Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 324, 2005 г.

Л. А. Молотков

ОЦЕНОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СКОРОСТЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ И ЭФФЕКТИВНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ В ЖИДКИХ СМЕСЯХ

При изучении распространения волн в жидких смесях полезно использовать эффективные модели. При построении этих моделей жидкие смеси аппроксимируются в виде слоистых или блочных жидких сред и к этим средам применяется метод матричного осреднения.

Эффективные модели в общих случаях являются анизотропными жидкостями с разными скоростями распространения вдоль координатных осей. Так как в этих эффективных моделях выполняется закон Паскаля и модули анизотропных жидкостей оказываются одинаковыми вдоль всех направлений, то анизотропия связана с разными эффективными плотностями вдоль координатных осей. Выражения для эффективных плотностей в случае блочных жидких сред были получены в работе [1] и существенно отличаются от выражений в статьях [2–5], где за эффективную плотность бралась средняя плотность среды.

В настоящей работе устанавливаются границы интервалов, в которых находятся эффективные плотности и скорости волн. Показано, что верхняя граница эффективной плотности совпадает со средней плотностью среды $\overline{\rho}$, а нижняя граница эффективной плотности $\widehat{\rho}$ соответствует результату осреднения обратных плотностей. Оценка скоростей распространения в жидких смесях выражается двумя неравенствами. В первое неравенство входят плотности $\overline{\rho}$, $\widehat{\rho}$ и средний модуль смеси. Во второе неравенство входят плотности $\overline{\rho}$, $\widehat{\rho}$, а также максимальные и минимальные скорости в составляющих в жидких смесях. Скорость распространения в жидкой смеси не может превышать максимальную скорость в составляющих жидкостях, но может быть меньше минимальной

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) грант No. 03-05-65015, и Ведомственной научной программы Минобразования No. 4733.

скорости в этих жидкостях. Достоинство полученных оценок скоростей и эффективных плотностей состоит в том, что эти оценки не зависят от взаимного расположения блоков с разными жидкостями, и поэтому оценки являются универсальными. Взаимное расположение блоков учитывается в специальных выражениях, которые определяют разности между скоростями и границами интервалов.

§1. Оценочные неравенства для эффективных плотностей

Неравенства для эффективных плотностей жидких смесей выводятся последовательно в одномерном, двумерном и трехмерном случаях. В эффективной модели слоистой периодической среды, в которой чередуются два слоя (рис. 1), эффективные плотности вдоль осей x и z выражаются, согласно работам [6, 7], соотношениями

$$\begin{aligned} \rho_x &= \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1\varepsilon_2+\rho_2\varepsilon_1} = \left(\frac{\varepsilon_1}{\rho_1}+\frac{\varepsilon_2}{\rho_2}\right)^{-1}, \\ \rho_z &= \rho_1\varepsilon_1+\rho_2\varepsilon_2, \end{aligned} \tag{1.1}$$

в которых ρ_1, ρ_2 – плотности первого и второго слоев, а ε_1 и ε_2 – их относительные толщины ($\varepsilon_1+\varepsilon_2=1$). Формулы (1.1) показывают, что в направлении, перпендикулярном слою, эффективная плотность совпадает со средней плотностью среды, а вдоль слоев эффективная плотность получается в результате осреднения обратных плотностей. Обе эффективные плотности удовлетворяют неравенству

$$\rho_x \leqslant \rho_z, \tag{1.2}$$

которое только в случае одинаковых плотностей слоев ($\rho_1=\rho_2$) переходит в равенство.

