Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 325, 2005 г.

Н. М. Боголюбов

$XX0$ ЦЕПОЧКА ГЕЙЗЕНБЕРГА И СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ

1. Введение

Задача перечисления маршрутов, выбранных "зловредными пешеходами" в результате случайных блужданий по одномерной решетке, была сформулирована М. Фишером [1] и с тех пор привлекает большое внимание как физиков, так и математиков (см. работы [2–9] и ссылки в них). Пешеходы называются зловредными потому, что встретившись в одной точке они уничтожают друг друга. Таким образом, задача состоит в перечислении всех допустимых траекторий, которые не пересекаются друг с другом. Схожие проблемы возникают в теориях доменных стенок [10], направленного протекания [11], самоорганизующейся критичности [12] и в теории полимеров [13]. В последнее время обнаружена связь задачи о блужданиях по решетке с теориями растущих диаграмм Юнга и случайных матриц [14, 15].

Случайные блуждания без взаимопересечений можно рассматривать как стохастическую эволюцию частиц на одномерной решетке. Пространственно-временные траектории частиц это двумерные направленные пути, которые не могут поворачивать назад и пересекаться.

Обычно рассматриваются два характерных случая: модель блужданий со случайными поворотами и модель одновременных шагов. В модели блужданий со случайными поворотами в каждый момент времени только один из пешеходов, выбранный случайно, делает один шаг вправо или влево, а остальные остаются на том же месте. Ограничение на перемещения состоит в том, что два пешехода не могут занимать одновременно один и тот же узел. В модели одновременных шагов каждый из пешеходов должен сдвинуться на один шаг вправо или влево с аналогичным ограничением.

В нашей статье мы покажем, что временные многочастичные корреляционные функции $XX0$ цепочки Гейзенберга по ферромагнитному состоянию можно рассматривать как производящие функции маршрутов определенной длины в модели случайных поворотов. Будут получены явные ответы для корреляционных функций на бесконечной, полубесконечной и конечной решетках и исследовано их асимптотическое поведение при больших значениях времени.

2. $XX0$ цепочка Гейзенберга

Ферромагнитная $XX0$ модель Гейзенберга, описывающая систему взаимодействующих спинов $1/2$ на решетке, определяется гамильтонианом

$$\hat{H} = -\sum_{n,m} \Delta_{nm} \sigma_n^+ \sigma_m^- . \tag{1}$$

В этом выражении суммирование ведется по всем узлам решетки. Спиновые 2×2 матрицы Паули $\sigma_n^\pm, \sigma_n^z$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [\sigma_n^+, \sigma_m^-] &= \sigma_n^z \delta_{nm}, \\ [\sigma_n^z, \sigma_m^\pm] &= \pm 2\sigma_n^\pm \delta_{nm}. \end{aligned} \tag{2}$$

Взаимодействие спинов задается матрицей Δ, которая называется обменным интегралом. Для модели на одномерной решетке с взаимодействием ближайших соседей ее можно выбрать в виде

$$\Delta_{nm} = \delta_{n+1,m} + \delta_{n-1,m}. \tag{3}$$

Мы рассмотрим модель на одномерной решетке со свободными концами: на бесконечной $-\infty < n < \infty$, на полубесконечной $0 < n < \infty$ и на конечной $0 < n \le N$.

Состояние со всеми спинами направленными вверх

$$| \Uparrow \rangle = \otimes_n \, |\uparrow\rangle_n \equiv \otimes_n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_n , \tag{4}$$

где произведение ведется по всем узлам решетки, называется ферромагнитным состоянием. Ферромагнитное состояние аннулируется оператором (1), т.е.

$$\hat{H} \, |\Uparrow\rangle = 0, \tag{5}$$

и удовлетворяет следующим свойствам. Это состояние нормировано: $\langle \Uparrow | \Uparrow \rangle = 1$. Оно уничтожается оператором σ_m^+ с произвольным m: $\sigma_m^+ | \Uparrow \rangle = 0$; и является собственным вектором матрицы

σ_m^z: $\sigma_m^z | \Uparrow\rangle = | \Uparrow\rangle$. Матрица σ_m^- переворачивает m-й спин в произведении (4): $\sigma_m^- | \uparrow\rangle_m = | \downarrow\rangle_m$.

