Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 326, 2005 г.

З. И. Бежаева, В. И. Оселедец

МЕРЫ ЭРДЁША, СОФИЧЕСКИЕ МЕРЫ И МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ

1. Введение

Эрдёш более 60 лет назад поставил следующую задачу: какой может быть функция F распределения случайной величины $\zeta = \xi_1\rho + \xi_2\rho^2 + \ldots$, где $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – независимые и одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения 0, 1, и $P(\xi_i = 0) = P(\xi_i = 1) = 0.5$, $0 < \rho < 1$. Для самого интересного случая $\rho > 0.5$ носитель распределения есть отрезок $[0, \rho/1-\rho]$.

Согласно теореме Джессена–Винтнера 1935 года распределение случайной величины ζ либо абсолютно непрерывно, либо чисто сингулярно, т.е. смешанный случай невозможен. Один из главных вопросов – это вопрос о том, когда имеет место сингулярность, а когда мера абсолютно непрерывна.

Б. Соломяк в 1995 году доказал, что для почти всех $\rho > 0.5$ (кроме множества лебеговой меры 0) случайная величина ζ абсолютно непрерывна. Эрдёш в 1939 году доказал, что если $\beta = 1/\rho$ – число Пизо, то распределение ζ сингулярно. Например, если $\rho + \rho^2 = 1$, т.е. β – золотое сечение, то распределение ζ сингулярно.

Задача об эргодических свойствах распределения ζ для случая золотого сечения была поставлена А. М. Вершиком и подробно разобрана в [1].

В нашей работе эта задача изучается для стационарной марковской цепи $\xi_1, \xi_2, \ldots$, причем сперва мы изучаем более простой случай независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, $P(\xi_i = 0) = p_0$, $P(\xi_i = 1) = p_1$, $0 < p_0 < 1$.

Значения случайной величины $\rho\zeta$ принадлежат отрезку [0,1], а ее функция распределения равна $F(\beta x)$. Воспользуемся тем, что любое число из отрезка $[0,1]$ однозначно (за исключением счетного множества) записывается в виде разложения Фибоначчи $x_1\rho + x_2\rho^2 + \ldots$, где $x_k = 0,1$ и $x_kx_{k+1} = 0$. Имеем: $\rho\zeta = \eta_1\rho + \eta_2\rho^2 + \ldots$, где случайные величины $\eta_k = 0,1$ и $\eta_k\eta_{k+1} = 0$.

Компактом Фибоначчи мы называем множество всех бесконечных двоичных слов, в которых две единицы не встречаются рядом. Это множество компактно относительно метрики $d(x,y) = \rho^{n(x,y)}$, где $n(x,y)$ – длина наибольшего общего начала слов x и y.

Бесконечное случайное слово $\eta = \eta_1\eta_2\ldots\eta_n\ldots$ принимает значения в компакте Фибоначчи и задает на нем меру $\mu(A) = P(\eta \in A)$. Эту меру (следуя [1]) мы будем называть мерой Эрдёша на компакте Фибоначчи.

В [1] было доказано, что для $p_0 = 0.5$ существует эргодическая T-инвариантная мера ν $(\nu(T^{-1}A) = \nu(A))$ на компакте Фибоначчи (сдвиг T задается формулой: $T(x_1x_2x_3\ldots) = x_2x_3\ldots$), относительно которой мера Эрдёша абсолютно непрерывна. Меру ν мы будем называть инвариантной мерой Эрдёша. Эргодические свойства этой меры изучались в [1].

Здесь мы докажем, что обе меры возникают при склейке состояний в марковской цепи с состояниями 1,2,3,4,5 и матрицей переходных вероятностей

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть склейка состояний задана функцией $f : f(1) = f(2) = f(3) = 0,\ f(4) = f(5) = 1$. Рассмотрим две марковские цепи. Марковская цепь $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ с переходной матрицей P имеет начальное распределение (2/3, 0, 0, 0,1/3) и марковская цепь $\beta_1, \beta_2, \ldots$ с той же переходной матрицей имеет стационарное распределение (4/9,2/9,1/18,1/9,1/6). Тогда случайное бесконечное двоичное слово $f(\alpha) = f(\alpha_1)f(\alpha_2)\ldots$ имеет распределение μ, а случайное бесконечное слово $f(\beta) = f(\beta_1)f(\beta_2)\ldots$ имеет распределение ν,

$$P(f(\alpha) \in A) = \mu(A), \quad P(f(\beta) \in A) = \nu(A).$$

Таким образом, меры Эрдёша – софические меры в терминологии [3].

Так как стационарная марковская цепь с переходной матрицей P регулярна (граф переходов цепи сильно связный и апериодический), то сдвиг S в пространстве ее реализаций – точный в смысле Рохлина, а двусторонний сдвиг, соответственно, –

K-автоморфизм, изоморфный автоморфизму Бернулли. Поскольку $Tf = fS$, где f – указанное выше отображение бесконечных слов, то сдвиг T – точный эндоморфизм относительно меры ν, а соответствующий двусторонний сдвиг есть K-автоморфизм, изоморфный автоморфизму Бернулли.