В случае эффективной модели двумерной блочной периодической жидкой среды, ячейка которой представлена на рис. 2, эффективные плотности вдоль осей x и z выражаются [1] соотношениями

$$\begin{aligned} \rho_x &= \frac{\rho_{12}\rho_{34}}{\rho_1 s_3+\rho_2 s_4+\rho_3 s_1+\rho_4 s_2}, \\ \rho_z &= \frac{\rho_{13}\rho_{24}}{\rho_1 s_2+\rho_2 s_1+\rho_3 s_4+\rho_4 s_3}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

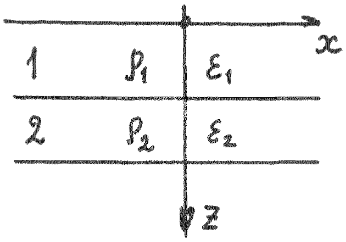

Рис. 1

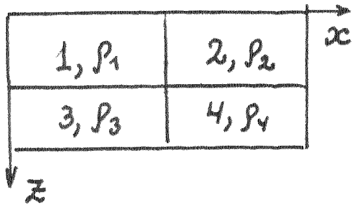

Рис. 2.

в которых

$$\begin{aligned} &\rho_{12} = \rho_1\varepsilon_1 + \rho_2\varepsilon_2, \qquad \rho_{34} = \rho_3\varepsilon_1 + \rho_4\varepsilon_2, \qquad (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1),\\ &\rho_{13} = \rho_1\widetilde{\varepsilon}_1 + \rho_3\widetilde{\varepsilon}_2, \qquad \rho_{24} = \rho_2\widetilde{\varepsilon}_1 + \rho_4\widetilde{\varepsilon}_2, \qquad (\widetilde{\varepsilon}_1 + \widetilde{\varepsilon}_2 = 1),\\ &s_1 = \varepsilon_1\widetilde{\varepsilon}_1, \quad s_2 = \varepsilon_2\widetilde{\varepsilon}_1, \quad s_3 = \varepsilon_1\widetilde{\varepsilon}_2, \quad s_4 = \varepsilon_2\widetilde{\varepsilon}_2 \quad \Big(\sum_{i=1}^{4} s_i = 1\Big), \end{aligned} \tag{1.4}$$

ρ_i – плотность блока с номером i, s_i – относительная площадь блока i, ε_1, ε_2 – относительные размеры блоков вдоль оси x, $\widetilde{\varepsilon}_1$, $\widetilde{\varepsilon}_2$ – относительные размеры блоков вдоль оси z. Наряду с эффективными плотностями вдоль осей полезно ввести среднюю плотность среды

$$\overline{\rho} = \rho_1 s_1 + \rho_2 s_2 + \rho_3 s_3 + \rho_4 s_4 \tag{1.5}$$

и плотность

$$\widehat{\rho} = \left(\frac{s_1}{\rho_1} + \frac{s_2}{\rho_2} + \frac{s_3}{\rho_3} + \frac{s_4}{\rho_4}\right)^{-1}, \tag{1.6}$$

которая получается при осреднении обратных плотностей. Как будет показано, обе плотности удовлетворяют неравенствам

$$\widehat{\rho} \leqslant \rho_x \leqslant \overline{\rho}, \quad \widehat{\rho} \leqslant \rho_z \leqslant \overline{\rho}. \tag{1.7}$$

Докажем первые неравенства (1.7) и получим выражения для разностей $\overline{\rho} - \rho_x$ и $\rho_x - \widehat{\rho}$. Используя соотношения (1.4), представим первую разность в виде равенства

$$\overline{\rho} - \rho_x = \widetilde{\varepsilon}_1\rho_{12} + \widetilde{\varepsilon}_2\rho_{34} - \frac{\rho_{12}\rho_{34}}{\widetilde{\varepsilon}_1\rho_{34} + \widetilde{\varepsilon}_2\rho_{12}}. \tag{1.8}$$

После учета формулы

$$\widetilde{\varepsilon}_1^2 + \widetilde{\varepsilon}_2^2 - 1 = -2\widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_2 \tag{1.9}$$

приходим к окончательному равенству

$$\overline{\rho} - \rho_x = \frac{\widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_2(\rho_{12} - \rho_{34})^2}{\widetilde{\varepsilon}_1\rho_{34} + \widetilde{\varepsilon}_2\rho_{12}}, \tag{1.10}$$