Непрерывная временная эволюция состояний, полученных путем опрокидывания одного из спинов, $\sigma_l^- \,|\Uparrow\rangle$, определяется одночастичной корреляционной функцией

$$F_{jl}(t) \equiv \langle\Uparrow|\, \sigma_j^+ e^{-t\hat{H}} \sigma_l^- \,|\Uparrow\rangle. \qquad (6)$$

Продифференцировав $F_{jl}(t)$ по t и воспользовавшись коммутационным соотношением

$$[-\hat{H}, \sigma_m^-] = \sum_n \Delta_{mn} \sigma_n^- \sigma_m^z, \qquad (7)$$

где Δ_{mn} является матричным элементом матрицы (3), мы получим равенство

$$\frac{d}{dt} F_{jl}(t) = -\langle\Uparrow|\, \sigma_j^+ e^{-t\hat{H}} \hat{H} \sigma_l^- \,|\Uparrow\rangle = \\ = \sum_m \Delta_{lm} \langle\Uparrow|\, \sigma_j^+ e^{-t\hat{H}} \sigma_m^- \,|\Uparrow\rangle = \sum_m \Delta_{lm} F_{jm}(t).$$

Следовательно, корреляционная функция удовлетворяет дифференциально-разностному уравнению

$$\frac{d}{dt} F_{jl}(t) = F_{j\,l+1}(t) + F_{j\,l-1}(t) \qquad (8)$$

при фиксированном индексе j и такому же уравнению по индексу j при фиксированном l. Граничные условия определяются типом рассматриваемой решетки: для полубесконечной решетки $F_{jl} = 0$ при $j, l = 0$; для модели на решетке конечной длины $F_{jl} = 0$ при $j, l = 0$ и $j, l = N+1$. Начальное условие определяется равенством $F_{jl}(0) = \delta_{jl}$.

Коррелятор $F_{jl}(t)$ можно рассматривать как производящую функцию путей, проделанных пешеходом в результате случайных блужданий. Действительно, разлагая корреляционную функцию по степеням t, имеем

$$F_{jl}(t) = \sum_M \frac{t^M}{M!} \langle\Uparrow|\, \sigma_j^+ (-\hat{H})^M \sigma_l^- \,|\Uparrow\rangle. \qquad (9)$$

Применяя затем коммутационное соотношение (7), получим

$$(-\hat{H})^M \sigma_l^- \,|\Uparrow\rangle =(-\hat{H})^{M-1}[-\hat{H}, \sigma_l^-]\,|\Uparrow\rangle = (-\hat{H})^{M-1}\sum_{n_1}\Delta_{n_1 l}\sigma_{n_1}^-\,|\Uparrow\rangle =$$
$$= \sum_{n_1,\dots,n_M}\Delta_{n_M n_{M-1}}\dots\Delta_{n_2 n_1}\Delta_{n_1 l}\sigma_{n_M}^-\,|\Uparrow\rangle. \qquad (10)$$

Это равенство можно проинтерпретировать следующим образом. Положение частицы на решетке задается состоянием со спином направленным вниз, между тем свободные узлы соответствуют состояниям со спином вверх. Частица стартует с произвольно выбранного начального узла l и после первого шага перемещается в один из узлов, определяемых матрицей Δ из формулы (3), а именно, на один шаг влево или на один шаг вправо. После M шагов все допустимые траектории частицы, стартовавшей из узла l, задаются произведением $\sum\limits_{n_1,\dots,n_M}\Delta_{n_M n_{M-1}}\dots\Delta_{n_2 n_1}\Delta_{n_1 l}$. Умножение равенства (10) слева на $\langle\Uparrow|\,\sigma_j^+$ зафиксирует конечную точку траектории, так как спиновые состояния ортогональны. Набор последовательных ребер решетки, соединяющий вершины l и j, называется решеточным маршрутом или решеточным путем, соединяющим точки l и j. Число всех решеточных маршрутов $|P_M(l\to j)|$ из l в j длины M равно среднему $\langle\Uparrow|\,\sigma_j^+(-\hat{H})^M\sigma_l^-\,|\Uparrow\rangle$:

$$|P_M(l\to j)| = \langle\Uparrow|\,\sigma_j^+(-\hat{H})^M\sigma_l^-\,|\Uparrow\rangle = \sum_{n_1,\dots,n_{M-1}}\Delta_{j n_{M-1}}\dots\Delta_{n_2 n_1}\Delta_{n_1 l}, \qquad (11)$$

причем если $|j-l|<M$, то $|P_M(l\to j)|=0$.

