный оператор T на D, полагая $T\xi = n\xi$ для всех $\xi \in (Z_n - Z_{n-1})(H)$, $n = 1, 2, \ldots$, $Z_0 = 0$. Повторяя рассуждения примера 1, получим, что оператор T допускает замыкание $\overline{T}$, которое, в силу определения T, является положительно определенным оператором, присоединенным к M. Кроме того, $\overline{T} Z_n = \sum\limits_{m=1}^{n} m(Z_m - Z_{m-1}) \in M \subset S(M)$, и поэтому $\overline{T} \in LS(M)$. С другой стороны, спектральный проектор для $\overline{T}$, отвечающий $\lambda = n$, совпадает с Z_n. Следовательно, в силу предложения 1, оператор $\overline{T}$ не принадлежит $S(M)$, и потому $LS(M) \neq S(M)$. □

Из примера 2 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Предложение 4. *Если алгебра фон Неймана M есть прямое произведение бесконечного числа не конечных алгебр фон Неймана, то $LS(M) \neq S(M)$.* □

В следующей теореме приводится критерий для совпадения $*$-алгебр $LS(M)$ и $S(M)$.

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $LS(M) = S(M)$.

(ii) *M представима в виде прямой суммы $M = \sum\limits_{n=0}^{m} M_n$, где M_0 – конечная алгебра фон Неймана, а M_n – факторы типа I_∞, II_∞, III, $n = 1, 2, \ldots, m$ (m – натуральное число, некоторые из слагаемых могут отсутствовать).*

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$. Выберем центральный проектор $Z_0 \in P(Z(M))$ так, чтобы $M = Z_0M + (I - Z_0)M$, где $Z_0M = M_0$ – конечная алгебра фон Неймана, а в $(I - Z_0)M = N$ нет ненулевых конечных центральных проекторов. Если булева алгебра $P(Z(N))$ содержит бесконечное число элементов, то найдется такая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ненулевых проекторов из $P(Z(N))$, что $Z_nZ_m = 0$ при $n \neq m$ и $\sup_{n\geq 1} Z_n = I - Z_0$. Положим $P_n = \sum_{m=0}^{n} Z_m$. Тогда $P_n \in P(Z(M))$, $P_n \uparrow I$, $(I - P_n)$ – ненулевые центральные проекторы из N, то есть $(I - P_n)$ – бесконечные проекторы в M, $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, как и в примере 2, получим, что $LS(M) \neq S(M)$, что противоречит предположению (i).

Следовательно, булева алгебра $P(Z(N))$ содержит только конечное число элементов. Пусть $\{Q_n\}_{n=1}^{m}$ – множество всех атомов в $P(Z(N))$, $M_n = Q_nN = Q_nM$. Тогда M_n – бесконечный фактор, то есть имеет один из типов I_∞, II_∞ или III, $n = 1, 2, \ldots, m$, при этом $M = \sum_{n=0}^{m} M_n$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть M есть прямая сумма $\sum_{n=0}^{m} M_n$, где M_0 – конечная алгебра фон Неймана, а M_n – факторы одного из типов I_∞, II_∞ или III, $n = 1, 2, \ldots, m$. Обозначим через Q_n единицу в M_n, $n = 0, 1, \ldots, m$.

Предположим, что $T \in LS(M)$ и $\{Z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset P(Z(M))$ – такая последовательность, что $Z_k \uparrow I$ и $TZ_k \in S(M)$, $k = 1, 2, \ldots$. Так как M_n, $n = 1, 2, \ldots, m$, – факторы, то найдется такой номер k_0, что $Q_nZ_k = Q_n$ при всех $k \geq k_0$, $n = 1, 2, \ldots, m$. В частности, $T(I - Q_0) = \sum_{n=1}^{m} TQ_n = \sum_{n=1}^{m} TZ_{k_0}Q_n \in S(M)$. Так как Q_0 – конечный центральный проектор, то, очевидно, $TQ_0 \in S(M)$ (поскольку $LS(Q_0M) = S(Q_0M)$). Следовательно, $T = TQ_0 + T(I - Q_0) \in S(M)$. Это означает, что $LS(M) = S(M)$. $\square$

Отметим еще одно важное свойство $*$-алгебр $LS(M)$.

