Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 324, 2005 г.

А. В. Шанин

ФОРМУЛА РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ

Введение

Формулы расщепления (в англоязычной литературе – "embedding formulae") представляют собой относительно новый тип точных соотношений в теории дифракции. Видимо, впервые формула такого типа была выведена М. Вильямсом для задачи о полосе [1]. Рассматривалась задача о дифракции акустической волны на одиночной полосе. Целью было построить дифракционный коэффициент, т.е. функцию $f(\varphi, \varphi_0)$, описывающую амплитуду поля в дальней зоне и зависящую от угла падения и угла рассеяния. Для этого М. Вильямс ввел пару вспомогательных функций, представлявших собой диаграммы направленности поля $f_{1,2}(\varphi)$, полученные при двух фиксированных значениях углах падения φ_0, а именно были выбраны скользящие углы падения $\varphi_0 = \pm\pi/2$. Путем манипулирования с интегральным уравнением, описывающим дифракционную задачу, М. Вильямс выразил дифракционный коэффициент $f(\varphi, \varphi_0)$ через вспомогательные функции $f_{1,2}(\varphi)$ достаточно простым образом. Поскольку дифракционный коэффициент зависит от двух угловых переменных, а каждая из вспомогательных функций лишь от одной, можно говорить о том, что в определенном смысле была произведена факторизация задачи.

Следующими, кто использовал формулу расщепления, были П. Мартин и Г. Викхам [2]. Они исследовали задачу дифракции плоской упругой волны на плоской круглой трещине в объеме твердого тела. В результе весьма громоздких выкладок была получена формула, выражающая решение задачи с произвольным углом падения через решение задачи с касательным углом падения.

После этого о формулах расщепления надолго забыли. Лишь недавно эта тема была реанимирована в работах Н. Биггса с соавторами [3, 4, 5], которые получили и проверили формулы расщепления для задач о дифракции на системе бесконечно тонких полос, полос конечной толщины, а также на стенках перфорированной трубы.

Во всех перечисленных работах формула расщепления оставалась весьма сложным соотношением, а процедура ее вывода не была прозрачной. В результате формулы расщепления, будучи, несомненно, ярким и полезным фактом теории дифракции, оставались не известными широкому кругу специалистов.

Автором настоящей работы в соавторстве с Р. Крастером был предложен более простой способ вывода формул расщепления для различных дифракционных задач [6, 7]. Несколько раньше идеи расщепления были применены Р. Крастером к решению дифференциальных уравнений Гойна [8].

Для нашего подхода характерен следующий выбор вспомогательных функций. В качестве вспомогательной задачи решается задача с точечным источником, расположенным вблизи края (ребра) рассеивателя. Решение такой вспомогательной задачи ниже называется *краевой функцией Грина*. Отметим, что формулировка вспомогательной задачи связана с предельным переходом, поскольку непосредственно разместить источник в ребре рассеивателя нельзя. Однако, несмотря на это, данный подход представляется наиболее физически прозрачным.

Целью настоящей работы является вывод формулы расщепления для случая дифракции электромагнитной волны на плоском препятствии. Для этого мы используем метод, предложенный ранее для акустических волн, слегка модифицируя его с учетом векторного характера электромагнитного поля.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о дифракции плоской электромагнитной волны на плоском бесконечно тонком идеально проводящем рассеивателе S, расположенном в плоскости (x, y). Край рассеивателя Γ представляет собой достаточно гладкую кривую. На этой кривой задана координата l, представляющая собой длину вдоль кривой, отсчитываемую от произвольной точки.

В каждой точке контура построим единичный вектор η внутренней нормали к контуру в плоскости (x, y). Угол, который этот вектор составляет с осью x, обозначим как $\Theta(l)$ (см. Рис. 1).

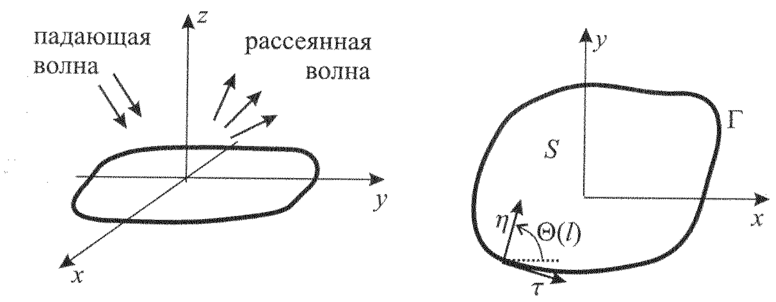

Рис. 1. Геометрия задачи.