Из вышесказанного получается новое "эргодическое" доказательство сингулярности функции распределения $F(x)$ (другое "эргодическое" доказательство см. в [1]). Действительно, хорошо известно, что мера Лебега, "поднятая на компакт Фибоначчи" (возьмем случайную величину, чье распределение есть мера Лебега на [0,1], и рассмотрим распределение бесконечного случайного слова из ее знаков разложения Фибоначчи) есть марковская мера на этом компакте, отличающаяся от марковской меры с максимальной энтропией только начальным распределением. Эти начальные распределения имеют вид $(\rho, \rho^2), (1/1+\rho^2, \rho^2/1+\rho^2)$ сответственно. Поскольку марковская мера с максимальной энтропией эргодична и, как указано выше, инвариантная мера Эрдёша эргодична, то эти две меры либо совпадают, либо сингулярны. Но одномерное распределение для инвариантной меры Эрдёша легко вычисляется по матрице R и равно (13/18, 5/18), поэтому совпасть меры не могут. Таким образом получается еще одно доказательство упомянутого выше результата Эрдёша о сингулярности распределения случайной величины ζ.

Все результаты верны для схемы Бернулли: $P(\xi_k = i) = p_i$, $i = 0, 1$, $0 < p_0 < 1$.

Переходная матрица имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & 0 & 0 & p_0 p_1 & p_1^2 \\ p_0 & 0 & p_0 p_1 & 0 & p_1^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Склейка состояний задается той же функцией склейки f, что и выше.

В конце статьи рассмотрен марковский случай, когда $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k, \dots$ – стационарная марковская цепь с состояниями 0, 1 и переходной матрицей

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 1-q \\ t & 1-t \end{pmatrix}, \quad 0 < q < 1, \quad 0 < t < 1.$$

Мы докажем, что распределение ζ сингулярно, кроме случаев $q=\rho$, $t=\rho^2$ и $q=\rho^2$, $t=\rho$. Меры Эрдёша возникают при склейке состояний в регулярной марковской цепи с 7 состояниями.

Предложенный нами метод работает и в общем случае, когда β – число Пизо. Понятия меры Эрдёша и инвариантной меры Эрдёша также могут быть определены. В частности, обе эти меры – софические. При этом последовательность $\xi_1,\ldots,\xi_n,\ldots$ может быть стационарной марковской цепью любого порядка.

2. Вывод основных уравнений

Мы используем вариант матричного метода Добеши-Лагариаса (см. [2, глава 7]). Он основан на следующем основном уравнении для функции распределения $F(x)=P(\zeta<x)$:

$$F(x)=p_0F(\beta x)+p_1F(\beta x-1).$$

Действительно, $\zeta=\rho\xi_1+\rho\zeta'$, где ζ' распределена так же, как ζ, причем ζ' и ξ_1 независимы. Поэтому

$$\begin{aligned}P(\zeta<x)&=P(\rho\xi_1+\rho\zeta'<x)=P(\zeta'<\beta x-\xi_1)=\\&=p_0P(\zeta'<\beta x)+p_1P(\zeta'<\beta x-1),\end{aligned}$$

что и дает приведенное выше уравнение для $F(x)$. Будет удобнее рассматривать элемент меры $dF(x)$ вместо $F(x)$. Напомним еще, что $\beta=1+\rho$, $1=\rho+\rho^2$.

Введем обозначение

$$Vx=\{\beta x\}=\begin{cases}\beta x, & x\in(0,\rho)\\ \beta x-1, & x\in(\rho,1)\end{cases}.$$

Сначала рассмотрим случай, когда $x\in(0,\rho)$. Тогда

$$dF(x)=p_0dF(Vx)+p_1dF(Vx-1)=p_0dF(\beta x),$$

$$dF(x+\rho)=p_0dF(Vx+1)+p_1dF(Vx),$$

$$dF(x+1)=p_0dF(Vx+1+\rho)+p_1dF(Vx+\rho)=p_1dF(Vx+\rho).$$

Для случая $x\in(\rho,1)$

$$dF(x)=p_0dF(Vx+1)+p_1dF(Vx),$$

$$dF(x+\rho)=p_0dF(Vx+2)+p_1dF(Vx+1)=p_1dF(Vx+1),$$

$$dF(x+1)=0.$$

Рассмотрим вектор

$$d\overline{F}(x)=\begin{pmatrix} dF(x) \\ dF(x+\rho) \\ dF(x+1) \end{pmatrix}.$$

Введем две матрицы

$$M_0=\begin{pmatrix} p_0 & 0 & 0 \\ p_1 & 0 & p_0 \\ 0 & p_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1=\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_0 \\ 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда очевидно, что

$$d\overline{F}(x)=M_0 d\overline{F}(Vx), \quad x\in(0,\rho),$$

$$d\overline{F}(x)=M_1 d\overline{F}(Vx), \quad x\in(\rho,1).$$

Преобразование $Vx=\{\beta x\}$ – дробная часть числа βx – тесно связано с системой счисления Фибоначчи, в которой за основание берется золотое сечение и о которой уже, фактически, шла речь выше.

Обозначим через x_1 индикатор отрезка $[\rho,1]$, тогда знаки Фибоначчи числа x равны $x_n=x_1(V^{n-1}x)$, $x=x_1\rho+x_2\rho^2+\dots$. После перехода от числа x к его коду Фибоначчи $x_1x_2,\dots,x_n,\dots$ преобразование V переходит в преобразование сдвига T бесконечных двоичных слов Фибоначчи, которое сводится к затиранию первой буквы слова.