Предложение 5 [11]. *Пусть алгебра фон Неймана M есть C^*-произведение алгебр фон Неймана M_i, $i \in I$, где I некоторое множество индексов, т.е. $M = \prod\limits_{i\in I} M_i = \{\{T_i\}_{i\in I} : T_i \in M_i,\ i \in I,$ $\sup\limits_{i\in I} \|T_i\|_{M_i} < \infty\}$ с покоординатными алгебраическими операциями и инволюцией и C^*-нормой $\|\{T_i\}_{i\in I}\|_M = \sup\limits_{i\in I} \|T_i\|_{M_i}$. Тогда $*$-алгебра $LS(M)$ $*$-изоморфна $*$-алгебре $\prod\limits_{i\in I} LS(M_i)$ (алгебраические операции и инволюция в $\prod\limits_{i\in I} LS(M_i)$ – покоординатные).* $\square$

Заметим, что для алгебр $S(M)$ аналог предложения 5 не верен. Действительно, пусть M_n – факторы типа III, $n = 1, 2, \ldots$, и M – их C^*-произведение. Тогда $S(M) = M$ и $LS(M_n) = S(M_n) = M_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Кроме того, согласно предложению 4, $LS(M) \neq S(M) = M$. Поэтому, в силу предложения 5,

$$\prod_{n=1}^{\infty} S(M_n) = \prod_{n=1}^{\infty} LS(M_n) = LS(M) \neq S(M).$$

В следующей теореме даются необходимые и достаточные условия совпадения $*$-алгебр $LS(M)$ и M.

Теорема 3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *$LS(M) = M$;*

(ii) *M представима в виде прямой суммы $M = \sum\limits_{n=1}^{m} M_n$, где M_n – факторы типа I или типа III, $n = 1, 2, \ldots, m$ (m – натуральное число, некоторые из слагаемых могут отсутствовать).*

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$. Предположим, что булева алгебра $P(Z(M))$ всех проекторов из центра $Z(M)$ алгебры фон Неймана M содержит бесконечное число элементов. Тогда существует такая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(M))$, что $Z_n Z_m = 0$ при $n \neq m$ и $\sup\limits_{n\geq 1} Z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} Z_n = I$.

Положим $M_n = Z_n M$. Известно, что C^*-произведение алгебр фон Неймана M_n совпадает с M и потому, согласно предложению 5,

$$\prod_{n=1}^{\infty} LS(M_n) = LS(M) = M.$$

Однако элемент $T=\{nZ_n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит $*$-алгебре $\prod\limits_{n=1}^{\infty} LS(M_n)$, но не принадлежит M.

Следовательно, булева алгебра $P(Z(M))$ содержит только конечное число элементов.

Пусть $\{Q_n\}_{n=1}^{m}$ множество всех атомов в $P(Z(M))$ и $M_n = Q_nM$, $n = 1,2,\dots,m$. Так как Q_n – атом в $P(Z(M))$, то из равенства $Z(M_n) = Q_nZ(M) = Q_n\mathbf{C}$ следует, что M_n – фактор ($n = 1,2,\dots,m$), при этом M есть прямая сумма $\sum\limits_{n=1}^{m} M_n$.

Если для некоторого n фактор M_n имеет тип II, то $LS(M_n) = S(M_n) \neq M_n$ (см предложение 2).

Поэтому, в силу предложения 5, получаем, что

$$LS(M) = \prod_{n=1}^{m} LS(M_n) \neq \prod_{n=1}^{m} M_n = M.$$

Следовательно, M_n либо факторы типа I, либо типа III для всех $n = 1,2,\dots,m$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть M есть прямая сумма $\sum\limits_{n=1}^{m} M_n$, где M_n – факторы либо типа I, либо типа III, $n = 1,2,\dots,m$.