Из уравнения (8) и определения (11) следует, что функция $|P_M(l\to j)|$ удовлетворяет уравнению

$$|P_{M+1}(l\to j)| = |P_M(l+1\to j)| + |P_M(l-1\to j)|. \qquad (12)$$

Одномерную траекторию частицы можно рассматривать как проекцию на пространственную ось ее двумерной пространственно-временной траектории. Используются два стандартных вида изображений двумерных решеточных путей. Рассмотрим двумерную квадратную решетку, повернутую на 45^o. В этом случае направления элементарных шагов для одного пешехода определяются единичными векторами $e_x=(e_t,e_s)$ и $e_y=(e_t,-e_s)$ (см. рис. 1). В другом представлении направления элементарных шагов пешехода задаются векторами $(e_t,e_s),(e_t,-e_s)$ и $(e_t,0)$; это

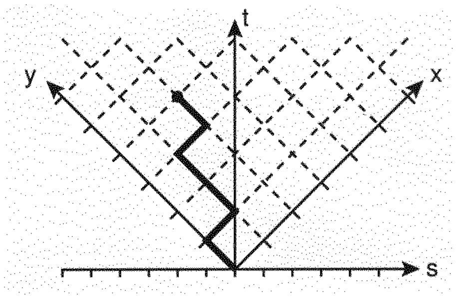

Рис. 1. Пространственно-временная траектория частицы.

представление удобно для изображения путей в модели блужданий со случайными поворотами (см. рис. 2).

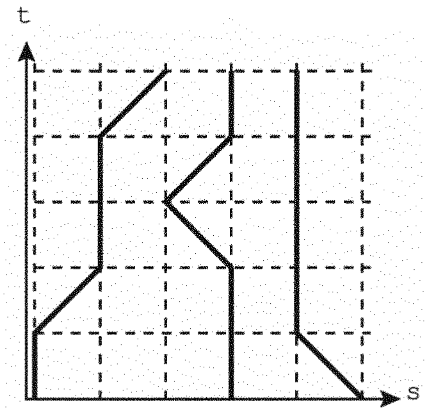

Рис. 2. Типичная конфигурация маршрутов в модели блужданий со случайными поворотами.

Рассмотрим теперь многочастичную корреляционную функцию

$$F_{j_1,j_2,\ldots,j_K;l_1,l_2,\ldots,l_K}(t) = \langle\Uparrow|\ \sigma^+_{j_1}\sigma^+_{j_2}\ldots\sigma^+_{j_K}e^{-t\hat{H}}\sigma^-_{l_1}\sigma^-_{l_2}\ldots\sigma^-_{l_K}\ |\Uparrow\rangle. \tag{13}$$

Этот коррелятор является производящей функцией маршрутов в модели блужданий со случайными поворотами. Действительно, воспользовавшись коммутатором

$$[\hat{H}, \sigma_{l_1}^- \sigma_{l_2}^- ... \sigma_{l_K}^-] = \sum_{k=1}^{K} \sigma_{l_1}^- ... \sigma_{l_{k-1}}^- [\hat{H}, \sigma_{l_k}^-] \sigma_{l_{k+1}}^- ... \sigma_{l_K}^-, \qquad (14)$$

мы видим, что среднее $\langle \Uparrow | \; \sigma_{j_1}^+ \sigma_{j_2}^+ ... \sigma_{j_K}^+ (-\hat{H})^M \sigma_{l_1}^- \sigma_{l_2}^- ... \sigma_{l_K}^- \; | \Uparrow \rangle$ равно числу всех допустимых конфигураций путей, которые проделали K пешеходов, стартовавших из узлов $l_1 > l_2 > ... > l_K$ и после M шагов прибывших в узлы $j_1 > j_2 > ... > j_K$. Выполнение условия, что пути не пересекутся, обеспечивается свойством матриц Паули $(\sigma_k^{\pm})^2 = 0$.