Два предыдущих соотношения можно записать аналогично формуле Добеши–Лагариаса (см. [2, §7.2]) в виде

$$d\overline{F}(x)=M_{x_1}d\overline{F}(Vx),\ x\in[0,1].$$

Это уравнение допускает явное решение в следующем смысле: конечное слово Фибоначчи $a=x_1,x_2,\dots,x_n$ (двоичное слово, где нет подслов вида 11) определяет отрезок $\delta(a)$ как совокупность всех чисел, разложение Фибоначчи которых начинается с этого слова. Тогда из предыдущей формулы следует, что векторная мера

$$\overline{F}(\delta(a))=\int\limits_{\delta(a)} d\overline{F}(x)=\overline{\mu}(a)=\overline{\mu}(x_1x_2\dots x_n)$$

при всех $n \geq 2$ удовлетворяет соотношению

$$\overline{\mu}(x_1, x_2, \dots, x_n) = M_{x_1}\overline{\mu}(x_2 \dots x_n) = M_{x_1}, M_{x_2}, \dots, M_{x_{n-1}}\bar{\mu}(x_n).$$

При $n = 1$

$$\overline{\mu}(x_1) = \int\limits_{\delta(x_1)} d\overline{F}(x) = M_{x_1} \int\limits_{\delta(x_1)} d\overline{F}(Vx).$$

Отсюда

$$\overline{\mu}(0) = \overline{F}(\rho) - \overline{F}(0) =$$

$$= M_0 \int\limits_{[0,\rho]} d\overline{F}(\beta x) = M_0(\overline{F}(1) - \overline{F}(0)),$$

$$\overline{\mu}(1) = \overline{F}(\rho) - \overline{F}(1) = M_1 \int\limits_{[\rho,1]} d\overline{F}(\beta x - 1) = M_1(\overline{F}(\rho) - \overline{F}(0)).$$

Введем векторы

$$r(0) = \overline{\mu}(0) + \overline{\mu}(1), \quad r(1) = \overline{\mu}(0).$$

Тогда $\overline{\mu}(0) = M_0 r(0)$, $\overline{\mu}(1) = M_1 r(1)$. То есть для любого слова из одной буквы $\overline{\mu}(x_1) = M_{x_1} r(x_1)$. Отсюда при любом $n \geqslant 1$

$$\overline{\mu}(x_1 x_2 \dots x_n) = M_{x_1}, M_{x_2}, \dots, M_{x_n} r(x_n).$$

Блочный вектор-столбец

$$r = \begin{pmatrix} r(0) \\ r(1) \end{pmatrix}$$

несложно вычислить. Действительно,

$$r(0) = M_0 r(0) + M_1 r(1), \qquad r(1) = M_1 r(1).$$

Определим матрицы $M(i,j)$, $i,j \in \{1,2\}$: $M(1,1) = M(2,1) = M_0$, $M(1,2) = M_1$, $M(2,2) = 0$ и запишем предыдущее соотношение в виде $r = Mr$, где M – блочная матрица:

$$M = \begin{pmatrix} M_0 & M_1 \\ M_0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M(0,0) & M(0,1) \\ M(1,0) & M(1,1) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, r – собственный вектор матрицы M с собственным значением 1. Заметим еще, что 1 – спектральный радиус матрицы M и простое собственное значение этой матрицы.

Легко проверить, что вектор-столбец R, задаваемый соотношением

$$R^T = (R(0), \quad R(1)) = (p_0, p_1, p_1^2, p_0^2, p_0p_1 + p_0p_1^2, p_1^2),$$

есть собственный вектор матрицы M с собственным значением 1. Вектор r пропорционален вектору R.

Напомним формулу для меры $\overline{\mu}$:

$$\overline{\mu}(x_1, x_2, \dots, x_n) = M_{x_1}, M_{x_2}, \dots, M_{x_n} r(x_n).$$

Из этой формулы мы получим формулу для меры Эрдёша μ.

Вспомним, что функция распределения для меры Эрдёша на отрезке [0,1] равна $F(\beta x)$. Из этого следует, что мера Эрдёша всех слов $\delta(x_1, \dots, x_n)$, начинающихся с конечного слова $x_1, \dots, x_n$, равна

$$\mu(x_1, \dots, x_n) = \int\limits_{\delta(x_1,\dots,x_n)} dF(\beta x).$$

Отсюда

$$\mu(0, x_2, \dots, x_n) = \int\limits_{\delta(0,x_2,\dots,x_n)} dF(Vx) = \int\limits_{\delta(x_2,\dots,x_n)} dF(x) =$$

$$= \int\limits_{\delta(x_2,\dots,x_n)} e_1 d\overline{F}(x) = e_1\overline{\mu}(x_2, \dots, x_n) = e_1 M_{x_2} \dots M_{x_n} r(x_n),$$

где $e_1 = (1, 0, 0)$.

Аналогично

$$\mu(1, x_2, \dots, x_n) = \int\limits_{\delta(1,x_2,\dots,x_n)} dF(\beta x) = \int\limits_{\delta(1,x_2,\dots,x_n)} dF(Vx + 1) =$$

$$= \int\limits_{\delta(x_2,\dots,x_n)} dF(x + 1) = e_3\overline{\mu}(x_2, \dots, x_n) = e_3 M_{x_2} \dots M_{x_n} r(x_n),$$

где $e_3 = (0, 0, 1)$. Поэтому

$$\mu(x_1, x_2, \dots, x_n) = l(x_1)M(x_1, x_2) \dots M(x_{n-1}, x_n)r(x_n), \quad n \geqslant 2,$$

где строка $l(x_1)$ равна $(1-x_1)e_1 + x_1 e_3$. Одномерное распределение $\mu(x_1)$ есть $l(x_1)r(x_1)$. Так как $\sum_{x_1} \mu(x_1) = 1$, то $lr = 1$, где $l = (l(0), l(1)) = (e_1, e_3) = (1, 0, 0, 0, 0, 1)$. Следовательно, $r = R/lR$.