из которого следует, что $\overline{\rho} - \rho_x \geqslant 0$. Вторая разность после приведения к общему знаменателю представляется формулой

$$\rho_x - \widehat{\rho} = \\ = \frac{\rho_{12}\rho_{34}\left(\dfrac{s_1}{\rho_1} + \dfrac{s_2}{\rho_2} + \dfrac{s_3}{\rho_3} + \dfrac{s_4}{\rho_4}\right) - (\rho_3 s_1 + \rho_4 s_2 + \rho_1 s_3 + \rho_2 s_4)}{(\rho_3 s_1 + \rho_4 s_2 + \rho_1 s_3 + \rho_2 s_4)\left(\dfrac{s_1}{\rho_1} + \dfrac{s_2}{\rho_2} + \dfrac{s_3}{\rho_3} + \dfrac{s_4}{\rho_4}\right)}. \tag{1.11}$$

При дальнейших преобразованиях числителя в выражении (1.11) полезно объединить члены, содержащие s_1, s_2, и члены, содержащие s_3, s_4. Преобразования обеих групп членов проводятся с помощью элементарных операций и с учетом равенства

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - 1 = 2\varepsilon_1\varepsilon_2 \tag{1.12}$$

и приводят к окончательной формуле

$$\rho_x - \widehat{\rho} = \varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{\dfrac{\widetilde{\varepsilon}_1\rho_{34}(\rho_1 - \rho_2)^2}{\rho_1\rho_2} + \dfrac{\widetilde{\varepsilon}_2\rho_{12}(\rho_3 - \rho_4)^2}{\rho_3\rho_4}}{(\rho_3 s_1 + \rho_4 s_2 + \rho_1 s_3 + \rho_2 s_4)\left(\dfrac{s_1}{\rho_1} + \dfrac{s_2}{\rho_2} + \dfrac{s_3}{\rho_3} + \dfrac{s_4}{\rho_4}\right)}, \tag{1.13}$$

из которой следует, что $\rho_x - \widehat{\rho} \geqslant 0$. Аналогичные формулы

$$\overline{\rho} - \rho_z = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2(\rho_{13} - \rho_{24})^2}{\varepsilon_1\rho_{24} + \varepsilon_2\rho_{13}}, \tag{1.14}$$

$$\rho_z - \widehat{\rho} = \widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_2 \frac{\dfrac{\varepsilon_1\rho_{24}(\rho_1 - \rho_3)^2}{\rho_1\rho_3} + \dfrac{\varepsilon_2\rho_{13}(\rho_2 - \rho_4)^2}{\rho_2\rho_4}}{(\rho_2 s_1 + \rho_1 s_2 + \rho_4 s_3 + \rho_3 s_4)\left(\dfrac{s_1}{\rho_1} + \dfrac{s_2}{\rho_2} + \dfrac{s_3}{\rho_3} + \dfrac{s_4}{\rho_4}\right)} \tag{1.15}$$

выводятся для эффективной плотнтости ρ_z.

В случае эффективной модели трехмерной блочной периодической жидкой среды, ячейка которой представлена на рис. 1