Дифференцируя выражение (13) по t и применяя (14), мы получим уравнение для производящей функции

$$\frac{d}{dt} F_{j_1,...,j_K;l_1,...,l_K}(t) = \qquad (15)$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \left\{ F_{j_1,...,j_K;l_1,l_2,...,l_{k+1},...,l_K}(t) + F_{j_1,...,j_K;l_1,l_2,...,l_{k-1},...,l_K}(t) \right\}$$

при фиксированных индексах j_k и аналогичное уравнение на индексы j при фиксированных l_k. Условием того, что пути не пересекаются, является равенство $F_{j_1,...,j_K;l_1,l_2,...,l_K}(t) = 0$, если $l_k = l_p, j_k = j_p$ для любого $1 \leq j, l \leq K$. Легко проверить, что решение уравнения (15) представимо в детерминантной форме

$$F_{j_1,...,j_K;l_1,...,l_K}(t) = \det \left\{ F_{j_r l_s}(t) \right\}_{r,s=1,...,K}, \qquad (16)$$

где $F_{jl}(t)$ это одночастичные корреляционные функции (6), удовлетворяющие уравнению (8). Начальное условие определяется равенством $F_{j_1,...,j_K;l_1,...,l_K}(0) = \prod_{m=1}^{K} \delta_{j_m l_m}$.

3. На оси

Для бесконечной в обе стороны решетки решением уравнения (8) является модифицированная функция Бесселя

$$F_{jl}(t) = I_{l-j}(2t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2t \cos\theta} e^{i(l-j)\theta} d\theta. \qquad (17)$$

Разлагая модифицированную функцию Бесселя по степеням t, получим

$$I_{l-j}(2t) = \sum_{M \geq |l-j|}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{M-j+l}{2}\right)! \left(\frac{M+j-l}{2}\right)!} t^M, \tag{18}$$

где суммирование ведется по M, удовлетворяющим условию $M + |j - l| = 0 \pmod 2$. С другой стороны, из разложения (9) и определения (11) следует, что

$$|P_M(l \to j)| = \frac{M!}{\left(\frac{M-j+l}{2}\right)! \left(\frac{M+j-l}{2}\right)!}. \tag{19}$$

Это выражение представляет собой хорошо известную биномиальную формулу для числа всех решеточных путей $|P_M(l \to j)|$ из l в j длины M на бесконечной решетке.

В пределе больших времен $t \to \infty$ асимптотика производящей функции числа маршрутов при фиксированном значении $j-l$ определяется асимптотикой модифицированной функции Бесселя

$$F_{jl}(t) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{2t} \left\{ 1 - \frac{4(j-l)^2 - 1}{4t} + \ldots \right\}. \tag{20}$$

Степенное убывание производящей функции при больших значениях t характеризуется критическим индексом ξ. Из (20) следует, что $\xi = \frac{1}{2}$.

Решением уравнения (15) для производящей функции маршрутов, проделанных K пешеходами со случайными поворотами, стартовавших из узлов $l_1 > l_2 > \ldots > l_K$ и финишировавших в узлах $j_1 > j_2 > \ldots > j_K$, является функция (16):

$$F_{j_1,\ldots,j_K;l_1,\ldots,l_K}(t) = \sum_{\pi(s_1,\ldots,s_K)} (-1)^{Z(\pi)} F_{j_1 l_{s_1}}(t) F_{j_2 l_{s_2}}(t) \ldots F_{j_K l_{s_K}}(t), \tag{21}$$

где суммирование ведется по всем перестановкам индексов s, $Z(\pi)$ – четность перестановки, а функции $F_{j_k l_{s_k}}(t)$ это функции

Бесселя (17). Подстановка (17) в (21) приводит к выражению

$$
\begin{aligned}
&F_{j_1,\ldots,j_K;l_1,\ldots,l_K}(t) = \qquad (22)\\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^K \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \ldots \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\theta_K e^{2t\sum_{m=1}^K \cos\theta_m} \det\left\{e^{i(l_s-j_r)\theta_r}\right\}_{r,s=1,\ldots,K} =\\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^K \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \ldots \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\theta_K e^{2t\sum_{m=1}^K \cos\theta_m} \det\left\{e^{i(l_s+K)\theta_r}\right\} \prod_{r=1}^{K} e^{-i(j_r+K)\theta_r}.
\end{aligned}
$$

Определитель в подынтегральном выражении можно выразить через функцию Шура (см. [16])

$$
\begin{aligned}
s_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_K) &\equiv \frac{\det_{1\le j,k\le K}(x_j^{\lambda_k+K-k})}{\det_{1\le j,k\le K}(x_j^{K-k})} = \qquad (23)\\
&= \det_{1\le j,k\le K}(x_j^{\lambda_k+K-k}) \prod_{1\le j<k\le K} (x_j - x_k)^{-1},
\end{aligned}
$$