Введем $R(0) := (lR)r(0), R(1) := (lR)r(1)$ и запишем формулу для меры Эрдёша в таком виде:

$$\mu(x_1, x_2, \dots, x_n) = l(x_1)M(x_1, x_2)\dots M(x_{n-1}, x_n)R(x_n)/(lR).$$

Как уже указывалось ранее, спектральный радиус матрицы M равен 1 и 1 – простое собственное число. По теореме Фробениуса существует левый неотрицательный собственный вектор $L = (L(0),\ L(1))$, где $L(0),\ L(1)$ – строки длины 3 этой матрицы с собственным значением 1.

Утверждение 1. *Мера ν, задаваемая формулой*

$$\nu(x_1 x_2 \dots x_n) = L(x_1)M(x_1, x_2)\dots M(x_{n-1}, x_n)R(x_n)/(LR),$$

является единственной эргодической инвариантной мерой на компакте Фибоначчи, относительно которой мера Эрдёша μ абсолютно непрерывна.

Инвариантность меры ν следует из соотношения

$$\sum_{x_1} \nu(x_1, x_2, \dots, x_n) = \nu(x_2, \dots, x_n),$$

которое в свою очередь следует из соотношения

$$\sum_{x_1} L(x_1)M(x_1, x_2) = L(x_2).$$

Абсолютная непрерывность меры Эрдёша относительно инвариантной меры Эрдёша будет доказана в §§3, 4. Эргодичность меры ν будет доказана в §4. Единственность очевидна, так как две эргодические меры либо совпадают, либо сингулярны.

3. Неотрицательные блочные матрицы и цепи Маркова

Здесь мы дадим определение меры $\mu_{M,\Theta,L}$. При этом M – неотрицательная квадратная матрица порядка $J \times J$. Буквой Θ обозначается разбиение множества $1, 2, E \dots J$ на d блоков

$$\Theta = \{B_1, \dots, B_d\},$$

$$B_1 = \{1, \dots, |B_1|\}, B_2 = \{|B_1| + 1, \dots, |B_1| + |B_2|\} \dots$$

$$\dots, B_d = \{|B_1 + \dots + B_{d-1}| + 1, \dots, J\},$$

$|B_j|$ – число элементов множества B_j. L – неотрицательная строка длины J.

Мы предполагаем, что $\lambda > 0$ – спектральный радиус матрицы M, неотрицательный столбец R – собственный вектор матрицы M с собственным значением λ (такой вектор существует по теореме Перрона–Фробениуса) и $LR > 0$.

Блочные элементы матрицы M будут обозначаться $M(i,j)$, $i,j \in (1, \dots, d)$, а обычные элементы – $m(i,j)$, $i,j \in (1, \dots, J)$. Заметим, что если $\Theta = \Gamma$, где Γ – разбиение на точки, то блочные элементы совпадают с обычными.

Пусть алфавит A_Θ состоит из чисел $1, 2, \dots, d$, где d – блочный порядок блочной матрицы M (иногда удобнее брать числа $0, 1, \dots, d-1$, в §4 мы возьмем $A_\Theta = \{0, 1\}$).

Для задания меры m на пространстве бесконечных слов X_Θ достаточно задать меры множества слов с любым фиксированным началом $a = x_1 \dots\dots x_n$.

Полученная таким образом неотрицательная функция $m(a)$ удовлетворяет следующим двум требованиям:

$$1. \qquad \sum_{a:|a|=n} m(a) = 1$$

для любого n (условие нормировки).

$$2. \qquad \sum_j m(aj) = m(a)$$

(условие согласованности).

Верно и обратное. По функции на словах конечной длины со свойствами 1, 2 однозначно определяется мера.

Для любого $a = (x_1, \dots, x_n)$ зададим функцию $m(a)$ следующим образом:

$$m(a) = L(x_1)M(x_1, x_2), \dots, M(x_{n-1}, x_n)R(x_n)/(\lambda^{n-1}LR), \quad n \geqslant 2,$$

$$m(x_1) = L(x_1)R(x_1)/(LR).$$

Непосредственная проверка показывает, что условия 1, 2 для этой функции выполнены и, следовательно, определена мера (которую мы и будем обозначать $\mu_{M,\Theta,L}$), задаваемая блочной матрицей M с блочным разбиением Θ и строкой L.

Определим сдвиг S_Θ в пространстве бесконечных слов X_Θ, который сопоставляет каждому бесконечному слову x слово $S_\Theta x$, получающееся из x затиранием первой буквы. Соответствующий сдвиг в пространстве бесконечных слов X_Γ будем обозначать S_Γ.

Мера называется инвариантной относительно сдвига, если мера прообраза любого измеримого множества равна мере этого множества.

Неотрицательная функция $m(a)$ задает инвариантную меру, если выполнены условия:

$$1. \qquad \sum_{a:|a|=n} m(a) = 1$$

$$2. \qquad \sum_{j} m(aj) = m(a)$$

$$3. \qquad \sum_{j} m(ja) = m(a).$$

Если L – левый собственный вектор матрицы M с собственным значением λ ($LM = \lambda L$), то мера $\mu_{M,\Theta,L}(a)$ удовлетворяет условиям 1, 2, 3 и, следовательно, является инвариантной мерой.

