Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 325, 2005 г.

П. В. Ягодовский

σ–РАСШИРЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ГРУПП

Одной из наиболее известных задач в теории многозначных групп является косет-проблема.

Напомним, что многозначная группа – это множество с бинарной операцией умножения, в котором в результате произведения пары элементов получается, с учётом кратности, ровно n элементов (n – положительное целое число, одинаковое для всех пар сомножителей; оно называется *значностью* многозначной группы). От операции умножения в многозначной группе требуется, чтобы она удовлетворяла условиям, подобным условиям, накладываемым на умножение в обычных группах.

Первыми примерами многозначных групп были так называемые косетные и бикосетные группы. Косетная группа – это многозначная группа, множеством элементов которой является множество орбит действия на обычной группе её группы автоморфизмов. У бикосетной группы множество элементов представляет собою множество двойных смежных классов обычной группы по её подгруппе. В обоих случаях групповая операция индуцируется умножением в исходной обычной группе.

Косет-проблема заключается в характеризации многозначных групп, которые можно построить из групп обычных с помощью косет-конструкции или бикосет-конструкции.

Особое внимание к косетным и бикосетным группам вызвано не только тем, что они в общей массе многозначных групп наиболее близки к обычным группам, но, главное, тем, что такие многозначные группы важны в приложениях [4, 5, 6, 7]. Косет-проблема тесно связана с важной задачей алгебраической комбинаторики, заключающейся в характеризации C-алгебр, отвечающих ассоциативным схемам (это обстоятельство было установлено в работе [3]; см. также [1, 8]). Основываясь на этой связи теории многозначных групп с алгебраической комбинаторикой, в работе [11] автор получил описание множества бикосетных однопорождённых многозначных групп с эрмитовыми образующими в виде объединения некоторого множества категорий, обладающих универсальными отталкивающими объектами.

Многозначные группы, имеющие значность большую 1, естественно рассматривать как объекты с особенностями по отношению к группам обычным со значностью 1. "Мерой" такой особенности может служить значность n группы.

Если многозначная группа A является косетной (построенной из группы G с помощью её группы автоморфизмов H) или бикосетной (построенной из группы G с помощью её подгруппы H), то имеет место естественное отображение множества элементов группы G на множество элементов группы A. Это отображение, конечно, не является гомоморфизмом в обычном смысле, однако определённым образом уважает групповые операции в группах G и A. Кроме того, для каждой подгруппы HT группы H такое отображение естественным образом пропускается через "промежуточную" косетную (если A косетная) или бикосетную (если A бикосетная) группу, построенную из группы G с помощью группы H'. В настоящей работе введена конструкция *гомоморфизма прямого типа* из группы меньшей значности на группу большей значности, обобщающая отображения такого вида.

Пусть существует гомоморфизм прямого типа $B \to A$ обычной или многозначной группы B в многозначную группу A со значностью большей, чем у группы B. Тогда будем говорить, что группа A допускает соответственно *полное* (если B – обычная группа) или *частичное* (если B – многозначная группа) *разрешение особенности*. Группа B при этом называется соответственно *полным* или *частичным разрешением особенности группы* A. Многозначные группы, которые допускают полное разрешение особенности (в таком смысле), называются *слабокосетными* (см. [11]); в частности, все бикосетные группы допускают полное разрешение особенности.

Другой "мерой" особенности многозначной группы может служить мощность её элементов.

Напомним, что для косетной группы A, построенной из обычной группы G, мощность элемента равна числу прообразов этого элемента при гомоморфизме прямого типа из группы G в A. В случае бикосетной группы A, построенной из обычной группы G и ее подгруппы H, мощность элемента равна числу прообразов отвечающего этому элементу двойного смежного класса G по H при естественном отображении $H \setminus G \to H \setminus G / H$. Как показано в [9], мощность можно определить непосредственно по таблице умножения группы (см. определение 1.2 ниже), что позволяет ввести мощность как числовую положительную характеристику элемента инволютивной многозначной группы (все косетные, бикосетные и слабокосетные группы инволютивны).

Пусть многозначная группа B является частичным разрешением особенности группы A. Тогда всегда найдётся элемент $a \in A$, прообраз которого при гомоморфизме прямого типа $B \to A$ состоит более чем из одного элемента группы B. В этом случае сумма мощностей элементов этого прообраза равна мощности элемента a, а мощность каждого из элементов прообраза, конечно, меньше мощности элемента a. Можно считать, что элементы этого прообраза "проще", чем элемент a, что они "ближе" к элементам обычной группы G, полного разрешения особенности группы A, если, конечно, A допускает полное разрешение особенности и если соответствующий гомоморфизм прямого типа может быть пропущен через группу B.

Основным в данной работе является понятие σ-расширения многозначной группы.

σ-Расширение B многозначной группы A – это многозначная группа, являющаяся (вообще говоря, частичным) разрешением особенности группы A, таким, что среди элементов прообраза при гомоморфизме прямого типа $B \to A$ хотя бы одного элемента $a \in A$ (с мощностью большей 1) содержится элемент x мощности 1. Этот элемент можно рассматривать как "почти" элемент группы G, полного разрешения особенности группы A. Это "почти" связано с тем, что групповую алгебру допускающей, полное разрешение особенности группы B всегда можно вложить в групповую алгебру группы G; при этом вложении элемент x перейдёт в некоторый элемент группы G.