где разбиение $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_K)$ есть последовательность целых неотрицательных чисел, расположенных в порядке нестрогого убывания $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_K \ge 0$. Благодаря трансляционной инвариантности мы всегда можем положить $l_1 > l_2 > \ldots > l_K \ge -K$ для начального расположения пешеходов. Тогда

$$
\begin{aligned}
F_{j_1,\ldots,j_K;l_1,\ldots,l_K}(t) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^K \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \ldots \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\theta_K e^{2t\sum_{m=1}^K \cos\theta_m} \times \qquad (24)\\
&\times s_\lambda(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \ldots, e^{i\theta_K}) \prod_{1\le j<k\le K} (e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}) \prod_{r=1}^{K} e^{-i(j_r+K)\theta_r},
\end{aligned}
$$

где части разбиения λ определяются равенством $\lambda_m = l_m + m$. Точками завершения путей выберем $j_r = -r$. Просуммировав по перестановкам всех θ_i и принимая во внимание тот факт, что произведение разностей в подынтегральном выражении является антисимметричной функцией, мы можем представить произведение

$K!\prod\limits_{r=1}^{K} e^{-i(K-r)\theta_r}$ через определитель Вандермонда. Это дает

$$F_{j_1,\dots,j_K;l_1,\dots,l_K}(t) = \frac{1}{K!}\left(\frac{e^{2t}}{2\pi}\right)^K \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \dots \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\theta_K e^{-2t\sum_{m=1}^{K}(1-\cos\theta_m)} \times$$
$$\times s_\lambda(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_K}) \prod_{1\le j<k\le K} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2. \qquad (25)$$

Для вычисления ведущего члена асимптотики производящей функции в пределе больших времен $t \to \infty$ можно аппроксимировать интеграл в (25) интегралом

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\theta_1 \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\theta_K e^{-t\sum\limits_{m=1}^{K}\theta_m^2} \prod_{1\le j<k\le K} |\theta_j - \theta_k|^2 =$$
$$= (2\pi)^{\frac{K}{2}} (2t)^{-\frac{K^2}{2}} \prod_{m=1}^{K} m!.$$

Этот интеграл является частным случаем интеграла Мехты в теории гауссовых ансамблей случайных матриц [17]. Таким образом, ведущий член асимптотики производящей функции маршрутов K пешеходов со случайными поворотами при больших временах равен

$$F_{j_1,\dots,j_K;l_1,\dots,l_K}(t) \sim At^{-\frac{K^2}{2}} e^{2tK}, \qquad (26)$$

с амплитудой

$$A = \frac{\prod_{m=1}^{K-1} m!}{2^{\frac{K(K+1)}{2}} \pi^{\frac{K}{2}}} s_\lambda(1,1,\dots,1) = \frac{\prod_{m=1}^{K-1} m!}{2^{\frac{K(K+1)}{2}} \pi^{\frac{K}{2}}} \prod_{1\le j<k\le K} \frac{l_j - l_k}{k-j}. \qquad (27)$$

Здесь мы воспользовались хорошо известной формулой (см. [16])

$$s_\lambda(1,1,\dots,1) = \prod_{1\le j<k\le K} \frac{\lambda_j - j - \lambda_k + k}{k-j}.$$

Из (20) следует, что критический индекс γ, характеризующий степенное убывание функции $F_{j_1,\dots,j_K;l_1,\dots,l_K}(t)$, равен $\gamma = K^2/2$.

4. На полуоси

Решение F^{si}_{jl} уравнения (8) на полуоси $(0 < j, l < \infty)$ удовлетворяет граничному условию $F^{si}_{jl}(t) = 0$ для $j, l = 0$ и равно, соответственно,

$$F^{si}_{jl}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2t\cos\theta}\sin(j\theta)\sin(l\theta)d\theta = \\ = I_{l-j}(2t) - I_{l+j}(2t). \tag{28}$$

Число путей из l в j длины M на полуоси определяется следующим выражением:

$$|P^{si}_M(l \to j)| = |P_M(l \to j)| - |P_M(l \to -j)|, \tag{29}$$

где $|P_M(l \to j)|$ есть (19). Асимптотика производящей функции при больших значениях времени $t \to \infty$ равна

$$F^{si}_{jl}(t) \sim 2jl\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{2t}}{t^{\frac{3}{2}}}, \tag{30}$$

с критическим индексом $\xi_{si} = 3/2$.