Утверждение 2. *Мера $\mu_{M,\Gamma,L}$ – марковская мера, т.е. буквы бесконечного случайного слова, чье распределение есть $\mu_{M,\Gamma,L}$, образуют марковскую цепь. Если строка L – левый собственный вектор матрицы M: $LM = \lambda L$, то мера $\mu_{M,\Gamma,L}$ инвариантна относительно сдвига S_Γ.*

Действительно, достаточно доказать, что если

$$\mu_{M,\Gamma,L}(x_1x_2,\ldots,x_n) > 0,$$

то $\mu_{M,\Gamma,L}(x_1x_2,\ldots,x_nx_{n+1})/\mu_{M,\Gamma,L}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ зависит лишь от x_n, x_{n+1}. Но это отношение равно $(1/\lambda)m(x_n,x_{n+1})R(x_{n+1})/R(x_n)$. Утверждение 2 доказано.

Заметим, что если вектор R положителен, то за переходную матрицу марковской цепи можно взять матрицу P с элементами $(1/\lambda)m(i,j)R(j)/R(i)$.

Пусть L – левый собственный вектор матрицы M с собственным значением λ. Рассмотрим однобуквенное слово $j \in A_\Gamma = \{1, \dots, J\}$. Будем называть букву j запрещенной, если $\mu_{M,\Gamma,L}(x : x_1 = j) = 0$. Назовем бесконечное слово допустимым, если в нем нет запрещенных букв. Множество допустимых слов представляет собой множество всех бесконечных слов из допустимых букв алфавита.

Мера $\mu_{M,\Gamma,L}$ множества всех допустимых слов равна 1. Мера $\mu_{M,\Gamma,L}$ – инвариантная марковская мера на множестве всех допустимых слов, которое мы снова будем обозначать символом X_Γ, но с уже другим Γ.

Новые алфавит и новые M, Γ, L, R получаются из исходного алфавита и старых M, Γ, L, R с помощью операции "затирания" и естественной перенумерации. Операция "затирания" заключается в удалении запрещеных букв из алфавита, в удалении из матрицы M строк и столбцов с запрещенными номерами, в удалении элементов строки L и столбца R с запрещенными номерами. Полученные строка и столбец являются левым и правым собственными векторами новой матрицы M с тем же самым собственным значением λ.

Зададим правило склейки f: $f(i) = j$, если

$$i \in B_j, i \in (1, \dots, J), j \in A_\Theta,$$

и продолжим его до отображения $f : X_\Gamma \to X_\Theta$:

$$f(x_1 \dots x_n \dots) = f(x_1) \dots f(x_n) \dots .$$

Утверждение 3.

$$fS_\Gamma = S_\Theta f,$$

$$\mu_{M,\Theta,L} = \mu_{M,\Gamma,L} f^{-1}.$$

Это утверждение следует почти непосредственно из определений.

Утверждение 4. *Если некоторая мера m абсолютно непрерывна относительно меры $\mu_{M,\Gamma,L}$, то мера mf^{-1} абсолютно непрерывна относительно меры $\mu_{M,\Gamma,L} f^{-1}$.*

Это утверждение очевидно.

Пусть $l = (l_1, \dots, l_J)$ и $L = (L_1, \dots, L_J)$ – неотрицательные строки длины J.

Утверждение 5. *Мера* $\mu_{M,\Gamma,l}$ *абсолютно непрерывна относительно меры* $\mu_{M,\Gamma,L}$ *тогда и только тогда, когда* $\{i : l_i > 0\} \subseteq \{i : L_i > 0\}$.

Утверждение 5 очевидно.

Следствие. *Если* $\{i : l_i > 0\} \subseteq \{i : L_i > 0\}$, *то мера* $\mu_{M,\Theta,l}$ *абсолютно непрерывна относительно меры* $\mu_{M,\Theta,L}$.

Это следствие вытекает из утверждений 4 и 5 и равенств

$$\mu_{M,\Theta,l} = \mu_{M,\Gamma,l} f^{-1}, \quad \mu_{M,\Theta,L} = \mu_{M,\Gamma,L} f^{-1}.$$

4. Бернуллиевский случай

Теперь введем квадратную блочную матрицу 6-го порядка (блочное разбиение $\Theta = (\{1,2,3\},\{4,5,6\})$

$$M = \begin{pmatrix} M_0 & M_1 \\ M_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что

$$M_0 = \begin{pmatrix} p_0 & 0 & 0 \\ p_1 & 0 & p_0 \\ 0 & p_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_0 \\ 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Спектральный радиус матрицы M равен 1. В качестве правого собственного вектора мы возьмем вектор R:

$$R^T = (R(0)^T, R(1)^T) = (p_0, p_1, p_1^2, p_0^2, p_0p_1 + p_0p_1^2, p_1^2).$$

В качестве левого собственного вектора мы возьмем вектор

$$L = (L(0), L(1)) = (1, p_1, p_0p_1, p_1, 0, p_0 + p_1^2).$$

Здесь удобно определить функцию склейки f формулой:

$$f(i) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant 3, \quad f(i) = 1, \quad 4 \leqslant i \leqslant 6.$$

Продолжим это отображение на бесконечные слова

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n \dots) = f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n) \dots .$$

Напомним, что это отображение (“буква в букву”) коммутирует со сдвигом, т.е. $S_\Theta f = S_\Gamma f$. Компакт Фибоначчи X есть подмножество $fX_\Gamma = X_\Theta$ и ограничение S_Θ на X есть T, сдвиг в пространстве бесконечных слов Фибоначчи.