В настоящей работе продолжается исследование бикосетных однопорождённых многозначных групп с эрмитовыми образующими. Используя связь таких групп с симметрическими графами (см. [11]), мы предлагаем конструкцию канонического σ-расширения такой группы, полностью определяющегося её симметрическим графом. Главным результатом работы является следующее утверждение: *морфизмы в категориях однопорождён-*

ных бикосетных многозначных групп с эрмитовыми образующими продолжаются до морфизмов канонических σ-расширений соответствующих групп. Отсюда, в частности, вытекает, что *морфизм из универсального отталкивающего объекта A^U произвольной подкатегории множества бикосетных однопорождённых многозначных групп с эрмитовыми образующими в группу A, принадлежащую этой категории, продолжается до морфизма их канонических σ-расширений.* Последнее утверждение существенно усиливает основной результат работы [11].

Исходными работами по теории многозначных групп являются [2, 3, 4, 5, 6, 7], см. также [9]. Все необходимые определения теории многозначных групп приведены в [11]; настоящая работа является непосредственным продолжением этой работы.

Некоторые результаты настоящей работы были анонсированы в заметке [10].

В заключение хочу поблагодарить профессора В. М. Бухштабера за постановку задачи и активную поддержку в её решении, а также профессоров А. М. Вершика и Н. П. Долбилина, доцента Н. Г. Мощевитина и с.н.с. И. Н. Пономаренко за полезные обсуждения результатов настоящей работы.

1. Необходимые определения теории многозначных групп. Гомоморфизмы прямого и обратного типа

Определение 1.1. *Множество A называется n-значной группой или, короче, n-группой (где $n \in \mathbb{N}$), если зафиксировано умножение*

$$\mu : A \times A \to (A)^n$$

со значением в n-й симметрической степени $(A)^n$ множества A, удовлетворяющее следующим условиям.

1. Ассоциативность: для любых элементов x, y, z группы A справедливо равенство

$$(\mu)^n(\mu(x,y),z) = (\mu)^n(x,\mu(y,z)).$$

Здесь через $(\mu)^n(\mu(x,y),z)$ обозначен элемент

$$(\mu(t_1,z),\dots,\mu(t_n,z)) \in ((A)^n)^n \subset (A)^{n^2}, \quad \text{где} \quad \mu(x,y) = (t_1,\dots,t_n).$$

Аналогичное обозначение использовано в правой части равенства. Условие состоит в совпадении полученных элементов множества $(A)^{n^2}$.

2. Условие двусторонней единицы: существует элемент $e \in A$, называемый единицей, такой, что для всех $x \in A$ имеет место равенство $\mu(e,x) = \mu(x,e) = (x,\ldots,x)$.

3. Условие двустороннего обратного: для любого $x \in A$ существует (хотя бы один) элемент $x^* \in A$, называемый обратным, такой, что множества $\mu(x,x^*)$ и $\mu(x^*,x)$ содержат в себе единицу e.

В частности, обычные группы согласно этому определению являются 1-группами; n-значные группы с $n > 1$ называются *многозначными группами*. Пусть $C^z_{x,y}$ равно числу вхождений элемента z в $\mu(x,y)$; константы такого вида называются *кратностями* группы A.

Определение 1.2. 1. *n-Группа называется коммутативной, если для любых $x, y \in A$ имеет место равенство*

$$\mu(x,y) = \mu(y,x).$$

2. *n-Группа называется инволютивной, если для каждого элемента группы существует только один обратный, а отображение $*$ (называемое инволюцией), сопоставляющее элементу x его обратный x^*, является антиавтоморфизмом, причём $(x^*)^* = x$. Элемент x инволютивной группы называется эрмитовым, если $x^* = x$.*

3. *Дискретная инволютивная многозначная группа A называется однопорождённой многозначной группой с образующим a, если любое подмножество S элементов группы A, включающее единицу и удовлетворяющее условию $(a' \in S) \Rightarrow (\mu(a,a') \in (S)^n)$ (где μ – умножение в A), содержит все элементы n-группы A.*

4. *Мощностью элемента a n-значной инволютивной группы A называется число $m(a) = n/C^e_{a,a^*}$.*

Определение 1.3. *Алгебра $\mathbf{A} = \mathbb{R}(A)$ над $\mathbb{R}$ с выделенным базисом, элементы которого отождествляются с элементами n-группы A, и структурными константами $c^z_{x,y} = (1/n)C^z_{x,y}$ (где $C^z_{x,y}$ – кратности группы A) называется групповой алгеброй n-группы A.*

Определение 1.4. *Алгебра $\mathcal{K}(A)$ над $\mathbb{R}$ с выделенным базисом, элементы которого отождествляются с элементами n-группы A, и структурными константами $c^z_{x,y} = (m(a)/n)C^z_{x,y}$ (где $C^z_{x,y}$ –*

кратности группы A) называется комбинаторной алгеброй группы A.

Понятие комбинаторной алгебры введено в работе [3]. В этой работе показано, что комбинаторные алгебры – это C-алгебры, которые, перенормировав выделенный базис, можно превратить в групповые алгебры многозначных групп.