Решением уравнения (15) для производящей функции маршрутов K пешеходов со случайными поворотами, стартовавших из узлов $l_1 > l_2 > ... > l_K > 0$ и финишировавших в узлах $j_1 > j_2 > ... > j_K > 0$, является функция

$$F^{si}_{j_1,\ldots,j_K;l_1,\ldots,l_K}(t) = \tag{31}$$
$$= \left(\frac{1}{\pi}\right)^K \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \ldots \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_K e^{2t\sum_{m=1}^K \cos\theta_m} \det\{\sin(j_r\theta_r)\sin(l_s\theta_r)\}_{r,s=1,\ldots,K} =$$
$$= \left(\frac{1}{\pi}\right)^K \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \ldots \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_K e^{2t\sum_{m=1}^K \cos\theta_m} \det\{\sin(l_s\theta_r)\} \prod_{r=1}^K \sin(j_r\theta_r).$$

Воспользовавшись определением характера неприводимого представления симплектической алгебры Ли, соответствующего разбиению λ,

$$sp_\lambda(x_1, x_2, ..., x_K) \equiv \frac{\det_{1\le j,k\le K}(x_j^{\lambda_k+K-k+1} - x_j^{-(\lambda_k+K-k+1)})}{\det_{1\le j,k\le K}(x_j^{K-k+1} - x_j^{-(K-k+1)})}, \tag{32}$$

мы можем записать (31) в виде

$$F^{si}_{j_1,\dots,j_K;l_1,\dots,l_K}(t) =$$
$$= \left(\frac{1}{\pi}\right)^K \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \dots \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_K \, e^{2t\sum\limits_{m=1}^{K}\cos\theta_m} sp_\lambda(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_K}) \times$$
$$\times \det\left\{\sin\left((K-s+1)\theta_r\right)\right\}_{r,s=1,\dots,K} \prod_{r=1}^{K} \sin(j_r\theta_r),$$

где части разбиения λ равны $\lambda_m = l_m - K + m - 1$. Выбирая координаты конечных положений в виде $j_r = K - r + 1$ и антисимметризуя произведение $\prod\limits_{r=1}^{K} \sin(j_r\theta_r)$ в подынтегральном выражении, получим

$$F^{si}_{j_1,\dots,j_K;l_1,\dots,l_K}(t) = \frac{1}{K!}\left(\frac{1}{\pi}\right)^K \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \dots \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_K \, e^{2t\sum_{m=1}^{K}\cos\theta_m} \times$$
$$\times sp_\lambda(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_K}) \left\{\det\left(\sin(K-s+1)\theta_r\right)\right\}^2. \qquad (33)$$

Определитель в подынтегральном выражении может быть вычислен [6]:

$$\det\left\{\sin(s\theta_r)\right\}_{r,s=1,\dots,K} = 2^{K(K-1)} \prod_{r=1}^{K} \sin(\theta_r)$$
$$\prod_{1\le j<k\le K} \sin\left(\frac{\theta_j - \theta_k}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_j + \theta_k}{2}\right).$$

Окончательное выражение для производящей функции маршрутов K пешеходов со случайными поворотами на полубесконечной оси, вышедших из узлов $l_1 > l_2 > \dots > l_K > 0$ и прибывших в узлы

$j_r = K - r + 1,\ r = 1, ..., K$, имеет вид

$$F^{si}_{j_1,...,j_K;l_1,...,l_K}(t) = \\ = \frac{2^{2K(K-1)}}{K!}\left(\frac{e^{2t}}{\pi}\right)^K \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 ... \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\theta_K e^{-2t\sum_{m=1}^K (1-\cos\theta_m)} \times \\ \times sp_\lambda(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, ..., e^{i\theta_K}) \prod_{r=1}^K \sin^2(\theta_r) \\ \prod_{1\leq j<k\leq K} \sin^2\left(\frac{\theta_j - \theta_k}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta_j + \theta_k}{2}\right). \tag{34}$$

В пределе $t \to \infty$ аппроксимируем интеграл в этом выражении интегралом, вычисленным в работе [17]:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\theta_1 ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\theta_K e^{-t\sum_{m=1}^K \theta_m^2} \prod_{1\leq j<k\leq K} |\theta_j^2 - \theta_k^2|^2 \prod_{j=1}^K |\theta_j|^2 = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{K}{2}}(2t)^{\frac{K(2K+1)}{2}}} \prod_{m=1}^K (2m)!.$$

Для ведущего члена асимптотики производящей функции получим следующее выражение:

$$F^{si}_{j_1,...,j_K;l_1,...,l_K}(t) \sim Bt^{-\frac{K(2K+1)}{2}} e^{2tK}, \tag{35}$$