Вблизи каждой точки края введем локальные цилиндрические координаты. Одна из этих координат есть l, две другие — ρ и α (см. Рис. 1). Для корректного описания поля можно считать данные координаты криволинейными (с тем, чтобы в некоторой области край описывался линией $\rho = 0$).

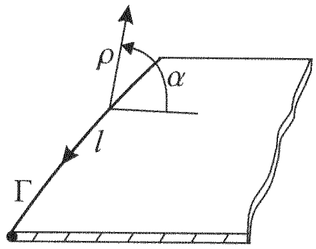

Рис. 2. Локальные цилиндрические координаты вблизи края рассеивателя.

В среде выполняются уравнения Максвелла для векторов электрического и магнитного полей:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathrm{i}k_0\mathbf{H}, \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\,\mathrm{i}k_0\mathbf{E}, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \tag{4}$$

где $k_0 = \Omega/c_0$, Ω – круговая частота (предполагается, что поля зависят от времени как $e^{-\mathrm{i}\Omega t}$), c_0 – скорость электромагнитных волн в среде.

Граничные условия на поверхности рассеивателя могут быть выписаны следующим образом:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{e}_z = 0, \tag{5}$$

где $\mathbf{e}_z$ – единичный вектор в направлении оси z. Данная запись означают, что касательная составляющая вектора $\mathbf{E}$ должна быть равна нулю.

На краю рассеивателя должно выполняться Мейкснеровское условие, выражающее факт отсутствия источников вблизи края. Это условие формулируется так. Требуют, чтобы энергия поля, сконцентрированная вблизи ребра, была конечной. Это означает, что комбинация $E^2 + H^2$ при $\rho \to 0$ растет как ρ^δ, где $\delta > -2$.

Сформулируем условие излучения для нашей задачи. Разобьем полное поле на падающее и рассеянное. Рассеянное поле вдали от рассеивателя должно представлять собой расходящуюся сферическую волну. Форма этой волны выписана ниже.

Введем обозначение для направления распространения и поляризации падающей и рассеянной волн. Будем обозначать направления падения и рассеяния точками ω_0 и ω на единичной сфере (см. Рис. 3). Каждой точке на сфере, очевидно, соответствует единичный вектор. Точки характеризуются сферическими координатами $\omega(\theta, \varphi)$, $\omega_0(\theta_0, \varphi_0)$.

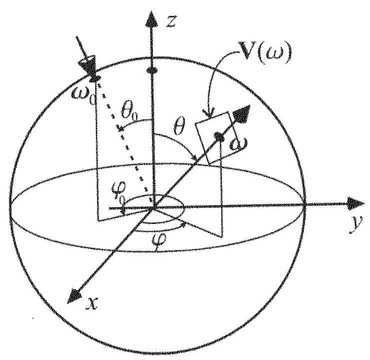

Рис. 3. Направления падения и рассеяния.

В каждой точке ω сферы построим касательную плоскость. Пусть $\mathbf{V}(\omega)$ – двумерное векторное пространство в этой плоскости. Амплитуду и поляризацию электромагнитной волны будем обозначать вектором $\mathbf{E}$, принадлежащим пространству $\mathbf{V}(\omega)$. Вектор $\mathbf{H}$ можно найти с помощью известного соотношения

$$\mathbf{H} = \omega \times \mathbf{E}. \tag{6}$$

Падающая волна во введенных обозначениях имеет вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp\{-\mathrm{i}k_0(x\sin\theta_0\cos\varphi_0 + y\sin\theta_0\sin\varphi_0 + z\cos\theta_0)\}, \tag{7}$$

$\mathbf{E}_0$ – амплитуда падающей волны.

Нашей целью будет построить формулу расщепления для тензорной функции $\mathbf{f}(\omega,\omega_0)$, принимающей значения в $\mathbf{V}(\omega)\otimes\mathbf{V}(\omega_0)$ и описывающей амплитуду рассеянной волны:

$$\mathbf{E}_{\mathrm{sc}}(r,\omega) = \frac{2\pi}{k_0 r} e^{\mathrm{i}k_0 r}\mathbf{f}(\omega,\omega_0)\mathbf{E}_0 + O(e^{\mathrm{i}k_0 r}(k_0 r)^{-2}) \qquad \text{при} \qquad r\to\infty, \tag{8}$$

где r – расстояние от начала координат.