Определение 1.5. *Линейное отображение f из алгебры $\mathfrak{A}$ с выделенным базисом $\{a_i\}$ в алгебру $\mathfrak{B}$ с выделенным базисом $\{b_i\}$ называется гомоморфизмом прямого типа, если задано представление множества элементов выделенного базиса алгебры $\mathfrak{A}$ в виде объединения попарно непересекающихся конечных множеств $\mathfrak{A}_b$ (среди которых могут быть пустые), где индекс b пробегает множество элементов выделенного базиса алгебры $\mathfrak{B}$, такое, что*

(1) *f переводит единицу алгебры $\mathfrak{A}$ в единицу алгебры $\mathfrak{B}$;*

(2) *для всех a из $\mathfrak{A}_b$ имеем $f(a) = b$;*

(3) *линейная оболочка элементов b выделенного базиса алгебры $\mathfrak{B}$, таких, что $\mathfrak{A}_b \neq \varnothing$, является подалгеброй в $\mathfrak{B}$, которая называется образом гомоморфизма f и обозначается $\operatorname{Im} f$;*

(4) *имеется вложение алгебры $\operatorname{Im} f$ в алгебру $\mathfrak{A}$, при котором каждый элемент b выделенного базиса алгебры $\mathfrak{B}$, принадлежащий $\operatorname{Im} f$, переходит в $\gamma_b \sum_{a \in \mathfrak{A}_b} a$ (где γ_b – некоторые рациональные нормировочные константы).*

Гомоморфизмом "на" прямого типа называется гомоморфизм прямого типа, у которого $\operatorname{Im} f = \mathfrak{B}$.

Ядром $\operatorname{Ker} f$ гомоморфизма прямого типа f называется прообраз единицы алгебры $\mathfrak{B}$.

Определение 1.6. *Отображение многозначных групп $A \to B$ называется гомоморфизмом прямого типа, если соответствующее ему линейное отображение групповых алгебр $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ этих групп является гомоморфизмом прямого типа.*

Поясним, почему такие гомоморфизмы называются гомоморфизмами *прямого* типа. Ограничимся случаем бикосетных групп. Рассмотрим группы $K \subset H \subset G$. Тогда имеется естественное отображение множеств двойных смежных классов $\pi : K \diagdown G \diagup K \to H \diagdown G \diagup H$ (меньший класс переходит в содержащий его больший класс). Замечательно, что при этом отображении операция умножения на множестве $K \diagdown G \diagup K$ индуцирует операцию на $H \diagdown G \diagup H$. Действительно, для пары двойных смежных классов из $H \diagdown G \diagup H$ необходимо взять их прообразы при отображении π и перемножить каждый из элементов прообраза первого класса на каждый элемент прообраза второго класса. Объединение результатов этих произведений (с учётом кратностей) представляет собой объединение прообразов при π некоторых двойных классов из $H \diagdown G \diagup H$, взятых с некоторыми кратностями. Можно убедиться, что эта конструкция эквивалентна конструкции гомоморфизма прямого типа для бикосетных групп.

Определение 1.7. *Отображение многозначных групп $A \to B$ называется гомоморфизмом обратного типа, если соответствующее ему линейное отображение групповых алгебр $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ этих групп является гомоморфизмом алгебр, переводящим каждый элемент выделенного базиса алгебры $\mathbf{A}$ в линейную комбинацию элементов выделенного базиса алгебры $\mathbf{B}$ с неотрицательными рациональными коэффициентами.*

Замечание 1.8. 1. Подчеркнём, что гомоморфизм прямого типа, как правило, не является гомоморфизмом в обычном смысле.

2. Отображение, обратное к гомоморфизму прямого типа, является гомоморфизмом обратного типа.

Определение 1.9. *n-Группа A называется слабокосетной, если она является образом гомоморфизма прямого типа*

$$f : G \to A, \tag{1}$$

имеющего тривиальное ядро, где G – 1-группа.

Слабокосетные группы, как нетрудно видеть, являются инволютивными. Соответствующие им комбинаторные алгебры являются S-кольцами (кольцами Шура) над группой G (см. [1]).

Определение 1.10. *Слабокосетная n-группа A называется косетной, если существует конечная группа H автоморфизмов группы G, такая, что $n = |H|$ и прообраз любого элемента $a \in A$ при гомоморфизме f (см. (1)) есть орбита действия H на G. Косетные группы обозначаются $G \diagup H$.*

Слабокосетная n-группа A называется бикосетной, если существует конечная подгруппа H группы G, такая, что $n = |H|$ и прообраз любого элемента $a \in A$ при гомоморфизме f (см. (1)) есть двойной смежный класс группы G по H. Бикосетные группы обозначаются $H \diagdown G \diagup H$.

Определения 1.9–1.10 эквивалентны соответствующим определениям из работ [3, 5, 6, 11].

2. Конструкция σ-расширения

Предложение 2.11. *Пусть G – группа, H – её конечная подгруппа, а K – подгруппа в H. Тогда имеет место тройка бикосетных многозначных групп*

$$K \diagdown H \diagup K \xrightarrow{i} K \diagdown G \diagup K \xrightarrow{\pi} H \diagdown G \diagup H, \qquad (2)$$

где i – естественное вложение, а π – гомоморфизм “на” прямого типа. В этом случае $\operatorname{Ker}\pi$ совпадает с образом вложения i.

Здесь вложение i переводит элемент бикосетной группы $K \diagdown H \diagup K$, отвечающий некоторому двойному смежному классу KhK группы H по подгруппе K, в элемент группы $K \diagdown G \diagup K$, отвечающий тому же классу. Проекция π переводит в элемент группы $H \diagdown G \diagup H$, отвечающий некоторому двойному смежному классу HgH группы H по подгруппе K, те и только те элементы группы $K \diagdown G \diagup K$, которые отвечают двойным смежным классам группы G по H, входящим как подмножества в класс HgH. Доказательство предложения очевидно.