Тогда $LS(M_n) = S(M_n) = M_n$ для всех $n = 1,2,\dots,m$ и потому

$$LS(M) = \prod_{n=1}^{m} LS(M_n) = \prod_{n=1}^{m} M_n = M.$$

$\square$

Определим в $LS_h(M) = \{T \in LS(M) : T = T^*\}$ частичный порядок, полагая $T \leq S \Leftrightarrow (S-T)$ – положительно определенный оператор.

Подалгебра $\mathcal{A}$ в $LS(M)$ называется *заполненной*, если из соотношений

$$0 \leq T \leq S \in \mathcal{A}, \quad T \in LS(M)$$

следует, что $T \in \mathcal{A}$.

Предложение 6. (i) *Пусть T и S – самосопряженные операторы из $LS(M)$, $0 \leq T \leq S$ и $S \geq I$. Тогда существует единственный оператор $A \in M$, такой что $\|A\| \leq 1$ и $T^{\frac{1}{2}} = AS^{\frac{1}{2}}$;*

(ii) *алгебра $S(M)$ является заполненной подалгеброй алгебры $LS(M)$.*

Доказательство. (i) Согласно неравенству $(S\xi,\xi) \geq (\xi,\xi)$, $\xi \in D = D(T)\bigcap D(S)$, получим, что $\overline{S^{\frac{1}{2}}(D)} = H$. Зададим линейное отображение B из $S^{\frac{1}{2}}(D)$ в H, полагая $B(S^{\frac{1}{2}}\xi) = T^{\frac{1}{2}}\xi$, $\xi \in D$.

Для каждого $\xi \in D$

$$\|B(S^{\frac{1}{2}}\xi)\|^2 = \|T^{\frac{1}{2}}\xi\|^2 = (T^{\frac{1}{2}}\xi, T^{\frac{1}{2}}\xi) = (T\xi,\xi) \leq (S\xi,\xi) = \|S^{\frac{1}{2}}\xi\|^2.$$

Следовательно, B – непрерывный линейный оператор, определенный на $S^{\frac{1}{2}}(D)$, и $\|B\| \leq 1$. Обозначим через A непрерывное продолжение B на H. Тогда $A \in B(H)$, $\|A\| \leq 1$ и $T^{\frac{1}{2}}\xi = AS^{\frac{1}{2}}\xi$ для всех $\xi \in D$. Так как подпространство $S^{\frac{1}{2}}(D)$ всюду плотно в H, то такой оператор A единственный. Если U – унитарный оператор из коммутанта M', то $U^{-1}\xi \in D$ и $T^{\frac{1}{2}}\xi = UAS^{\frac{1}{2}}U^{-1}\xi = UAU^{-1}S^{\frac{1}{2}}\xi$. Следовательно, $A = UAU^{-1}$, т.е. $A \in M$.

(ii) Пусть $0 \leq T \leq S \in S(M)$, $T \in LS(M)$. В силу пункта (i) существует такой оператор $A \in M$, что $T^{\frac{1}{2}} = A(S+I)^{\frac{1}{2}}$. Ясно, что $(S+I)^{\frac{1}{2}} \in S(M)$, поэтому $T^{\frac{1}{2}} \in S(M)$ и, следовательно, $T \in S(M)$. □

4. ∗-алгебра τ-измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана

Пусть M – полуконечная алгебра фон Неймана и τ – точный нормальный полуконечный след на M.

Линейное подпространство D в H называется τ-плотным, если

1) $D\,\eta\, M$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой проектор $P \in P(M)$, что $P(H) \subset D$ и $\tau(P^{\perp}) \leq \varepsilon$.

Замкнутый линейный оператор T с областью определения $D(T) \subset H$ называется *τ-измеримым относительно алгебры фон Неймана M*, если $T\,\eta\, M$ и его область определения $D(T)$ τ-плотна в H.

Заметим, что если D – τ-плотное подпространство в H, то существует такая последовательность проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$, что $P_n \uparrow I$, $P_n(H) \subset D$ и $\tau(P_n^{\perp}) \to 0$ при $n \to \infty$.