Поясним последнюю формулу. Пусть в пространствах $\mathbf{V}(\omega)$ и $\mathbf{V}(\omega_0)$ введены некоторые ортонормированные базисы. Пусть E^i_{sc} – компоненты вектора поляризации рассеянной волны, спроектированного на $\mathbf{V}(\omega)$, а E^j_0 – компоненты вектора поляризации падающей волны. Мы ищем такой тензор f^{ij}, что

$$E^i_{\mathrm{sc}}(r,\omega) = \frac{2\pi}{k_0 r} e^{\mathrm{i}k_0 r}\sum_j f^{ij}(\omega,\omega_0)E^j_0 + O(e^{\mathrm{i}k_0 r}(k_0 r)^{-2}). \tag{9}$$

Функция $\mathbf{f}$ представляет собой дифракционный коэффициент (диаграмму рассеяния) рассеивателя.

Основные шаги, приводящие к формуле расщепления

Дадим представление о процедуре вывода формулы расщепления. На *первом (вспомогательном) шаге* мы выписываем краевые асимптотики поля, удовлетворяющего условию Мейкснера и граничным условиям. Эти асимптотики можно получить, используя решение задачи Зоммерфельда о полуплоскости. Также на этом шаге мы определяем *краевые функции Грина*, помещая источник асимптотически близко к краю рассеивателя. Очевидно, наличие источника в ребре приводит к тому, что краевые функции Грина не удовлетворяют краевому условию Мейкснера. Однако степень роста (т.е. показатель при ρ^{-1}) всего на единицу больше, чем степень роста решения, удовлетворяющего краевому условию. Мы будем называть такие функции *слегка сверхсингулярными*.

На *втором шаге* мы применяем к полю (к электрической и магнитной его составляющим) дифференциальный оператор

$$P_x = \frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}k_0 \sin\theta_0 \cos\varphi_0. \tag{10}$$

Заметим, что данный оператор обращает в нуль падающую волну. Результат действия оператора $P_x[\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ будем трактовать как новое электромагнитное поле. Это поле удовлетворяет уравнениям Максвелла и условию излучения. Более того, можно показать, что это поле слегка сверхсингулярно.

На *третьем шаге* мы доказываем лемму о том, что любое слегка сверхсингулярное решение уравнений Максвелла, удовлетворяющее условиям излучения, может быть представлено как линейная комбинация краевых функций Грина. Источники для краевых функций Грина неизвестны, однако они связаны с коэффициентом в старшем члене асимптотики исходного поля. Таким образом, функция $P_x[\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ оказывается представлена как свертка краевых функций Грина с неизвестными плотностями источников. Данное представление назовем *слабой формулой расщепления*.

На *четвертом шаге* мы выражаем неизвестные плотности источников через краевые функции Грина. Для этого используется теорема взаимности.

4. Краевая асимптотика поля

Краевая асимптотика поля имеет тот же вид, что и решение задачи Зоммерфельда о дифракции на полуплоскости. Составляющая поля, имеющая особенность на ребре, может быть разложена в сумму двух мод. В одной из них параллельно ребру электрическое поле, а в другой – магнитное:

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{E}_E \\ \mathcal{H}_E \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{E}_H \\ \mathcal{H}_H \end{array} \right\}, \tag{11}$$

где поля определяются следующими асимптотиками при $\rho \to 0$:

$$\mathcal{E}_E = \tau \frac{2C_E(l)}{\sqrt{\pi}} \rho^{1/2} \sin\frac{\alpha}{2} + O(\rho), \qquad \mathcal{H}_E = \frac{\nabla \times \mathcal{E}_E}{\mathrm{i}k_0}, \tag{12}$$

$$\mathcal{H}_H = \tau \frac{2C_H(l)}{\sqrt{\pi}} \rho^{1/2} \cos\frac{\alpha}{2} + O(\rho), \qquad \mathcal{E}_H = -\frac{\nabla \times \mathcal{H}_H}{\mathrm{i}k_0}. \tag{13}$$

Здесь τ – единичный вектор, касательный к контуру Γ и направленный в сторону увеличения l; $C_E(l)$ анд $C_H(l)$ – неизвестные коэффициенты. Отметим, что эти коэффициенты играют важную роль в дальнейшем изложении.