Определение 2.12. *Тройка многозначных групп*

$$C \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} A,$$

где i – вложение, π – гомоморфизм “на” прямого типа и $\operatorname{Ker}\pi$ совпадает с образом вложения i, называется точной.

Определение 2.13. *Элемент a m-значной инволютивной группы A называется σ-элементом, если существует n-значная инволютивная группа B и гомоморфизм “на” прямого типа $f : B \to A$, такие, что множество $f^{-1}(a)$ содержит элемент $x \in B$ мощности 1. Группа B называется σ-расширением группы A по элементу a, x – расширяющим элементом, а ядро C гомоморфизма f – ядром σ-расширения. В этом случае имеет место точная тройка $C \to B \to A$.*

Предложение 2.14. *В слабокосетной группе все элементы являются σ-элементами.*

Доказательство. В качестве группы B для всех элементов слабокосетной группы A можно взять группу G (см. (1)). $\square$

В работе [11] введена конструкция *бикосетной алгебры* $\mathcal{K}(G,H)$ *пары групп* $G \supset H$, являющаяся обобщением конструкции комбинаторной алгебры многозначной бикосетной группы на случай группы H бесконечного порядка. *Чтобы бикосетная алгебра* $\mathcal{K}(G,H)$ *была определена, необходимо и достаточно, чтобы каждый двойной смежный класс* $HgH \in H \diagdown G \diagup H$ *состоял из конечного числа односторонних смежных классов* $Hg \in H \diagdown G$ (см. [11]). Для элементов выделенного базиса бикосетной алгебры вводится понятие *мощности* так же, как и для бикосетных групп: мощность элемента равна числу прообразов отвечающего этому элементу двойного смежного класса при проекции $HgH \in H \diagdown G \diagup H \to Hg \in H \diagdown G$.

Для бикосетных алгебр $\mathcal{K}(H,K)$, $\mathcal{K}(G,K)$ и $\mathcal{K}(G,H)$, отвечающих 1-группам $K \subset H \subset G$, можно построить тройку, аналогичную (2):

$$\mathcal{K}(H,K) \xrightarrow{i_*} \mathcal{K}(G,K) \xrightarrow{\pi_*} \mathcal{K}(G,H), \tag{3}$$

где i – естественное вложение в подалгебру, а π – гомоморфизм "на" прямого типа. Тут тоже образ вложения i в $\mathcal{K}(G,K)$ совпадает с прообразом при проекции π единицы алгебры $\mathcal{K}(G,H)$.

Определение 2.15. *Тройка алгебр с выделенными базисами*

$$\mathcal{C} \xrightarrow{i_*} \mathcal{B} \xrightarrow{\pi_*} \mathcal{A}, \tag{4}$$

где i – естественное вложение в подалгебру (переводящее элемент выделенного базиса алгебры $\mathcal{C}$ в элемент выделенного базиса алгебры $\mathcal{B}$), а π – гомоморфизм "на" прямого типа, такая, что образ вложения i в $\mathcal{K}(G,K)$ совпадает с прообразом при проекции π единицы алгебры $\mathcal{K}(G,H)$, называется точной в групповом смысле тройкой алгебр.

Для бикосетных алгебр вводится понятие σ-расширения аналогично случаю бикосетных групп.

3. σ-Расширения однопорождённых бикосетных многозначных групп с эрмитовыми образующими

Пусть $A = H \diagdown G \diagup H$ – однопорождённая бикосетная группа с отмеченным эрмитовым образующим a, отвечающим классу

HtH. В [11] введена конструкция *симметрического графа однопорождённой бикосетной группы с эрмитовым образующим*, которая сопоставляет каждой группе A такого вида симметрический граф $\Gamma = \Gamma(A)$, множество вершин которого есть множество левых смежных классов группы G по подгруппе H. Группа G является группой автоморфизмов графа Γ, действующей транзитивно на множестве его вершин и рёбер; подгруппа H при этом является стабилизатором вершины v графа Γ, отвечающей классу $He_G \in H \setminus G$. (Эта вершина в [11] обозначалась как (H).)

Пусть $w = (Ht)$ – вершина графа Γ, отвечающая классу $Ht \in H \setminus G$. Эта вершина, согласно конструкции, связана с вершиной v ребром. Обозначим через K подгруппу группы H, состоящую из автоморфизмов графа Γ, оставляющих ребро (v, w) неподвижным. Тогда имеет место следующее предложение.

Предложение 3.16. *Бикосетная группа $K \setminus G \,/\, K$ является σ-расширением бикосетной группы $A = H \setminus G \,/\, H$ по образующему a.*

Это предложение будет доказано в следующем разделе при изложении более общей конструкции.

4. Бикосетные алгебры симметрического графа

В работе [11] для каждого симметрического графа Γ (у которого валентность предполагается конечной) с выделенной группой автоморфизмов $G \subset \operatorname{Aut} \Gamma$, действующей транзитивно на множествах вершин и рёбер графа Γ, построена *первая бикосетная алгебра* $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1(\Gamma, G)$. Пусть H – подгруппа группы G, оставляющая неподвижной некоторую вершину v графа Γ (в обозначениях работы [11] $v = (H)$). Тогда алгебра $\mathcal{A}_1$ по определению есть бикосетная алгебра $\mathcal{K}(G, H)$. В случае, когда H – конечная группа, граф Γ есть симметрический граф однопорождённой бикосетной группы $A = H \setminus G \,/\, H$ с отмеченным эрмитовым образующим a, отвечающим классу HtH, где $t \in G$ – автоморфизм, переводящий v в одну из инцидентных ей вершин. Алгебра $\mathcal{A}_1$ в этом случае есть комбинаторная алгебра группы $A = H \setminus G \,/\, H$.