Это означает, что любое τ-плотно подпространство в H является сильно плотным в H. Поэтому каждый τ-измеримый относительно алгебры фон Неймана M оператор T является измеримым.

Сформулируем критерий τ-измеримости, аналогичный предложениям 1 и 3.

Предложение [7]. *Пусть T – замкнутый оператор в H, $T\,\eta\,M$, $T = U|T|$ – полярное разложение T, $\{E_\lambda\}$ – спектральное семейство проекторов для $|T|$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Тогда $T \in S(M,\tau)$ в том и только в том случае, когда область определения $D(T)$ оператора T плотна в H и $\tau(E_\lambda^\perp) < \infty$ для некоторого $\lambda > 0$.* □

Обозначим через $S(M,\tau)$ множество всех линейных операторов в H, τ-измеримых относительно алгебры фон Неймана M.

Ясно, что $M \subset S(M,\tau) \subset S(M) \subset LS(M)$. Повторяя доказательство предложения 6(i), получим, что $S(M,\tau)$ является заполненной $*$-подалгеброй в $S(M)$.

Обозначим через $S_0(M,\tau)$ множество всех таких τ-измеримых операторов T, для которых при любом $\varepsilon > 0$ существует такой проектор $P \in P(M)$, что $\tau(P^\perp) < \infty$, $TP \in M$, $\|TP\| < \varepsilon$. В [3] показано, что $T \in S_0(M,\tau)$ тогда и только тогда, когда $T \in S(M,\tau)$ и $\tau(E_\lambda^\perp) < \infty$ для всех $\lambda > 0$, где $\{E_\lambda\}$ – спектральное семейство проекторов для $|T|$.

Замечание 1. (i) Если $\tau(I) < \infty$ (т.е. след τ конечен), то

$$S_0(M,\tau) = S(M,\tau) = S(M) = LS(M).$$

(ii) Если $\tau(I) = \infty$, то I не принадлежит $S_0(M,\tau)$, в частности, $S_0(M,\tau) \neq S(M,\tau)$.

(iii) Если $T \in S_0(M,\tau)$, $A \in M$, то $TA, AT \in S_0(M,\tau)$ [3].

(iv) Если M – фактор типа I и τ – точный нормальный полуконечный след на M, то $M = S(M,\tau) = S(M) = LS(M)$.

(v) Пусть M – фактор типа II_∞, τ – точный нормальный полуконечный след на M. Тогда $\tau(P) < \infty$ в том и только в том случае, когда P – конечный проектор. Поэтому из предложений 1 и 7 следует, что $M \neq S(M,\tau) = S(M)$.

Повторяя доказательство предложения 6(ii) и используя замечание 1(iii), получим, что $S_0(M,\tau)$ является заполненной $*$-подалгеброй в $LS(M)$.

Обозначим через $\mathrm{Tr}(M)$ множество всех точных нормальных полуконечных следов на алгебре фон Неймана M. Как уже отмечалось, $M \subset S(M,\tau) \subset S(M)$ для всех $\tau \in \mathrm{Tr}\,(M)$, в частности, $M \subset \bigcap\limits_{\tau \in \mathrm{Tr}\,(M)} S(M,\tau) \subset \bigcup\limits_{\tau \in \mathrm{Tr}\,(M)} S(M,\tau) \subset S(M)$.

Если M – фактор типа II_∞, то $\mathrm{Tr}\,(M) = \{\alpha\mu : \alpha \in (0,+\infty)\}$, где μ – некоторый фиксированный точный нормальный полуконечный след на M. Поэтому $S(M,\tau) = S(M,\mu)$ для всех $\tau \in \mathrm{Tr}\,(M)$ и, в силу примера 1, $M \neq S(M,\mu) = \bigcap\limits_{\tau \in \mathrm{Tr}\,(M)} S(M,\tau)$.

В следующем примере указывается алгебра фон Неймана M, для которой включение $\bigcup\limits_{\tau \in \mathrm{Tr}\,(M)} S(M,\tau) \subset S(M)$ также является строгим.