5. Краевые функции Грина

Введем пару краевых функций Грина $\mathbf{G}_E(x, y, z; \xi)$ и $\mathbf{G}_H(x, y, z; \xi)$:

$$\mathbf{G}_E = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{E}_E \\ \mathbf{H}_E \end{matrix} \right\}, \qquad \mathbf{G}_H = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{E}_H \\ \mathbf{H}_H \end{matrix} \right\}. \tag{14}$$

Определим поле $\mathbf{G}_E$ как результат следующего предельного перехода. Обозначим приближения к $\mathbf{E}_E$ и $\mathbf{H}_E$ как $\widehat{\mathbf{E}}_E$ и $\widehat{\mathbf{H}}_E$. Рассмотрим неоднородные уравнения Максвелла для $\widehat{\mathbf{E}}_E$ и $\widehat{\mathbf{H}}_E$:

$$\nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_E - \mathrm{i}k_0 \widehat{\mathbf{H}}_E = 0, \tag{15}$$

$$\nabla \times \widehat{\mathbf{H}}_E + \mathrm{i}k_0 \widehat{\mathbf{E}}_E = \frac{4\pi}{c_0} \widehat{\mathbf{j}}, \tag{16}$$

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbf{E}}_E = 0, \tag{17}$$

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbf{H}}_E = 0, \tag{18}$$

где

$$\widehat{\mathbf{j}} = \tau \frac{\pi^{1/2}}{\epsilon^{3/2}} \delta(l - \xi) \delta(\alpha - \pi) \delta(\rho - \epsilon), \tag{19}$$

т.е. $\widehat{\mathbf{j}}$ представляет собой элемент электрического тока, расположенный на расстоянии ϵ от ребра. Соответствующая точка на ребре имеет координату $l = \xi$ (см. Рис. 4). Зависимость амплитуды тока от ϵ выбрана таким образом, чтобы поле на фиксированном расстоянии от ребра имело конечный предел при $\epsilon \to 0$. Уравнения (15)–(18) рассматриваются совместно с краевыми условиями и условиями излучения.

Определим $\mathbf{E}_E$ и $\mathbf{H}_E$ как пределы:

$$\mathbf{E}_E = \lim_{\epsilon \to 0} \widehat{\mathbf{E}}_E, \qquad \mathbf{H}_E = \lim_{\epsilon \to 0} \widehat{\mathbf{H}}_E. \tag{20}$$

Рассмотрим краевую асимптотику функции $\mathbf{G}_E$. В силу того, что источник сосредоточен вблизи одной точки границы, поле имеет

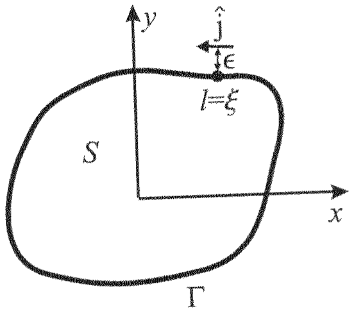

Рис. 4. Положение источника для краевой функции Грина.

весьма сложную структуру вдоль координаты l. Эта структура для нас не будет представлять интереса, поэтому избавимся от нее, рассмотрев интеграл типа свертки

$$\mathbf{I}(x,y,z) = \int h(\xi)\mathbf{G}_E(x,y,z;\xi)d\xi,$$

где $h(\xi)$ – произвольная весовая функция, достаточно гладкая везде и не равная нулю на небольшом отрезке ребра.

Рассмотрим малую окрестность точки ребра $l=\xi$. Вернемся к предельной процедуре и построим приближение к решению при малом, но конечном ϵ в этой окрестности.

В малой окрестности ребра неоднородные уравнения Максвелла могут быть приближенно сведены к двумерному уравнению Пуассона:

$$\Delta_\perp E_\tau = -h(\xi)\frac{4\pi^{3/2}}{c_0\epsilon^{3/2}}\delta(\alpha-\pi)\delta(\rho-\epsilon), \tag{21}$$

где $\Delta_\perp$ – лапласиан в плоскости $l=\xi$.

Уравнение (21) может быть решено методом конформных отображений. Принимая во внимание граничные условия, находим:

$$E_\tau \approx -\frac{2h(\xi)}{c_0}\sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}}\,\mathrm{Re}[\log(\sqrt{\kappa}-\sqrt{\epsilon})-\log(\sqrt{\kappa}+\sqrt{\epsilon})], \tag{22}$$

где $\kappa=\rho(\mathrm{i}\sin\alpha-\cos\alpha)$.