работы [1], эффективные плотности вдоль осей x, y и z выражаются соотношениями

$$
\begin{aligned}
\rho_x &= \left(\frac{v_{12}}{\rho_{12}} + \frac{v_{34}}{\rho_{34}} + \frac{v_{56}}{\rho_{56}} + \frac{v_{78}}{\rho_{78}}\right)^{-1}, \\
\rho_y &= \left(\frac{v_{13}}{\rho_{13}} + \frac{v_{24}}{\rho_{24}} + \frac{v_{57}}{\rho_{57}} + \frac{v_{68}}{\rho_{68}}\right)^{-1}, \\
\rho_x &= \left(\frac{v_{15}}{\rho_{15}} + \frac{v_{26}}{\rho_{26}} + \frac{v_{37}}{\rho_{37}} + \frac{v_{48}}{\rho_{48}}\right)^{-1},
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\rho_{12} = \rho_1\varepsilon_1 + \rho_2\varepsilon_2, \qquad \rho_{34} = \rho_3\varepsilon_1 + \rho_4\varepsilon_2, \\
&\rho_{56} = \rho_5\varepsilon_1 + \rho_6\varepsilon_2, \qquad \rho_{78} = \rho_7\varepsilon_1 + \rho_8\varepsilon_2, \\
&\rho_{13} = \rho_1\overline{\varepsilon}_1 + \rho_3\overline{\varepsilon}_2, \qquad \rho_{24} = \rho_2\overline{\varepsilon}_1 + \rho_4\overline{\varepsilon}_2, \\
&\rho_{57} = \rho_5\overline{\varepsilon}_1 + \rho_7\overline{\varepsilon}_2, \qquad \rho_{68} = \rho_6\overline{\varepsilon}_1 + \rho_8\overline{\varepsilon}_2, \\
&\rho_{15} = \rho_1\widetilde{\varepsilon}_1 + \rho_5\widetilde{\varepsilon}_2, \qquad \rho_{26} = \rho_2\widetilde{\varepsilon}_1 + \rho_6\widetilde{\varepsilon}_2, \\
&\rho_{37} = \rho_3\widetilde{\varepsilon}_1 + \rho_7\widetilde{\varepsilon}_2, \qquad \rho_{48} = \rho_4\widetilde{\varepsilon}_1 + \rho_8\widetilde{\varepsilon}_2,
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

ρ_i – плотность блока i, ε_1, ε_2; $\overline{\varepsilon}_1$, $\overline{\varepsilon}_2$; $\widetilde{\varepsilon}_1$, $\widetilde{\varepsilon}_2$ – относительные размеры блоков соответственно вдоль осей x, y и z, v_i – относительный объем блока i,

$$
\begin{gathered}
v_1 = \varepsilon_1\overline{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_1, \quad v_2 = \varepsilon_2\overline{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_1, \quad v_3 = \varepsilon_1\overline{\varepsilon}_2\bar{\varepsilon}_1, \quad v_4 = \varepsilon_2\overline{\varepsilon}_2\bar{\varepsilon}_1, \\
v_5 = \varepsilon_1\overline{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_2, \quad v_6 = \varepsilon_2\overline{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_2, \quad v_7 = \varepsilon_1\overline{\varepsilon}_2\widetilde{\varepsilon}_2, \quad v_8 = \varepsilon_2\overline{\varepsilon}_2\widetilde{\varepsilon}_2, \quad \Bigl(\sum_{i=1}^{8} v_i = 1\Bigr),
\end{gathered}
\tag{1.18}
$$

v_{ij} – относительный объем блоков i и j,

$$
\begin{aligned}
&v_{12} = \overline{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_1, \qquad v_{34} = \overline{\varepsilon}_2\widetilde{\varepsilon}_1, \qquad v_{56} = \overline{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_2, \qquad v_{78} = \overline{\varepsilon}_2\widetilde{\varepsilon}_2, \\
&v_{13} = \varepsilon_1\widetilde{\varepsilon}_1, \qquad v_{24} = \varepsilon_2\widetilde{\varepsilon}_1, \qquad v_{57} = \varepsilon_1\widetilde{\varepsilon}_2, \qquad v_{68} = \varepsilon_2\widetilde{\varepsilon}_2, \\
&v_{15} = \varepsilon_1\overline{\varepsilon}_1, \qquad v_{26} = \varepsilon_2\overline{\varepsilon}_1, \qquad v_{37} = \varepsilon_1\overline{\varepsilon}_2, \qquad v_{48} = \varepsilon_2\overline{\varepsilon}_2.
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

Средняя плотность среды $\overline{\rho}$ и плотность, полученная при осреднении обратных плотностей, выражаются равенствами

$$
\begin{aligned}
\overline{\rho} &= \sum_{i=1}^{8} \rho_i v_i, \\
\widehat{\rho} &= \Bigl(\sum_{i=1}^{8} \frac{v_i}{\rho_i}\Bigr)^{-1}.
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