Пусть $l = (1, 0, 0, 0, 0, 1)$, L – левый собственный вектор матрицы M. Заметим, что

$$\mu_{M,\Gamma,L}(f^{-1}X) = 1, \mu_{M,\Gamma,l}(f^{-1}X) = 1,$$

т.е.

$$\mu_{M,\Theta,L}(X) = 1, \mu_{M,\Theta,l}(X) = 1.$$

Поэтому мы можем говорить о мерах $\mu_{M,\Theta,l}$, $\mu_{M,\Theta,L}$ на X.

Утверждение 6. *Мера $\mu_{M,\Theta,l}$ на X совпадает с мерой Эрдёша на компакте Фибоначчи, а мера $\mu_{M,\Theta,L}$ совпадает с инвариантной мерой Эрдёша на компакте Фибоначчи.*

Это утверждение легко следует из формул для мер Эрдёша в конце параграфа 2 и определений мер $\mu_{M,\Theta,l}$, $\mu_{M,\Theta,L}$.

Мы затираем пятую строку и пятый столбец матрицы M (отвечающие пятой координате 0 строки L) и получаем матрицу N порядка 5×5

$$N = \begin{pmatrix} p_0 & 0 & 0 & p_1 & p_0 \\ p_1 & 0 & p_0 & 0 & p_1 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 \\ p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица N имеет блочную структуру,

$$N = \begin{pmatrix} N(0,0) & N(0,1) \\ N(1,0) & N(1,1) \end{pmatrix},$$

отвечающую разбиению Θ множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ на два блока $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5\}$. Теперь склейка задается правилом: все элементы первого блока переходят в 0, а элементы второго блока переходят в 1. Конечно, спектральный радиус матрицы N равен 1. Правый собственный вектор R имеет координаты

$$(p_0, p_1, p_1^2, p_0^2, p_1^2) = (R(0), R(1)),$$

левый собственный вектор L имеет координаты

$$(1, p_1, p_0 p_1, p_1, p_0 + {p_1}^2) = (L(0), L(1)).$$

Здесь используется блочная запись для векторов L, R. Теперь строка l имеет вид $(1, 0, 0, 0, 1)$.

Утверждение 7. *Мера на X, индуцированная отображением f : $X_\Gamma \to X_\Theta$ из марковской меры $\mu_{N,\Gamma,l}$, совпадает с мерой Эрдёша на компакте Фибоначчи X, а мера, индуцированная отображением $f : X_\Gamma \to X_\Theta$ из марковской меры $\mu_{N,\Gamma,L}$, совпадает с инвариантной мерой Эрдёша на компакте Фибоначчи X.*

Это утверждение вытекает из утверждения 6 (смотри также §3) и следствия утверждения 5.

Элементы переходной матрицы P марковских мер $\mu_{N,\Gamma,l}$, $\mu_{N,\Gamma,L}$ имеют вид $p_{ij} = n_{ij}R(j)/R(i)$, n_{ij} – элементы матрицы N, $R(i)$ – элементы столбца R. Поэтому

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & 0 & 0 & p_0 p_1 & p_1^2 \\ p_0 & 0 & p_1 p_0 & 0 & p_1^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку инвариантная марковская мера, отвечающая матрице P, соответствует связному и апериодическому графу, то сдвиг на компакте Фибоначчи с инвариантной мерой Эрдёша – точный эндоморфизм, а двусторонний сдвиг – K-автоморфизм. В частности, мера ν эргодична.

Для $p_0 = 0.5$ получаем матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Докажем, что инвариантная мера Эрдёша ν сингулярна относительно меры Лебега. Так как мера Лебега эквивалентна мере с максимальной энтропией, а на компакте Фибоначчи мера m с максимальной энтропией – марковская с начальным распределением

$$\left(\frac{1}{1+\rho^2}, \frac{\rho^2}{1+\rho^2}\right)$$

и переходной матрицей

$$\begin{pmatrix} \rho & \rho^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то либо ν сингулярна с m, либо $\nu = m$, поскольку обе меры эргодичны. Покажем, что равенство $\nu = m$ невозможно.

Пусть эти две меры совпадают. Тогда из равенств $m(000) = m(1)$, $m(0000) = m(100)$, следует, что $\nu(000) - \nu(1) = 0$, $\nu(0000) - \nu(100) = 0$. Поэтому справедливы равенства: $pol_1 = 0$, $pol_2 = 0$, где

$$pol_1 := L(0)M_0^2 R(0) - L(1)R(1),$$

$$pol_2 := L(0)M_0^3 R(0) - L(1)M_0^2 R(0).$$

Вычисление дает (мы полагаем $u := p_0$), что

$$pol_1 = -1 + 4u - 5u^2 - u^3 + 8u^4 - 5u^5 + u^6,$$

$$pol_2 = u(fpol_2) = u(-2 + 10u - 21u^2 + 22u^3 - 10u^4 + 2u^5).$$

Идеал, порожденный многочленами pol_1, $fpol_2$, совпадает с кольцом всех многочленов. Получаем противоречие, и наше утверждение о сингулярности мер доказано.