Вычисляя внешнюю асимптотику поля при $\epsilon\to 0$, получаем следующее представление электрической составляющей в $\mathbf{I}$:

$$\mathbf{E} = \tau\frac{4\sqrt{\pi}h(l)}{c_0}\rho^{-1/2}\sin\frac{\alpha}{2}+O(\rho) \qquad \text{при} \qquad \rho\to 0. \tag{23}$$

Форма магнитного поля может быть получена из соотношения (15).

Аналогично строятся компоненты $\mathbf{E}_H$ и $\mathbf{H}_H$ второй краевой функции Грина $\mathbf{G}_H$. Приближения к ней, а именно функции $\widehat{\mathbf{E}}_H$ и $\widehat{\mathbf{H}}_H$, строятся как решения неоднородных уравнений Гельмгольца:

$$\nabla \times \widehat{\mathbf{E}}_H - \mathrm{i}k_0 \widehat{\mathbf{H}}_H = \frac{4\pi}{c_0}\widehat{\mathbf{k}}, \tag{24}$$

$$\nabla \times \widehat{\mathbf{H}}_H + \mathrm{i}k_0 \widehat{\mathbf{E}}_H = 0, \tag{25}$$

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbf{E}}_H = 0, \tag{26}$$

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbf{H}}_H = 0, \tag{27}$$

где

$$\widehat{\mathbf{k}} = \tau \frac{\pi^{1/2}}{\epsilon^{3/2}} \delta(l-\xi)\delta(\alpha-\pi)\delta(\rho-\epsilon) \tag{28}$$

элемент "магнитного тока". Введение магнитных токов нефизично, но упрощает многие выкладки. Компоненты $\mathbf{E}_H$ и $\mathbf{H}_H$ представляют собой пределы $\widehat{\mathbf{E}}_H$ и $\widehat{\mathbf{H}}_H$ при $\epsilon \to 0$.

Магнитная компонента интеграла

$$\mathbf{I}(x,y,z) = \int h(\xi)\mathbf{G}_H(x,y,z;\xi)d\xi,$$

имеет краевую асимптотику при $\rho \to 0$ вида

$$\mathbf{H} = -\tau \frac{4\sqrt{\pi}h(l)}{c_0} \rho^{-1/2} \cos\frac{\alpha}{2} + O(\rho). \tag{29}$$

Электрическая компонента определяется из уравнения (25).

6. Применение оператора P_x к полю

Применим оператор P_x, заданный как (10), к полному полю. Результат будем трактовать как какое-то новое электромагнитное поле (очевидно, $P_x[\mathbf{E}]$ будет его электрической компонентой, а $P_x[\mathbf{H}]$ – магнитной). Такая трактовка в принципе возможна потому, что уравнения Максвелла инвариантны по отношению к сдвигам (т.е. допускают дифференцирование по координатам).

Новое поле, очевидно, удовлетворяет тем же граничным условиям, что и старое, а также условию излучения, т.е. оно не содержит компонент, приходящих из бесконечности. Оно было бы тождественно равно нулю в силу теоремы единственности, однако дифференцирование по x увеличивает порядок особенности на ребре, т.е. приводит к нарушению условий Мейкснера. Физически это означает, что новое электромагнитное поле создается источниками, расположенными вблизи ребра.

Для определения амплитуды этих источников исследуем главные члены асимптотики получившихся функций при $\rho \to 0$:

$$P_x[\mathcal{E}_E] = -\tau \frac{C_E(l)\cos\Theta(l)}{\sqrt{\pi}} \rho^{-1/2} \sin\frac{\alpha}{2} + O(\rho),\ P_x[\mathcal{H}_E] = \frac{\nabla \times P_x[\mathcal{E}_E]}{\mathrm{i}k_0}, \tag{30}$$

$$P_x[\mathcal{H}_H] = \tau \frac{C_H(l)\cos\Theta(l)}{\sqrt{\pi}} \rho^{-1/2} \cos\frac{\alpha}{2} + O(\rho),\ P_x[\mathcal{E}_H] = -\frac{\nabla \times P_x[\mathcal{H}_H]}{\mathrm{i}k_0}. \tag{31}$$

Главные члены полученных разложений нарушают Мейкснеровские условия на крае рассеивателя. Коэффициенты, стояшие в этих членах, пропорциональны силе линейных источников электрического и магнитного типа, расположенных вблизи края рассеивателя.