Замечание 3. Пусть M – коммутативная алгебра фон Неймана, являющаяся C^* – произведением континуального числа экземпляров алгебры фон Неймана $L_\infty([0,1],m)$ всех ограниченных измеримых комплексных функций, заданных на отрезке $[0,1]$ с линейной мерой Лебега m (равные почти всюду функции отождествляются), т.е. $M = \prod\limits_{j \in J} M_j$, $M_j = L_\infty([0,1],m)$ для всех $j \in J$, $\mathrm{card}\,J = \mathrm{card}\,[0,1]$. Для каждого $x = \{x_j\}_{j\in J} \in M$, $x \geq 0$, положим $\mu(x) = \sum\limits_{j\in J} \int\limits_0^1 x_i dm$. Ясно, что μ – точный нормальный полуконечный след на M. Будем считать, что M действует в гильбертовом пространстве $H = L_2(M,\mu) = (\{\xi_j\}_{j\in J} : \xi_j \in L_2([0,1],m), \sum\limits_{j\in J} ||\xi_j||^2 < \infty)$ по правилу $\{x_j\}_{j\in J}(\{\xi_j\}_{j\in J}) = \{x_i\xi_j\}_{j\in J}, \{\xi_j\}_{j\in J} \in H$. Разобьем множество J на счетное число попарно непересекающихся подмножеств $J_n, n = 1,2,\ldots$, и положим $E_n = \{P_j\}_{j\in J} \in P(M)$, где $P_j = 1$ при $j \in J_n$ и $P_j = 0$ при $j \in J \setminus J_n$. Ясно, что $E_nE_k = 0$ при $n \neq k$, $\sup\limits_{n\geq 1} E_n = I$ и E_n не является проектором счетного типа (напомним, что проектор E имеет счетный тип, если любое семейство ненулевых попарно ортогональных проектров в $P(EME)$ не более чем счетно). Положим $Z_n = \sup\limits_{k\leq n} E_k$. Так же, как и в примере 2, определим линейный оператор T на всюду плотном линейном подпространстве $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n(H)$, полагая $T\xi = n\xi$ для всех $\xi \in E_n(H)$, $n = 1,2,\ldots$. Тогда замыкание $\overline{T}$ оператора T является положительно определенным оператором, присоединенным к M, причем спектральный проектор для $\overline{T}$, отвечающий $\lambda = n$, совпадает с Z_n. Поскольку M – коммутативная алгебра фон Неймана, то M конечна, и поэтому $\overline{T} \in S(M)$ (см предложение 1). Предположим, что существует $\tau \in \mathrm{Tr}\,(M)$, для которого $\overline{T} \in S(M,\tau)$. Тогда, в силу предложения 7, найдется такое n, что $\tau(Z_n^{\perp}) < \infty$. Так как $Z_n^{\perp} = \sup\limits_{k>n} E_k$, то $\tau(E_{n+1}) < \tau(Z_n^{\perp}) < \infty$, что влечет счетность типа проектора E_{n+1}. Из полученного противоречия следует, что $\overline{T}$ не принадлежит $S(M,\tau)$, и потому $\bigcup\limits_{\tau \in \mathrm{Tr}\,(M)} S(M,\tau) \neq S(M)$. □

Рассмотрим теперь связь между алгебрами $S(M,\tau_1)$ и $S(M,\tau_2)$ для различных следов $\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{Tr}\,(M)$. Для каждого $\tau \in \mathrm{Tr}\,(M)$ положим $P(M,\tau) = \{P \in P(M) : \tau(P) < \infty\}$.