Обозначим через Γ_1 граф единичных сфер графа Γ (напомним, что *графом единичных сфер* данного симметрического графа Γ называется граф, изоморфный подграфу $S(u, 1)$ графа Γ, состоящему из вершин, соединённых с данной фиксированной вершиной u

графа Γ, и рёбер графа Γ, соединяющих эти вершины, см. [11]; в литературе граф единичных сфер часто называют *графом окружений*). Зафиксируем вложение $i : \Gamma_1 \to \Gamma$ графа Γ_1 в подграф $S(v, 1)$, где $v = (H)$. Граф Γ_1 является вершинно-симметрическим относительно действия группы H, индуцированного вложением i. Пусть $(v, u) = ((H), (Ht))$ – некоторое ребро графа Γ и $K \subset H$ – его стабилизатор. Действие группы H на графе Γ_1 индуцирует гомоморфизм $H \to \mathrm{Aut}(\Gamma_1)$. Обозначим через $\widetilde{H}$ и $\widetilde{K}$ образы групп H и K при этом гомоморфизме. Так как граф Γ_1 является конечным, то и группа $\widetilde{H}$ конечна. Следовательно, определена бикосетная группа $A_3 = \widetilde{K} \diagdown \widetilde{H} \diagup \widetilde{K}$. Комбинаторная алгебра этой группы называется *третьей бикосетной алгеброй графа* Γ *с группой автоморфизмов* G и обозначается через $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_3(\Gamma, G)$. Как нетрудно убедиться, она совпадает с бикосетной алгеброй $\mathcal{K}(H, K)$.

Следующая задача – показать, что определена бикосетная алгебра $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2(\Gamma, G) = \mathcal{K}(G, K)$ (*вторая бикосетная алгебра графа* Γ *с группой автоморфизмов* G) и доказать, что она является σ-расширением с эрмитовым расширяющим элементом алгебры $\mathcal{A}_1$ над рёберным элементом с ядром $\mathcal{A}_3$. При этом возникнет точная в групповом смысле тройка бикосетных алгебр

$$\mathcal{A}_3 \xrightarrow{i_*} \mathcal{A}_2 \xrightarrow{\pi_*} \mathcal{A}_1. \tag{5}$$

Покажем, что алгебра $\mathcal{A}_2(\Gamma, G) = \mathcal{K}(G, K)$ определена. Для произвольного $g \in G$ рассмотрим двойной смежный класс KgK. Он является подмножеством двойного смежного класса HgH, состоящего, согласно рассуждениям, проведённым в работе [11], из конечного числа левых смежных классов Hg_α. Рассмотрим множество рёбер графа Γ, выходящих из вершины (H). Его элементы находятся во взаимно однозначном соответствии с левыми смежными классами группы H по подгруппе K. Следовательно, множество смежных классов $K \diagdown H$ конечно. Таким образом, двойной смежный класс $KgK \in K \diagdown G \diagup K$ состоит лишь из конечного числа левых смежных классов $kgK \in G/K$. Так как элемент g был произвольным, условие существования бикосетной алгебры $\mathcal{K}(G, K)$ выполнено.

В случае, когда группа H конечна (а следовательно, и её подгруппа K тоже конечна), определена бикосетная группа $A_2 = K \diagdown G \diagup K$. Алгебра $\mathcal{A}_2(\Gamma, G)$ тогда естественным образом является её комбинаторной алгеброй. Таким образом, предложение 3.16 вытекает из следующего предложения.

Предложение 4.17. *Прообраз рёберного элемента a при отображении $\pi_* : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_1$ содержит эрмитов элемент x, мощность которого равна единице.*

Доказательство. Рёберный элемент a алгебры $\mathcal{A}_1 = \mathcal{K}(G, H)$, отвечающий двойному смежному классу HtH, является эрмитовым. Это означает, что $a \times a$ содержит единицу e, т.е. существует элемент $h \in H$, такой, что $tht = h' \in H$. Пусть $x = ht$. Тогда $x^2 = htht = hh' \in H$. Пусть N – такая подгруппа группы H, что для всех $n \in N$ существует такое $n' \in N$, что $xn = n'x$. Заметим, что подгруппы, обладающие таким свойством, существуют: для примера можно взять подгруппу в группе H, порождённую элементом x^2. Кроме того, если даны две подгруппы N_1 и N_2 группы H, обладающие этим свойством, то теоретико-множественное объединение их элементов порождает подгруппу, тоже обладающую этим свойством. Действительно, пусть $n_1 \in N_1$ и $n_2 \in N_2$. Тогда $xn_1n_2 = n_1'n_2'x$, где $n_1' \in N_1$ и $n_2' \in N_2$. Будем считать, что N — наибольшая такая подгруппа. Тогда $x^2 \in N$, т.е. двойной смежный класс, содержащий элемент x, определяет имеющий мощность 1 эрмитов элемент бикосетной алгебры $\mathcal{K}(G, N)$ (если, конечно, последняя определена). Допуская некоторую вольность, будем обозначать этот элемент тоже через x.