7.Вывод “слабой” формулы расщепления

Пусть для данной задачи дифракции верна теорема единственности, т.е. следующее утверждение: *Если поле* $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ *удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла, идеальным граничным условиям* (5) *на* S, *условию излучения и краевому условию Мейкснера, то оно тождественно равно нулю.* Мы не собираемся здесь доказывать эту теорему, однако в простейших случаях (когда область S компактна, односвязна, а ее граница есть достаточно гладкая кривая), мы не сомневаемся в справедливости данного утверждения. В более сложном случае, а именно, когда Ω принадлежит дискретному спектру задачи и имеет конечное вырождение, наш метод может быть модифицирован.

Сформулируем следующую Лемму:

Лемма 1. *Пусть*

$$\mathbf{F} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{array} \right\}$$

есть решение однородных уравнений Максвелла, удовлетворяющее идеальным граничным условиям (5) на S, *а также условию излучения. Пусть* $\mathbf{F}$ *нарушает краевые условия Мейкснера, а именно* *имеет следующие асимптотики при $\rho \to 0$:*

$$\left\{ \begin{array}{c} E_\tau \\ H_\tau \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \rho^{-1/2} \left\{ \begin{array}{c} D_E(l)\sin(\alpha/2) \\ D_H(l)\cos(\alpha/2) \end{array} \right\} + \text{Мейкснеровские члены} \tag{32}$$

Тогда

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{c_0}{4\pi} \int\limits_\Gamma \{D_E(l)\mathbf{G}_E(x,y,z;l) - D_H(l)\mathbf{G}_H(x,y,z;l)\}\,dl. \tag{33}$$

Для доказательства Леммы вычтем правую часть (33) из $\mathbf{F}$. Разность удовлетворяет всем условиям теоремы единственности, поэтому она тождественно равная нулю.

Заметим, что асимптотики (30), (31) удовлетворяют условию Леммы. Следовательно, если $\mathbf{U}$ – решение исходной дифракционной задачи, то

$$P_x[\mathbf{U}(x,y,z)] = -\frac{c_0}{4\pi} \int\limits_\Gamma \cos\Theta(l)\,\{C_E(l)\mathbf{G}_E(x,y,z;l) + C_H(l)\mathbf{G}_H(x,y,z;l)\}\,dl. \tag{34}$$

Перепишем это соотношение, перейдя от полей к их диаграммам направленности. Для краевых функций Грина введем диаграммы направленности $\mathbf{f}_{E,H}$ с помощью следующих асимптотических разложений для $r \to \infty$:

$$\mathbf{E}_{E,H}(r,\omega;l) = \frac{2\pi}{k_0 r} e^{\mathrm{i}k_0 r}\mathbf{f}_{E,H}(\omega;l) + O(e^{\mathrm{i}k_0 r}(k_0 r)^{-2}), \tag{35}$$

где $\mathbf{E}_{E,H}$ – электрическая составляющая функции Грина $\mathbf{G}_{E,H}$. Заметим, что оператор P_x действует на диаграмму направленности следующим образом:

$$\mathbf{f}(\omega,\omega_0) \xrightarrow{P_x} \mathrm{i}k_0(\sin\theta\cos\varphi + \sin\theta_0\cos\varphi_0)\mathbf{f}(\omega,\omega_0). \tag{36}$$

Заменяя в (34) поля на больших расстояниях их диаграммы направленности, получаем

$$\mathrm{i}k_0(\sin\theta\cos\varphi + \sin\theta_0\cos\varphi_0)\,\mathbf{f}(\omega,\omega_0)\mathbf{E}_0 = \\ -\frac{c_0}{4\pi} \int\limits_\Gamma \cos\Theta(l)\,\{C_E(l)\mathbf{f}_E(\omega;l) + C_H(l)\mathbf{f}_H(\omega;l)\}\,dl, \tag{37}$$

Полученное выражение назовем слабой формой формулы расщепления, поскольку оно содержит неизвестные коэффициенты C_E и C_H. В следующем разделе мы выразим эти коэффициенты через краевые функции Грина. Пока лишь заметим, что эти коэффициенты зависят от направления падения ω_0 и от поляризации падающей волны.