Эффективные плотности вдоль координатных осей удовлетворяют неравенствам

$$\widehat{\rho} \leqslant \rho_x \leqslant \overline{\rho}, \quad \widehat{\rho} \leqslant \rho_y \leqslant \overline{\rho}, \quad \widehat{\rho} \leqslant \rho_z \leqslant \overline{\rho}. \tag{1.21}$$

Доказательство первых неравенств сводится к установлению соотношений

$$\begin{aligned}\overline{\rho} - \rho_x = \Bigg[&\frac{v_{12}v_{34}(\rho_{12}-\rho_{34})^2}{\rho_{12}\rho_{34}} + \frac{v_{12}v_{56}(\rho_{12}-\rho_{56})^2}{\rho_{12}\rho_{56}} + \\ &+ v_{12}v_{78}\frac{(\rho_{12}-\rho_{78})^2}{\rho_{12}\rho_{78}} + v_{34}v_{56}\frac{(\rho_{34}-\rho_{56})^2}{\rho_{34}\rho_{56}} + v_{34}v_{78}\frac{(\rho_{34}-\rho_{78})^2}{\rho_{34}\rho_{78}} + \\ &+ v_{56}v_{78}\frac{(\rho_{56}-\rho_{78})^2}{\rho_{56}\rho_{78}}\Bigg] \Bigg/ \left(\frac{v_{12}}{\rho_{12}} + \frac{v_{34}}{\rho_{34}} + \frac{v_{56}}{\rho_{56}} + \frac{v_{78}}{\rho_{78}}\right),\end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\begin{aligned}\rho_x - \widehat{\rho} = \varepsilon_1\varepsilon_2\Bigg[&\frac{\overline{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_1(\rho_1-\rho_2)^2}{\rho_1\rho_2\rho_{12}} + \frac{\overline{\varepsilon}_2\widetilde{\varepsilon}_1(\rho_3-\rho_4)^2}{\rho_3\rho_4\rho_{34}} + \frac{\overline{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_2(\rho_5-\rho_6)^2}{\rho_5\rho_6\rho_{56}} + \\ &+ \frac{\overline{\varepsilon}_2\widetilde{\varepsilon}_2(\rho_7-\rho_8)^2}{\rho_7\rho_8\rho_{78}}\Bigg] \Bigg/ \left[\left(\frac{v_{12}}{\rho_{12}} + \frac{v_{34}}{\rho_{34}} + \frac{v_{56}}{\rho_{56}} + \frac{v_{78}}{\rho_{78}}\right)\sum_{i=1}^{8}\frac{v_i}{\rho_i}\right],\end{aligned} \tag{1.23}$$

которые показывают, что выражения (1.22) и (1.23) являются неотрицательными. Вывод формул (1.22) и (1.23) проводится теми же методами, как и в случае вывода соотношений (1.10) и (1.13). Формулы (1.22) и (1.23) являются обобщениями равенств (1.10) и (1.13). При

$$\widetilde{\varepsilon}_1 = 1, \quad \widetilde{\varepsilon}_2 = 0$$

и замене

$$\overline{\varepsilon}_1 \to \widetilde{\varepsilon}_1, \quad \overline{\varepsilon}_2 \to \widetilde{\varepsilon}_2$$

равенство (1.22) переходит в (1.10), а (1.23) – в (1.13). Таким образом, между эффективными плотностями в трехмерном и двумерном случаях имеет место полное соответствие.

Аналогичные формулы

$$\begin{aligned}\overline{\rho} - \rho_y = \Bigg[&\frac{v_{13}v_{24}(\rho_{13}-\rho_{24})^2}{\rho_{13}\rho_{24}} + \frac{v_{13}v_{57}(\rho_{13}-\rho_{57})^2}{\rho_{13}\rho_{57}} + \\ &+ v_{13}v_{68}\frac{(\rho_{13}-\rho_{68})^2}{\rho_{13}\rho_{68}} + v_{24}v_{57}\frac{(\rho_{24}-\rho_{57})^2}{\rho_{24}\rho_{57}} + v_{24}v_{68}\frac{(\rho_{24}-\rho_{68})^2}{\rho_{24}\rho_{68}} + \\ &+ v_{57}v_{68}\frac{(\rho_{57}-\rho_{68})^2}{\rho_{57}\rho_{68}}\Bigg] \Bigg/ \left(\frac{v_{13}}{\rho_{13}} + \frac{v_{24}}{\rho_{24}} + \frac{v_{57}}{\rho_{57}} + \frac{v_{68}}{\rho_{68}}\right),\end{aligned} \tag{1.24}$$