Подчеркнём, что элементы t и x лежат в одном и том же правом смежном классе группы G по H, т. е. $(Hx) = (Ht)$.

Далее, докажем, что группа N совпадает с K. Заметим, что автоморфизмы из N сохраняют ребро $((H), (Hx))$. Действительно, $(Hx)n = (Hxn) = (Hn'x) = (Hx)$. Следовательно, $N \subset K$. Обратно, пусть h – элемент K. Так как $(Hx)h = (Hx)$, то $xhx^{-1} = h' \in H$ и $xh'x^{-1} = x^2hx^{-2} = nhn^{-1} = h'' \in H$ (здесь $n \in N$). Итак, $h' \in K$, т. е. группа K удовлетворяет нашему условию. Следовательно, $N \subset K$. $\square$

Таким образом, алгебра $\mathcal{A}_2$ в самом деле является σ-расширением алгебры $\mathcal{A}_1$, а в случае, если группа H конечна, многозначная группа $K \setminus G \mathbin{/} K$ является σ-расширением группы $H \setminus G \mathbin{/} H$. Будем называть эти σ-расширения *каноническими*, чтобы отличать их от иных σ-расширений, которые, возможно, имеются у алгебры $\mathcal{A}_1$ и группы $H \setminus G \mathbin{/} H$ (если последняя определена).

5. Конструкция продолжения морфизмов

Пусть Γ – симметрический граф бикосетной группы $A_1 = H \diagdown G \diagup H$ с отмеченным эрмитовым образующим a, Γ^U – универсальный симметрический граф, накрывающий граф Γ, а G^U – группа автоморфизмов графа Γ^U, накрывающая группу G (см. [11]). Обозначим через $f : \Gamma^U \to \Gamma$ гомоморфизм симметрических графов, порождённый отображением накрытия $\tau(\Gamma^U) \to \tau(\Gamma)$ соответствующих им флаг-комплексов, а через $\phi : G^U \to G$ – соответствующий ему эпиморфизм групп автоморфизмов.

Пусть $v = (H)$ – неподвижная относительно действия группы H вершина графа Γ. Как и в [11], выберем произвольную вершину v^U графа Γ^U, лежащую в прообразе вершины v при гомоморфизме f, и обозначим через H^U подгруппу группы G^U, состоящую из автоморфизмов, оставляющих вершину v^U неподвижной. Как легко видеть, ограничение эпиморфизма ϕ на подгруппу H^U является эпиморфизмом на подгруппу H группы G. Пусть w^U – вершина графа Γ^U, соединённая с вершиной v^U и лежащая в прообразе вершины $w = (Hx)$ графа Γ. Обозначим через K^U подгруппу в H^U, оставляющую ребро (v^U, w^U) неподвижным. Тогда ограничение эпиморфизма ϕ на K^U является эпиморфизмом на группу K. Пусть t^U – автоморфизм, переводящий вершину v^U в w^U, такой, что $\phi(t^U) = x$, где x – элемент группы G, квадрат которого принадлежит подгруппе K (см. рассуждения в доказательстве предложения 4.17). Согласно им, в правом смежном классе группы G^U по подгруппе H^U, содержащем элемент t^U, можно выбрать элемент x^U, квадрат которого принадлежит подгруппе K^U. Переходя теперь к бикосетным алгебрам $\mathcal{K}(G^U, K^U) = \mathcal{A}_2(\Gamma^U, G^U)$ и $\mathcal{K}(G, K) = \mathcal{A}_2(\Gamma, G)$ и обозначая, как и выше, их элементы, отвечающие элементам x^U и x групп G^U и G соответственно, тоже через x^U и x, получаем равенство $\phi(x^U) = x$.

Для графа Γ^U имеет место точная в групповом смысле тройка его бикосетных алгебр

$$\mathcal{A}_3^U \xrightarrow{i_*^U} \mathcal{A}_2^U \xrightarrow{\pi_*^U} \mathcal{A}_1^U. \tag{6}$$

Эпиморфизм групп автоморфизмов ϕ индуцирует эпиморфизмы алгебр $\phi_1 : \mathcal{A}_1^U \to \mathcal{A}_1$ (этот эпиморфизм был построен в [11]), $\phi_2 : \mathcal{A}_2^U \to \mathcal{A}_2$ и $\phi_3 : \mathcal{A}_3^U \to \mathcal{A}_3$, причём, так как графы единичных сфер у графов Γ и Γ^U совпадают, последний эпиморфизм является изоморфизмом. Эти эпиморфизмы отображают элементы выделенных базисов алгебр $\mathcal{A}_i^U$ $(i = 1, 2, 3)$ в линейные комбинации элементов выделенных базисов алгебр $\mathcal{A}_i$ с неотрицательными коэффициентами (соответствующие им отображения многозначных групп являются гомоморфизмами обратного типа). Таким образом, имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_3^U \arrow[r, "i_*^U"] \arrow[d, equal] & \mathcal{A}_2^U \arrow[r, "\pi_*^U"] \arrow[d, "\phi_2"'] & \mathcal{A}_1^U \arrow[d, "\phi_1"'] \\ \mathcal{A}_3 \arrow[r, "i_*"] & \mathcal{A}_2 \arrow[r, "\pi_*"] & \mathcal{A}_1. \end{tikzcd} \tag{7}$$