8. Применение принципа взаимности и получение “сильной” формулы расщепления

Сформулируем принцип взаимности следующим образом. Пусть $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ и $(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$ – два электромагнитных поля, удовлетворяющих в трехмерном пространстве неоднородным системам уравнений Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{E}_{1,2} - \mathrm{i} k_0 \mathbf{H}_{1,2} = \frac{4\pi}{c_0} \mathbf{k}_{1,2}, \tag{38}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_{1,2} + \mathrm{i} k_0 \mathbf{E}_{1,2} = \frac{4\pi}{c_0} \mathbf{j}_{1,2}, \tag{39}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_{1,2} = 0, \tag{40}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_{1,2} = 0. \tag{41}$$

Напомним, что $\mathbf{k}$ представляют собой фиктивные магнитные токи. Оба поля удовлетворяют условию излучения, а также общим для обоих полей граничным условиям и краевым условиям Мейкснера. Тогда

$$\iiint [(\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{E}_1) + (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{H}_2 - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{H}_1)]\, dx\, dy\, dz = 0, \tag{42}$$

где интеграл вычисляется по всему пространству (или той его части, которая содержит все источники).

Соотношение (42) представляет собой принцип взаимности. Процедура вывода этого соотношения достаточно стандартна. Уравнение (38) умножается на $\mathbf{H}_{2,1}$, уравнение (39) – на $\mathbf{E}_{2,1}$, затем уравнения для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ с одинаковыми индексами складываются и выделяется дивергентная часть суммы.

Покажем, как использовать соотношение (42) для преобразования формулы расщепления (37). Для этого рассмотрим, скажем, диаграмму направленности $\mathbf{f}_E(\omega_0; l)$ краевой функции Грина $\mathbf{G}_E$.

Данная диаграмма может быть вычислена как результат следующего предельного перехода. Возьмем источник

$$\mathbf{j}_1 = \frac{\pi^{1/2}}{\epsilon^{3/2}} \delta(l-\xi)\delta(\rho-\epsilon)\delta(\alpha-\pi)$$

вблизи края рассеивателя и вычислим поле $\mathbf{E}_1$, производимое этим источником, в точке (R,ω_0) при большом R. Диаграмма направленности представляет собой предел

$$\mathbf{f}_E(\omega_0; X) = \lim_{\epsilon\to 0, R\to\infty} \frac{k_0 R}{2\pi} e^{-\mathrm{i}k_0 R} \mathbf{E}_1(R,\omega_0). \tag{43}$$

Теперь рассмотрим поле $\mathbf{E}_2$, представляющее собой рассеянное поле, полученное при падении плоской волны (7). Заметим, что плоскую волну можно заменить на поле точечного источника, находящегося достаточно далеко от рассеивателя и имеющего подходящую амплитуду и поляризацию. А именно, необходимо выбрать источник с амлитудой

$$\mathbf{j}_2 = \frac{c_0 R}{\mathrm{i}k_0} e^{-\mathrm{i}k_0 R} \mathbf{E}_0, \tag{44}$$

расположенный в точке (R,ω_0) при достаточно большом R.

Рассмотрим τ-компоненту поля $\mathbf{E}_2$, производимого этим источником вблизи края рассеивателя в точке $(l=\xi, \rho=\epsilon, \alpha=\pi)$. Эта компонента равна

$$(\mathbf{E}_2)_\tau = \frac{2C_E(\xi)}{\sqrt{\pi}} \epsilon^{1/2} + o(\epsilon^{1/2}).$$

Применим соотношение (42) и возьмем предел $\epsilon \to 0$, $R\to\infty$:

$$C_E(l) = \frac{\pi c_0}{\mathrm{i}k_0^2} \mathbf{f}_E(\omega_0; l)\cdot \mathbf{E}_0.$$

Повторяя эту процедуру для магнитных токов и магнитного поля, получаем общую формулу (напомним, что коэффициенты C зависят от направления падения волны):

$$C_{E,H}(\omega_0, l) = \frac{\pi c_0}{\mathrm{i}k_0^2} \mathbf{f}_{E,H}(\omega_0, l)\cdot \mathbf{E}_0. \tag{45}$$

Таким образом, коэффициенты $C_{E,H}$ оказались выражены через диаграммы направленности краевых функций Грина и поляризацию падающего поля.

Подставляя (45) в (37), получим *сильную форму* формулы расщепления:

$$\mathbf{f}(\omega,\omega_0) = \frac{c_0^2}{4k_0^3(\sin\theta\cos\varphi + \sin\theta_0\cos\varphi_0)}\times$$
$$\int\limits_{\Gamma} \{\mathbf{f}_E(\omega;l)\otimes\mathbf{f}_E(\omega_0;l) + \mathbf{f}_H(\omega;l)\otimes\mathbf{f}_H(\omega_0;l)\}\,dl. \qquad (46)$$

В последнем выражении $\otimes$ означает кронекеровское произведение векторов, т.е. в координатном представлении

$$f^{ij}(\omega,\omega_0) = \frac{c_0^2}{4k_0^3(\sin\theta\cos\varphi + \sin\theta_0\cos\varphi_0)}\times$$
$$\int\limits_{\Gamma} \left\{ f_E^i(\omega;l) f_E^j(\omega_0;l) + f_H^i(\omega;l) f_H^j(\omega_0;l)\right\} dl, \qquad (47)$$

где $f_{E,H}^i$ – компоненты векторов $\mathbf{f}_{E,H}$ в соответствующих координатах, введенных в пространствах $\mathbf{V}(\omega)$ и $\mathbf{V}(\omega_0)$.