$$\rho_y - \widehat{\rho} = \overline{\varepsilon}_1\overline{\varepsilon}_2\left[\frac{\varepsilon_1\widetilde{\varepsilon}_1(\rho_1-\rho_3)^2}{\rho_1\rho_3\rho_{13}} + \frac{\varepsilon_2\widetilde{\varepsilon}_1(\rho_2-\rho_4)^2}{\rho_2\rho_4\rho_{24}} + \frac{\varepsilon_1\widetilde{\varepsilon}_2(\rho_5-\rho_7)^2}{\rho_5\rho_7\rho_{57}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\varepsilon_2\widetilde{\varepsilon}_2(\rho_6-\rho_8)^2}{\rho_6\rho_8\rho_{68}}\right] \Big/ \left[\left(\frac{v_{13}}{\rho_{13}} + \frac{v_{24}}{\rho_{24}} + \frac{v_{57}}{\rho_{57}} + \frac{v_{68}}{\rho_{68}}\right)\sum_{i=1}^{8}\frac{v_i}{\rho_i}\right];$$

$$\overline{\rho} - \rho_z = \left[\frac{v_{15}v_{26}(\rho_{15}-\rho_{26})^2}{\rho_{15}\rho_{26}} + \frac{v_{15}v_{37}(\rho_{15}-\rho_{37})^2}{\rho_{15}\rho_{37}} + \right.$$
$$+ v_{15}v_{48}\frac{(\rho_{15}-\rho_{48})^2}{\rho_{15}\rho_{48}} + v_{26}v_{37}\frac{(\rho_{26}-\rho_{37})^2}{\rho_{26}\rho_{37}} + v_{26}v_{48}\frac{(\rho_{26}-\rho_{48})^2}{\rho_{26}\rho_{48}} +$$
$$\left. + v_{37}v_{48}\frac{(\rho_{37}-\rho_{48})^2}{\rho_{37}\rho_{48}}\right] \Big/ \left(\frac{v_{15}}{\rho_{15}} + \frac{v_{26}}{\rho_{26}} + \frac{v_{37}}{\rho_{37}} + \frac{v_{48}}{\rho_{48}}\right), \qquad (1.25)$$

$$\rho_z - \widehat{\rho} = \widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_2\left[\frac{\varepsilon_1\overline{\varepsilon}_1(\rho_1-\rho_5)^2}{\rho_1\rho_5\rho_{15}} + \frac{\varepsilon_2\overline{\varepsilon}_1(\rho_2-\rho_6)^2}{\rho_2\rho_6\rho_{26}} + \frac{\varepsilon_1\overline{\varepsilon}_2(\rho_3-\rho_7)^2}{\rho_3\rho_7\rho_{37}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\varepsilon_2\overline{\varepsilon}_2(\rho_4-\rho_8)^2}{\rho_4\rho_8\rho_{48}}\right] \Big/ \left[\left(\frac{v_{15}}{\rho_{15}} + \frac{v_{26}}{\rho_{26}} + \frac{v_{37}}{\rho_{37}} + \frac{v_{48}}{\rho_{48}}\right)\sum_{i=1}^{8}\frac{v_i}{\rho_i}\right],$$

выводятся для выражений, содержащих эффективные плотности вдоль осей y и z.