В работе [11] класс однопорождённых бикосетных групп с отмеченными эрмитовыми образующими представлен в виде дизъюнктного объединения категорий однопорождённых бикосетных групп с эрмитовыми образующими, каждая из которых задаётся универсальным симметрическим графом Γ^U и его группой автоморфизмов G^U. Однопорождённая бикосетная группа $H \diagdown G \diagup H$ с отмеченным эрмитовым образующим будет объектом категории, отвечающей данным (Γ^U, G^U), если универсальный граф Γ^U накрывает симметрический граф Γ этой бикосетной группы и группа автоморфизмов G^U графа Γ^U накрывает группу автоморфизмов G графа Γ. Морфизмами этой категории являются гомоморфизмы комбинаторных алгебр бикосетных групп, порождённые гомоморфизмами симметрических графов, являющимися ограничениями соответствующих накрывающих отображений флаг-комплексов. Согласно диаграмме (7), морфизм из универсального объекта в такой категории ϕ_1 продолжается до морфизма σ-расширений ϕ_2, причём соответствующий морфизм ядер σ-расширений является изоморфизмом. Как нетрудно видеть, аналогичная картина имеет место и для остальных морфизмов. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 5.18. *Морфизмы в категориях однопорождённых бикосетных многозначных групп с эрмитовыми образующими продолжаются до морфизмов канонических σ-расширений соответствующих групп, причём соответствующий морфизм ядер σ-расширений является изоморфизмом.*

6. Комментарий

Задача, к решению которой хотелось бы приблизиться, состоит в том, чтобы научиться проверять, принадлежит ли данная однопорождённая многозначная группа с отмеченным эрмитовым образующим (про которую не известно, является ли она бикосетной) данной категории однопорождённых бикосетных групп с эрмитовым образующими или нет[1]. Если бы мы научились решать эту задачу, это почти означало бы, что для однопорождённых бикосетных групп с эрмитовыми образующими решена проблема распознавания бикосетных групп[2]. Трудность этой задачи состоит в следующем.

Дело в том, что зачастую комбинаторные алгебры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_1^U$ представляют собою алгебры (усечённых) полиномов от одной переменной со специальными выделенными базисами. (Например, это будет так, если соответствующие графы являются дистанционно-регулярными.) В таком случае гомоморфизм алгебр $\phi : \mathcal{A}_1^U \to \mathcal{A}_1$ может существовать по не зависящим от каких-либо гомоморфизмов графов причинам и, следовательно, не являться морфизмом в смысле категорий бикосетных групп. Проблема состоит в том, как выявлять подобные "ложные" гомоморфизмы.

Самое простое и, к сожалению, очень слабое условие, которому должен удовлетворять "настоящий" гомоморфизм, связано с наличием выделенных базисов у алгебр $\mathcal{A}_1^U$ и $\mathcal{A}_1$. Поясним чуть подробнее, что это за условие. Пусть графы Γ^U и Γ являются дистанционно-регулярными. Тогда можно так занумеровать элементы выделенного базиса бикосетной алгебры $\mathcal{A}_1^U = \mathcal{K}(G^U, H^U)$, что соответствующий элементу a_i^U двойной смежный класс группы G^U по группе H^U будет состоять из автоморфизмов графа Γ^U, переводящих произвольную вершину u графа Γ^U в вершину w, где $w \in S_{\Gamma^U}(u, i)$. Аналогичную нумерацию будем использовать

[1] Отметим, что не исключено, что такая группа может принадлежать нескольким категориям. Это означало бы, что данная группа может быть построена с помощью бикосет-конструкции несколькими существенно различными способами, которые отвечают *различным* симметрическим графам.

[2] "Почти" – потому что необходимо ещё научиться перебирать категории однопорождённых бикосетных групп с эрмитовыми образующими. Следующая публикация будет посвящена решению задачи построения универсальных объектов этих категорий и их σ-расширений.

и для элементов $\{a_i\}$ выделенного базиса алгебры $\mathcal{A}_1$. В итоге, так как графы Γ^U и Γ локально устроены одинаково, то *для небольших значений параметров i и j коэффициент при элементе a_k^U, $k = 0, \ldots, i+j$, в разложении произведения $a_i^U \times a_j^U$ по базису $\{a_i^U\}$ и коэффициент при a_k, $k = 0, \ldots, i+j$, в разложении произведения $a_i \times a_j$ по базису $\{a_i\}$ оказываются равными.*

Второе, более сильное, условие даёт конструкция σ-расширений многозначных групп и теорема 5.18. Это условие тоже не является достаточным: существует пример, в котором гомоморфизм из универсального объекта одной из категорий бикосетных групп в многозначную группу продолжается до гомоморфизма их σ-расширений, однако эта группа не только не принадлежит этой категории, но и вообще не является бикосетной.

6.1. Пример универсальных объектов и их σ-расширений.

Пусть граф Γ_1 представляет собою дизъюнктное объединение n экземпляров полного графа K_m, а группа $\widetilde{H}$ есть полная группа автоморфизмов графа Γ_1. В случае $m = 2$, $n = 3$ соответствующий граф Γ^U изображён на рисунке. Оказывается, таким данным при каждых фиксированных натуральных m и n отвечает единственная категория бикосетных однопорождённых групп с эрмитовыми образующими.