с амплитудой

$$B = \frac{\prod_{m=1}^K (2m)!}{2^{K(K+1)}\pi^{\frac{3K}{2}} K!} sp_\lambda(1, 1, ..., 1) = \\ = \frac{\prod_{m=1}^K (2m)!}{2^{K(K+1)}\pi^{\frac{3K}{2}} K!} \prod_{1\leq j<k\leq K} \frac{l_j - l_k}{k - j} \prod_{1\leq j\leq k\leq K} \frac{l_j + l_k - K}{K + 2 - k - j}. \tag{36}$$

Мы воспользовались формулой

$$sp_\lambda(1, 1, ..., 1) = \\ = \prod_{1\leq j<k\leq K} \frac{\lambda_j - j - \lambda_k + k}{k - j} \prod_{1\leq j\leq k\leq K} \frac{\lambda_j + \lambda_k + K - j - k + 2}{K + 2 - k - j},$$

верной для симплектического характера.

Из (35) следует, что критический индекс производящей функции маршрутов K пешеходов со случайными поворотами на полубесконечной решетке равен $\gamma_{si} = \frac{K(2K+1)}{2}$.

5. На отрезке

Решение $F^s_{jl}(t)$ уравнения (8) на отрезке $(0 < j, l \leq N)$ удовлетворяет граничному условию $F^s_{jl}(t) = 0$ для $j, l = 0, N+1$ и определяет производящую функцию для допустимых маршрутов пешехода на конечной решетке:

$$F^s_{jl}(t) = \frac{2}{N+1} \sum_{k=1}^{N} e^{2t\cos(\pi k/(N+1))} \sin\left[\frac{\pi k j}{N+1}\right] \sin\left[\frac{\pi k l}{N+1}\right]. \qquad (37)$$

Число всех путей из l в j длины M на конечной решетке равно соответственно (см. [18])

$$|P^s_M(j \to l)| = \frac{2}{N+1} \sum_{k=1}^{N} \left(2\cos\frac{\pi k}{N+1}\right)^M \sin\left[\frac{\pi k j}{N+1}\right] \sin\left[\frac{\pi k l}{N+1}\right].$$

Для K пешеходов со случайными поворотами $(K < N)$ на решетке конечной длины, стартовавших из узлов $N \geq l_1 > l_2 > \ldots > l_K > 0$ и прибывших в узлы $N \geq j_1 > j_2 > \ldots > j_K > 0$, производящая функция равна

$$\begin{aligned} &F^s_{j_1,\ldots,j_p;l_1,\ldots,l_p}(t) = \\ &= \left(\frac{2}{N+1}\right)^K \sum_{0 \leq k_1,\ldots,k_K \leq N} e^{2t\sum\limits_{m=1}^{K}\cos(\pi k_m/(N+1))} \times \qquad (39) \\ &\times \left(\prod_{m=1}^{K} \sin\left[\frac{\pi k_m j_m}{N+1}\right]\right) \det\left\{\sin\left[\frac{\pi k_r l_s}{N+1}\right]\right\}_{r,s=1,\ldots,K}. \end{aligned}$$

Для K пешеходов, стартовавших из узлов $N+1 > l_1 > l_2 > \ldots > l_K > 0$ и прибывших в узлы $j_r = K - r + 1$ $(r = 1, \ldots, K)$, производящая функция имеет вид

$$F^{s}_{j_1,\ldots,j_p;l_1,\ldots,l_p}(t) = \\ = \frac{2^{K^2}}{K!(N+1)^K} \sum_{0\le k_1,\ldots,k_K\le N} e^{2t\sum_{m=1}^{K}\cos(\pi k_m/(N+1))} \prod_{j=1}^{K} \sin^2\left(\frac{\pi k_j}{N+1}\right) \times \\ \times \prod_{1\le j<m\le K} \sin^2\left(\frac{\pi(k_j-k_m)}{2(N+1)}\right) \sin^2\left(\frac{\pi(k_j+k_m)}{2(N+1)}\right) \times \\ \times sp_\lambda(e^{i\frac{\pi k_1}{N+1}}, e^{i\frac{\pi k_2}{N+1}}, \ldots, e^{i\frac{\pi k_K}{N+1}}), \tag{40}$$

где части разбиения λ равны $\lambda_m = l_m - K + m - 1$.