Предложение 8. *Для $\tau_j \in \mathrm{Tr}\,(M)$, $j = 1, 2$, следующие условия эквивалентны:*

(i) $S(M,\tau_1) \subset S(M,\tau_2)$*;*

(ii) $P(M,\tau_1) \subset P(M,\tau_2)$*.*

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$. Пусть $S(M,\tau_1) \subset S(M,\tau_2)$. Предположим, что существует такой проектор $P \in P(M)$, что $\tau_1(P) = \infty$ и $\tau_2(P) < \infty$. Поскольку след τ_1 полуконечен, найдется такая возрастающая последовательность проекторов E_n, что $\tau_1(E_n) < \infty$, $\sup\limits_{n\geq 1} E_n = E \leq P$, $\tau_1(E) = \infty$; в частности, $E_n \neq E$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Так же, как и в примере 1, определим линейный оператор T на всюду плотном линейном подпространстве $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n(H)$, полагая $T\xi = n\xi$ для всех $\xi \in (P_n - P_{n-1})(H)$, где $P_n = E^{\perp} + E_n, n = 1, 2, \ldots, P_0 = 0$. Как показано в примере 1, положительно определенный оператор $\overline{T}$ является измеримым оператором, при этом спектральный проектор для $\overline{T}$, отвечающий $\lambda = n$, совпадает с P_n. Поскольку $\tau_1(P_n^{\perp}) = \tau_1(E - E_n) = \infty, \tau_2(P_n^{\perp}) \leq \tau_2(P) < \infty, n = 1, 2, \ldots$, то $\overline{T} \in S(M,\tau_2) \setminus S(M,\tau_1)$, что противоречит включению $S(M,\tau_1) \subset S(M,\tau_2)$. Следовательно, $P(M,\tau_1) \subset P(M,\tau_2)$.

Импликация $(ii) \Rightarrow (i)$ следует непосредственно из предложения 7. □

Из предложения 10 вытекает, что если $\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{Tr}\,(M)$, то $S(M,\tau_1) = S(M,\tau_2) \Leftrightarrow P(M,\tau_1) = P(M,\tau_2)$.

Заменяя в доказательстве предложения 10 условие $\tau_2(P) < \infty$ на условие P – *конечный проектор* и используя предложения 5 и 7, получим следующее предложение.

Предложение 9. *Для* $\tau \in \mathrm{Tr}(M)$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $S(M) = S(M, \tau)$;

(ii) $P(M, \tau) = \{P \in P(M) : P$ – *конечный проектор*$\}$.

Литература

1. I. E. Segal, *A noncommutative extension of abstract integration.* — Ann. Math. **57** (1953), 401–457.
2. E. Nelson, *Notes on non-commutative integration.* — J. Funct. Anal. **15** (1974), 103–116.
3. F. J. Yeadon, *Non-commutative L^P-spaces.* — Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **77** (1975), 91–102.
4. T. Fack, H. Kosaki, *Generalized s-numbers of τ-mesaurable operators.* — Pacific J. Math. **123** (1986), 269–300.
5. P. G. Dixon, *Unbounded operator algebras.* — Proc. London Math. Soc. **23** (1971), 53–59.
6. S. Sankaran, *The $*$-algebra of unbounded operators.* — J. London Math. Soc. **34** (1959), 337–344.
7. F. J. Yeadon, *Convergence of measurable operators.* — Proc. Camb. Phil. Soc. **74** (1973), 257–268.
8. Б. С. Закиров, В. И. Чилин, *Абстрактная характеризация EW^*-алгебр.* — Функц. анал. и его прилож. **25** (1991), 76–78.
9. S. Stratila, L. Zsido, *Lectures on von Neumann algebras.* — Abacus Press (1979).
10. M. Takesaki, *Theory of operator algebras. I.* — New York, Springer (1979).
11. K. Saito, *On the algebra of measurable operators for a general AW^*-algebra. II.* — Tohoku. Math. J. **23** (1971), 525–534.

Muratov M. A., Chilin V. I. *-algebras of unbounded operators affiliated with a von Neumann algebra.

In the paper, the $*$-algebras of measurable operators, locally measurable operators, and τ-measurable operators associated with von Neumann algebra M are considered. Conditions under which some of these algebras coincide are given.

Таврический национальный
университет им. В. И. Вернадского,
г. Симферополь, Крым, Украина

E-mail: kromsh@crimea.com

Поступило 15 апреля 2005 г.

Национальный университет
Узбекистана т. Ташкент

E-mail: chilin@ucd.uz