Пусть $n > 1$. В этом случае алгебра $\mathcal{A}_1^U$ – универсальный объект этой категории – в выделенном базисе $\{a_i\}$ $(i \in \mathbb{Z},\ i \leq 0)$ задаётся соотношениями

$$
\begin{aligned}
a_1^2 &= mn\, a_0 + (m-1)a_1 + a_2;\\
a_1 \times a_i &= m(n-1)a_{i-1} + (m-1)a_i + a_{i+1}, \quad i > 1.
\end{aligned}
$$

Здесь a_0 – единица алгебры, a_1 – её рёберный элемент, который в этой алгебре является сильным образующим. В случае сильного образующего эти соотношения по ассоциативности однозначно продолжаются до полной таблицы умножения (см. [11]).

При $m > 1$ и $n > 1$ алгебра $\mathcal{A}_2^U$ – σ-расширение универсального объекта этой категории алгебры $\mathcal{A}_1^U$ – порождается элементами a, b, x, удовлетворяющими следующим соотношениям:

$$
\begin{gathered}
x^2 = e,\ \ a^2 = (m-1)e + (m-2)a,\ \ b^2 = (n-1)e + (n-1)a + (n-2)b,\\
a \times b = b \times a = (m-1)b, \quad a \times x \times (e+a) = x \times a \times x \times (e+a)
\end{gathered}
$$

(e – единица). При $m = 1$ и $n > 1$ алгебра $\mathcal{A}_2^U$ порождается рёберными элементами b и x, удовлетворяющими соотношениям

$$x^2 = e, \quad b^2 = (n-1)e + (n-1)a + (n-2)b.$$

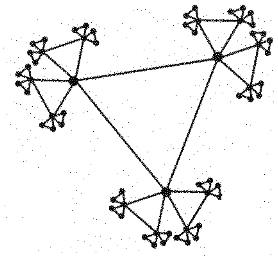
В случае $n = 1$, $m > 1$ алгебра $\mathcal{A}_1^U$ порождается элементами a_0 и a_1 с единственным соотношением

$$a_1^2 = m\,a_0 + (m-1)a_1.$$

Соответствующая алгебра $\mathcal{A}_2^U$ порождается рёберными элементами a и x, удовлетворяющими соотношениям

$$x^2 = e, \ \ a^2 = (m-1)e + (m-2)a, \ \ a \times x \times (e+a) = x \times a \times x \times (e+a).$$

Случай $n = 1$, $m = 1$ является вырожденным. В нём универсальный граф есть отрезок, алгебра $\mathcal{A}_2^U$ совпадает с групповой алгеброй группы $\mathbb{Z}_2$, с неединичным элементом x, а алгебра $\mathcal{A}_1^U$ является групповой алгеброй тривиальной группы, состоящей лишь из единицы.



Литература

1. Э. Баннаи, Т. Ито, *Алгебраическая комбинаторика. Схемы и отношения.* М.: Мир, 1987.
2. В. М. Бухштабер, *Функциональные уравнения, ассоциированные с теоремами сложения для эллиптических функций, и двузначные алгебраические группы.* — УМН, **45**, вып. 3 (1990), 185–186.
3. В. М. Бухштабер, А. М. Вершик, С. А. Евдокимов, И. Н. Пономаренко, *Комбинаторные алгебры и многозначные группы.* — Функц. анал. и его прилож., **30**, вып. 3 (1996), 12–18.
4. В. М. Бухштабер, Е. Г. Рисс, *Многозначные группы и n-алгебры Хопфа.* — УМН, **51**, вып. 4 (1996), 149–150.
5. V. M. Buchstaber, E. G. Rees, *Multivalued groups, their representations and Hopf algebras.* — Transformation Groups, **2**, No. 4 (1997), 325–349.

6. V. M. Buchstaber, E. G. Rees, *Multivalued groups, n-Hopf algebras and n-ring homomorphisms*, in: Lie groups and Lie Algebras. Netherlands, Kluwer Academic Publishers (1998), pp. 85–107.
7. V. M. Buchshtaber, A. P. Veselov, *Integrable correspondences and algebraic representations of multivalued groups.* — Internat. Math. Res. Notes, **8** (1996), 381–400.
8. С. А. Евдокимов, И. Н. Пономаренко, А. М. Вершик. *Алгебры в планшерелевой двойственности и алгебраическая комбинаторика.* — Функц. анал. и его прилож., **31**, вып. 4 (1997), 34–46.
9. П. В. Ягодовский, *Линейная деформация дискретных групп и конструкции многозначных групп.* — Изв. РАН, сер. мат., **64**, вып. 5 (2000), 197–224.
10. П. В. Ягодовский, *Представления многозначных групп на графах.* — УМН, **57**, вып. 1 (2002), 143–144.
11. П. В. Ягодовский, *Бикосетные группы и симметрические графы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **292** (2002), 161–174.

Yagodovsky P. V. σ-Extensions of discrete multivalued groups.

The aim of this paper is to discover new classes of discrete multivalued groups and to find criteria for recognition of coset groups. It is shown in [11] that the set of discrete coset groups with one generator is the union of categories. These categories are indexed by the set of special symmetric graphs. Bearing in mind our aim, we define σ-extensions of discrete multivalued groups. Our main result is as follows: the construction of σ-extensions of discrete multivalued groups is equivariant with respect to functors of these categories.

Финансовая академия
при Правительстве РФ
E-mail: petryag@rol.ru

Поступило 23 сентября 2004 г.