5. Марковский случай

Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots$ – стационарная цепь с состояниями 0, 1 и переходной матрицей

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 1-q \\ t & 1-t \end{pmatrix}, \quad 0 < q < 1, \quad 0 < t < 1.$$

Случайная величина ζ определяется соотношением

$$\zeta = \xi_1 \rho + \xi_2 \rho^2 + \ldots, \quad 0 < \rho < 1, \quad \rho + \rho^2 = 1.$$

Если $\pi_k = P(\xi_0 = k)$, $F_k(x) = P(\zeta < x | \xi_0 = k)$, $F(x) = P(\zeta < x)$, то

$$F(x) = \pi_0 F_0(x) + \pi_1 F_1(x).$$

Выведем уравнения для $F_0(x)$, $F_1(x)$. Если $\zeta = \rho\xi_1 + \rho\zeta'$, то

$$F_k(x) = P(\rho\xi_1 + \rho\zeta' < x | \xi_0 = k) =$$

$$= \sum_{j=0}^{1} P(\zeta' < \beta x - j | \xi_1 = j, \xi_0 = k) P(\xi_1 = j | \xi_0 = k) =$$

$$= \sum_{j=0}^{1} P(\zeta' < \beta x - j | \xi_1 = j) p_{kj} = \sum_{j=0}^{1} P(\zeta < \beta x - j | \xi_0 = j) p_{kj},$$

то есть
$$F_k(x) = \sum_{j=0}^{1} p_{kj} F_j(\beta x - j), \quad k = 0, 1.$$

Введем матрицы
$$\widehat{p}_0 = \begin{pmatrix} p_{00} & 0 \\ p_{10} & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 & p_{01} \\ 0 & p_{11} \end{pmatrix}$$

и вектор-столбец $\widehat{F}(x) = (F_0(x),\ F_1(x))^T$. Тогда
$$\widehat{F}(x) = \widehat{p}_0 \widehat{F}(\beta x) + \widehat{p}_1 \widehat{F}(\beta x - 1).$$

Введем блочные матрицы
$$\widehat{M_0} = \begin{pmatrix} \widehat{p}_0 & 0 & 0 \\ \widehat{p}_1 & 0 & \widehat{p}_0 \\ 0 & \widehat{p}_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{M_1} = \begin{pmatrix} \widehat{p}_1 & 0 & \widehat{p}_0 \\ 0 & 0 & \widehat{p}_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и блочный вектор-столбец
$$\overline{F}(x) = \left(\widehat{F}(x), \widehat{F}(x+\rho), \widehat{F}(x+1)\right)^T.$$

Тогда очевидно, что
$$d\overline{F}(x) = \widehat{M_0} d\overline{F}(Vx), \quad x \in (0, \rho),$$
$$d\overline{F}(x) = \widehat{M_1} d\overline{F}(Vx), \quad x \in (\rho, 1).$$

Положим снова $Vx = \{\beta x\}$ (дробная часть числа βx). Напомним, что
$$\delta(x_1, \dots, x_n) = \\ = \{x \in (0,1) : x_1(x) = x_1, x_1(Vx) = x_2, \dots, x_1(V^{n-1}x) = x_n\}$$

для двоичного слова $x_{1,} x_2, \dots, x_n$ и
$$\overline{\mu}(x_1, \dots, x_n) = \int\limits_{\delta(x_1 \dots x_n)} d\overline{F}(x).$$

Имеем
$$\overline{\mu}(x_1 \dots x_n) = \widehat{M}_{x_1} \overline{\mu}(x_2, \dots, x_n) = \widehat{M}_{x_1} \widehat{M}_{x_2} \dots \widehat{M}_{x_n} \overline{R}(x_n), \quad n \geq 1,$$

где

$$\overline{R}(0) = \int\limits_{(0,1)} d\overline{F}(x) = \overline{F}(1) - \overline{F}(0),$$

$$\overline{R}(1) = \int\limits_{(0,\rho)} d\overline{F}(x) = \overline{F}(\rho) - \overline{F}(0).$$

Мерой Эрдёша на отрезке [0,1] называется распределение случайной величины $\rho\zeta$. Функция распределения для нее равна $F(\beta x)$. Поэтому мера Эрдёша на компакте Фибоначчи задается формулой

$$\mu(x_1 \dots x_n) = \int\limits_{\delta(x_1 \dots x_n)} dF(\beta x) = \int\limits_{\delta(x_2 \dots x_n)} dF(x).$$

Отсюда

$$\overline{\mu}(x_1 \dots x_n) = \overline{l}(x_1)\widehat{M}_{x_2}\widehat{M}_{x_2} \dots \widehat{M}_{x_n}\overline{R}(x_n), \quad n \geq 1,$$

где $\overline{l}(x_1) = ((1-x_1)(\pi_0,\pi_1),(0,0),x_1(\pi_0,\pi_1))$ и

$$\widehat{M}\,\overline{R} = \overline{R}, \quad \overline{lR} = 1.$$

Инвариантная мера Эрдёша на компакте Фибоначчи задается формулой:

$$\nu(x_1,\dots,x_n) = \overline{L}(x_1)\widehat{M}_{x_2},\dots,\widehat{M}_{x_n}R(x_n)/LR,$$

где $L\widehat{M} = L$, $\widehat{M}R = R$ и блочная матрица $\widehat{M}$ имеет вид

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} \widehat{M}_0 & \widehat{M}_1 \\ \widehat{M}_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стационарное распределение

$$\nu(x_1) = \frac{L(x_1)R(x_1)}{LR},$$

как вектор длины 12, имеет нулевые координаты с номерами 3, 6, 7, 9, 10. Удаляя из $\widehat{M}$ строки и столбцы с этими номерами, мы получаем матрицу $\widehat{N}$ размера 7×7 и функцию склейки $f: f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 0$, $f(5) = f(6) = f(7) = 1$. Поскольку инвариантная марковская мера, отвечающая матрице

$\widehat{N}$, соответствует связному и апериодическому графу, то сдвиг на компакте Фибоначчи с инвариантной мерой Эрдёша – точный эндоморфизм, а двусторонний сдвиг – K-автоморфизм. В частности, мера ν – эргодична.