§2. Оценочные неравенства для скоростей распространения

Оценочные неравенства для скоростей распространения в жидких смесях устанавливаются в этой работе только в трехмерном случае. Соответствующие неравенства в двумерном и одномерном случаях получаются как частные случаи неравенств в трехмерном случае. Скорости волн вдоль осей в жидкой смеси выражаются соотношениями [1]

$$c_x = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_x}}, \qquad c_y = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_y}}, \qquad c_z = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_z}}, \qquad (2.1)$$

в которых средний модуль λ представляется формулами

$$\lambda = \left(\frac{v_1}{\lambda_1} + \frac{v_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{v_8}{\lambda_8}\right)^{-1} = \left(\frac{v_1}{\rho_1 c_1^2} + \frac{v_2}{\rho_2 c_2^2} + \dots + \frac{v_8}{\rho_8 c_8^2}\right)^{-1} \qquad (2.2)$$

и c_i – скорость распространения в блоке i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$. На основании неравенств (1.21) для скоростей c_x, c_y и c_z записываются оценочные неравенства

$$\frac{\lambda}{\overline{\rho}} \leqslant c_x^2 \leqslant \frac{\lambda}{\widehat{\rho}}, \qquad \frac{\lambda}{\overline{\rho}} \leqslant c_y^2 \leqslant \frac{\lambda}{\widehat{\rho}}, \qquad \frac{\lambda}{\overline{\rho}} \leqslant c_z^2 \leqslant \frac{\lambda}{\widehat{\rho}}. \tag{2.3}$$

Используя формулы (2.2) и (2.3), получим еще и другие оценки для скоростей в смеси жидкости. Из соотношений (1.20) и (2.2) следует равенство

$$\frac{\lambda}{\widehat{\rho}} = \left(\frac{v_1}{\lambda_1} + \frac{v_2}{\lambda_2} + \cdots + \frac{v_8}{\lambda_8}\right) \Big/ \left(\frac{v_1}{\rho_1 c_1^2} + \frac{v_2}{\rho_2 c_2^2} + \cdots + \frac{v_8}{\rho_8 c_8^2}\right). \tag{2.4}$$

Пусть $\max c$ – максимальная скорость в блоках и $\max c \geqslant c_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$. Из этого факта следуют неравенства

$$\frac{\lambda}{\widehat{\rho}} \leqslant \max c^2, \quad c_x \leqslant \max c, \quad c_y \leqslant \max c, \quad c_z \leqslant \max c. \tag{2.5}$$

Из формул (1.20) и (2.2) также следует равенство

$$\frac{\lambda}{\overline{\rho}} = \frac{1}{(\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 + \cdots + \rho_8 v_8)\left(\dfrac{v_1}{\rho_1 c_1^2} + \dfrac{v_2}{\rho_2 c_2^2} + \cdots + \dfrac{v_8}{\rho_8 c_8^2}\right)}. \tag{2.6}$$

Пусть $\min c$ – минимальная скорость в блоках и $\min c \leqslant c_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$. Тогда

$$\frac{\lambda}{\overline{\rho}} \geqslant \frac{\min c^2}{(\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 + \cdots + \rho_8 v_8)\left(\dfrac{v_1}{\rho_1} + \dfrac{v_2}{\rho_2} + \cdots + \dfrac{v_8}{\rho_8}\right)} = \frac{\widehat{\rho}}{\overline{\rho}} \min c^2, \tag{2.7}$$

где

$$\frac{\widehat{\rho}}{\overline{\rho}} = \left[1 + \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{(\rho_i - \rho_j)^2}{\rho_i \rho_j} v_i v_j\right]^{-1}. \tag{2.8}$$

Объединяя неравенства (2.5) и (2.7), приходим к неравенствам

$$\frac{\widehat{\rho}}{\overline{\rho}} \min c^2 \leqslant c_i^2 \leqslant \max c^2 \qquad (i = x, y, z). \tag{2.9}$$

Из неравенств (2.9) следует, что скорость распространения в жидкой блочной среде не может превышать максимальную скорость в жидких блоках. Так как $\widehat{\rho} \leqslant \overline{\rho}$, то скорость в жидкой блочной среде может быть меньше минимальной скорости в жидких блоках. Такие случаи осуществляются, например, когда скорости волн во всех блоках одинаковые и справедливы формулы (3.14) или (3.23) [7]. Эти два вывода, полученные из неравенств (2.9) для жидкой блочной среды, по-видимому, справедливы также и для любой смеси жидкостей