6. Заключение

Представление Йордана–Вигнера

$$c_k = e^{i\pi\sum_{j<k}\sigma_j^-\sigma_j^+}\sigma_k^+, \quad c_k^\dagger = \sigma_k^- e^{-i\pi\sum_{j<k}\sigma_j^-\sigma_j^+},$$

где фермионные операторы $c_k, c_k^\dagger$ удовлетворяют антикоммутационным соотношениям $c_k c_m^\dagger + c_m^\dagger c_k = \delta_{mk}$, $c_k c_m + c_m c_k = c_k^\dagger c_m^\dagger + c_m^\dagger c_k^\dagger = 0$, позволяет представить гамильтониан $XX0$ цепочки в виде

$$H = -\sum_n (c_n^\dagger c_{n+1} + c_{n+1}^\dagger c_n).$$

Таким образом, модель блужданий со случайными поворотами является фермионной моделью. Эта аналогия была отмечена еще в ранней работе [10]. Однако представление производящих функций для числа подобных путей в виде временных корреляционных функций, насколько мне известно, не рассматривалось.

Я признателен К. Малышеву за дискуссии и комментарии. Эта работа частично поддержана CRDF грантом RUMI-2622-ST-04 и проектом РФФИ No. 04-01-00825.

Литература

1. M. E. Fisher, *Walks, walls, wetting and melting.* — J. Statist. Phys. **34** (1984), 667–729.
2. P. J. Forrester, *Exact solution of the lock step model of vicious walkers.* — J. Phys. A **23** (1990), 1259–1273.

3. P. J. Forrester, *Random walks and random permutations*, `arXiv:math.CO/9907037` (1999).
4. T. Nagao and P. J. Forrester, *Vicious random walkers and a discretization of Gaussian random matrix ensembles.* — Nuclear Phys. B **620** (2002), 551–565.
5. A. J. Guttmann, A. L. Owczarek, and X. G. Viennot, *Vicious walkers and Young tableaux.* I. *Without walls.* — J. Phys. A **31** (1998), 8123–8135.
6. C. Krattenthaler, A. J. Guttmann, and X. G. Viennot, *Vicious walkers, friendly walkers and Young tableaux.* II. *With a wall.* — J. Phys. A **33** (2000), 8835–8866.
7. C. Krattenthaler, A. J. Guttmann and X. G. Viennot, *Vicious walkers, friendly walkers and Young tableaux.* III. *Between two walls.* — J. Statist. Phys. **110** (2003), 1069–1086.
8. M. Katori and H. Tanemura, *Scaling limit of vicious walks and two-matrix model.* — Phys. Rev. E **66** (2002), 011105.
9. M. Katori, H. Tanemura, T. Nagao, and N. Komatsuda, *Vicious walk with a wall, noncolliding meanders, chiral and Bogoliubov–deGennes random matrices*, `arXiv:cond-mat/0303573` (2003).
10. D. Huse and M. Fisher, *Commensurate melting, domain walls, and dislocations.* — Phys. Rev. B **29** (1984), 239–270.
11. E. Domany and W. Kinzel, *Equivalence of cellular automata to Ising models and directed percolation.* — Phys. Rev. Lett. **53** (1984), 311–314.
12. P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, *Self-organized criticality, an explanation of* $1/f$ *noise.* — Phys. Rev. A **38** (1988), 364–374.
13. J. W. Essam and A. J. Guttmann, *Vicious walkers and directed polymer networks in general dimensions.* — Phys. Rev. E **52** (1995), 5849–5862.
14. K. Johansson, *Shape fluctuations and random matrices.* — Comm. Math. Phys. **209** (2000), 437–476.
15. M. Prähofer and H. Spohn, *Universal distributions for Growth Processes in 1+1 dimensions and random matrices.* — Phys. Rev. Lett. **84** (2000), 4882–4885.
16. И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла.* Мир, М. (1985).
17. M. L. Mehta, *Random Matrices.* Academic, New York (1991).
18. C. Jordan, *Calculus of Finite Differences.* — Chelsea Publ. Comp., New York (1965).

Bogoliubov N. M. $XX0$ Heisenberg chain and random walks.

The time-dependent correlation functions of the $XX0$ Heisenberg chain over the ferromagnetic vacuum are considered as the generating functions of random walks on a one-dimensional lattice with different boundary conditions. The long time asymptotic behaviour of these functions is studied.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: bogoliub@pdmi.ras.ru

Поступило 26 апреля 2005 г.