Докажем, что мера Эрдёша в марковском случае сингулярна относительно меры Лебега. Так как мера Лебега эквивалентна мере с максимальной энтропией, а на компакте Фибоначчи мера m с максимальной энтропией – марковская с начальным распределением

$$\left(\frac{1}{1+\rho^2}, \frac{\rho^2}{1+\rho^2}\right)$$

и переходной матрицей

$$\begin{pmatrix} \rho & \rho^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то либо ν сингулярна с m, либо $\nu = m$, поскольку обе меры эргодичны.

Если $\nu_X = m_X$, то $\nu(000) - \nu(1) = 0$, $\nu(0000) - \nu(100) = 0$. При этом $pol_1 = 0$, $pol_2 = 0$, где

$$pol_1 := L(0)\widehat{M}_0^2 R(0) - L(1)R(1),$$

$$pol_2 := L(0)\widehat{M}_0^3 R(0) - L(1)\widehat{M}_0^2 R(0);$$

$$pol_1 = -1 + q + 3t - 5qt + 3q^2t + q^3t - qt^2 - 3t^3 +$$

$$+ 6qt^3 - 3q^2t^3 + t^4 - 2qt^4 + q^2t^4$$

$$pol_2 = t(fpol_2) = t(-2 + 2q + q^2 + q^3 + q^4 + 8t - 13qt + 4q^2t - 8t^2 +$$

$$+ 15qt^2 - 7q^2t^2 + 2t^3 - 4qt^3 + 2q^2t^3).$$

Гребнеровский базис (из 4 полиномов) для pol_1, $fpol_2$ содержит полином

$$(1-q)q(1-3q+q^2)(-1+q+q^2)(4-12q+7q^2+12q^3-10q^4+q^6).$$

Гребнеровский базис для pol_1, $fpol_2$, $1-3q+q^2$ равен $\{1-3q+q^2, 1-q-t\}$. Гребнеровский базис для $\{pol_1, fpol_2, -1+q+q^2\}$ равен $\{-1+q+q^2, (1-t)(1-q-t)\}$.

Полином $4-12q+7q^2+12q^3-10q^4+q^6$ не имеет корней на отрезке [0,1]. Поэтому мы имеем три возможности:

$$
\begin{array}{ll}
1. & q=\rho, \quad t=1, \\
2. & q=\rho, \quad t=1-\rho, \\
3. & q=1-\rho, \quad t=\rho.
\end{array}
$$

Первый вариант $q=\rho$, $t=1$ невозможен, так как $0<t<1$. Последние два варианта дают совпадение мер ν_X и m_X. Отсюда следует абсолютная непрерывность распределения ζ.

Замечание. Все вычисления проводились с помощью пакета **Mathematica.**

Литература

1. N. Sidorov, A. Vershik, *Ergodic properties of the Erdős measures, the entropy of the goldenshift, and related problems.* — Monatsh. Math. **126** No 3 (1998), 215–261.
2. И. Добеши, *Десять лекций по вейвлетам.* — Регулярная и хаотическая динамика, НИЦ, Ижевск (2001).
3. B. Markus, K. Petersen, S. Williams, *Transmission rates and factors of Markov chains.* — Contemporary Mathematics **26** (1984), 279–293.

Bezhaeva Z. I., Oseledets V. I. Erdős measures, sofic measures, and Markov chains.

We consider random variable $\zeta=\xi_1\rho+\xi_2\rho^2+\dots$ where $\xi_1,\xi_2,\dots$ are independent identically distibuted random variables taking values 0, 1, with $P(\xi_i=0)=p_0$, $P(\xi_i=1)=p_1$, $0<p_0<1$. Let $\beta=1/\rho$ be the golden number.

The Fibonacci expansion for a random point $\rho\zeta$ from $[0,1]$ is of form $\eta_1\rho+\eta_2\rho^2+\dots$ where random variables $\eta_k=0,1$ and $\eta_k\eta_{k+1}=0$. The infinite random word $\eta=\eta_1\eta_2\dots\eta_n\dots$ takes values in the Fibonacci compactum and defines an Erdös measure $\mu(A)=P(\eta\in A)$ on it. The invariant Erdős measure is the shift-invariant measure with respect to which Erdős measure is absolutely continuous.

We show that Erdős measures are sofic. Recall that a sofic system is a symbolic system which is a continuous factor of a topological Markov chain. A sofic measure is a one-block (or symbol to symbol) factor of the measure corresponding to a homogeneous Markov chain. For Erdős measures the corresponding regular Markov chain has 5 states. This gives ergodic properties of the invariant Erdős measure.

We give a new ergodic theory proof of the singularity of the distribution of the random variable ζ. Our method is also applicable when $\xi_1, \xi_2, \dots$ is a stationary Markov chain taking values 0,1. In particular, we prove that the distribution of ζ is singular and that Erdős measures appear as a result of gluing together states in a regular Markov chain with 7 states.

МИЭМ
Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: bejaeva@comtv.ru
oseled@mech.math.msu.su

Поступило 8 апреля 2005 г.