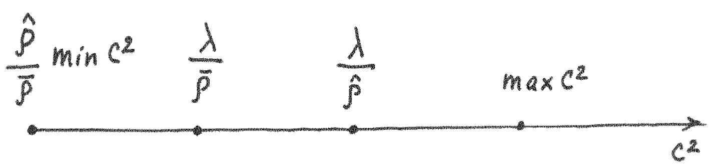

Рис. 3.

Неравенства (2.9) аналогичны неравенствам (2.3). Их различия состоят в том, что в (2.3) входит средний модуль λ, а в (2.9) входят минимальная и максимальная скорости в блоках. Такая замена делает оценки для скорости более простыми. Однако в результате этой замены интервал для квадрата скорости в (2.9) оказывается более широким, чем в случае неравенств (2.3). Чтобы оценить расширение интервала приведем равенства

$$\max c^2 - \frac{\lambda}{\widehat{\rho}} = \frac{\frac{v_1(\max c^2 - c_1^2)}{\rho_1 c_1^2} + \frac{v_2(\max c^2 - c_2^2)}{\rho_2 c_2^2} + \dots + \frac{v_8(\max c^2 - c_8^2)}{\rho_8 c_8^2}}{\frac{v_1}{\rho_1 c_1^2} + \frac{v_2}{\rho_2 c_2^2} + \dots \frac{v_8}{\rho_8 c_8^2}}, \quad (2.10)$$

$$\frac{\lambda}{\overline{\rho}} - \frac{\widehat{\rho}}{\overline{\rho}} \min c^2 = \quad (2.11)$$
$$\frac{\widehat{\rho}}{\overline{\rho}} \frac{\frac{v_1}{\rho_1 c_1^2}(c_1^2 - \min c^2) + \frac{v_2}{\rho_2 c_2^2}(c_2^2 - \min c^2) + \dots + \frac{v_8}{\rho_8 c_8^2}(c_8^2 - \min c^2)}{\frac{v_1}{\rho_1 c_1^2} + \frac{v_2}{\rho_2 c_2^2} + \dots \frac{v_8}{\rho_8 c_8^2}},$$

определяющие выражения для разностей между граничными значениями в неравенствах (2.3) и (2.8). Эти граничные значения показаны на рис. 3.

Литература

1. Л. А. Молотков, *О распространении сейсмических волн в блочных жидких средах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **308** (2004), 124–146.

2. W. T. Wood, *Text book of sound.* Macmillan, New York (1941).
3. M. W. Lee, O. R. Hutchinson, T. S. Collett, W. P. Dillon, *Seismic velocities for hydrate-bearing sediments using weighted equation.* — J. Geoph. Res. **101, No. B9** (1996), 20.347–20.358.
4. C. F. Pearson, J. Murphy, Hermes, *Acoustic and resistivity measurements on rock samples containing tetrahydrofuran hidrates.* — J. Geoph. Res. **91** (1986), 14.132–14.138.
5. D. C. Nobes, H. Villinger, F. F. Davis, L. K. Law, *Estimation of marine sediment bulk physical properties at depth from scalfoor.* — J. Geoph. Res. **91** (1986), 14.033–14.043.
6. Л. А. Молотков, *Об эквивалентности слоисто-периодических и трансверсально-изотропных сред.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **89** (1979), 219–233.
7. Л. А. Молотков, *Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред.* СПб (2001).

Molotkov L. A. Estimating inequalities for velocities of propagation and for effective densities in fluid mixtures.

Wave propagation in block fluid media is investigated on the basis of effective models which are anisotropic fluids. For velocities of wave propagation and for effective densities, estimating inequalitites are established. The propaganda velocity in a fluid mixture can not be greater than the greatest velocity in mixed fluids but can be less than the least velocity in mixed fluids.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 25 февраля 2005 г.