Использование формулы расщепления может быть полезным с двух точек зрения. Во-первых, функции, через которые удалось выразить диаграмму направленности рассеивателя, а именно функции $\mathbf{f}_{E,H}(\omega;l)$, зависят от трех скалярных переменных θ, φ и l, в то время, как исходная диаграмма направленности $\mathbf{f}(\omega,\omega_0)$ зависит от четырех скалярных переменных θ, φ, θ_0 и φ_0. Это означает, что при численном табулировании данной функции можно сэкономить время и память. Во-вторых, $\mathbf{f}_{E,H}(\omega;l)$ является физически осмысленной величиной, которая может быть измерена непосредственно. При исследовании диаграммы направленности сложного рассеивателя эта величина позволяет выяснить, какой участок края рассеивателя дает наиболее сильный вклад в диаграмму направленности.

Работа поддержана грантом РФФИ 03-02-16889 и грантом “Научные школы” 1575.003.02. Часть работы выполнена в ходе визита, поддержанного Лондонским математическим обществом и Королевским обществом.

Автор благодарен профессорам В. П. Смышляеву, В. М. Бабичу и Р. В. Крастеру за содержательное обсуждение материала статьи.

Литература

1. M. H. Williams, *Diffraction by a finite strip.* — Quart. Jl. Mech. Appl. Math., **35** (1982), 103–124.
2. P. A. Martin and G. R. Wickham, *Diffraction of elastic waves by a penny-shaped crack: analytical and numerical results.* — Proc. R. Soc. Lond. A, **390** (1983), 91–129.
3. N. R. T. Biggs, D. Porter, and D. S. G. Stirling, *Wave diffraction through a perforated breakwater.* — Quart. Jl. Mech. Appl. Math., **53** (2000), 375–391.
4. N. R. T. Biggs, D. Porter, *Wave diffraction through a perforated barrier of non-zero thickness.* — Quart. Jl. Mech. Appl. Math. **54** (2001), 523–547.
5. N. R. T. Biggs, and D. Porter, *Wave scattering by a perforated duct.* — Quart. Jl. Mech. Appl. Math. **55** (2002), 249–272.
6. A. V. Shanin and R. V. Craster, *Removing false singular points as a method of solving ordinary differential equations.* — Euro. Jl. Appl. Math., **13** (2002), 617–639.
7. R. V. Craster, A. V. Shanin, and E. M. Doubravsky, *Embedding formulae in diffraction theory.* — Proc. Roy. Soc. Lond. A, **459** (2003), 2475–2496.
8. R. V. Craster and V. H. Hoang, *Application of Fuchsian differential equations to free boundary problems.* — Proc. Roy. Soc. Lond. A. **453** (1998), 1241–1252.
9. A. V. Shanin, *Diffraction of a plane wave by two ideal strips.* — Quart. Jl. Mech. Appl. Math., **56** (2003), 187–215.
10. A. V. Shanin, *A generalization of the separation of variables method for some 2D diffraction problems.* — Wave Motion, **37** (2003), 241–256.
11. A. V. Shanin, *Three theorems concerning diffraction by a strip or a slit.* — Quart. Jl. Mech. Appl. Math., **54** (2001), 107–137.

Shanin A. V. Embedding formula for an electromagnetic diffraction problem.

Embedding formulae is a powerful tool enabling one to reduce the dimension of the space of variables for a diffraction problem. Let the scatterer be finite, planar and perfectly conducting. The idea of the method is to substitute the initial problem of diffraction of a plane wave by finding an *edge Green's function*, i.e. to solve a problem with a sourve located near the edge of a scatterer. Embedding formula is an integral relation connecting the solution of the initial plane wave incidence problem with the edge Green's function. Earlier, the embedding formulae have been derived for acoustic and elasticity problems. Here we derive en embedding formula for an electromagnetic problem.

Московский
государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило 1 февраля 2005 г.