Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 324, 2005 г.

Л. А. Молотков

О ЗАТУХАНИИ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В СМЕСЯХ ЖИДКОСТЕЙ

При исследовании распространения волн в жидких смесях полезно использовать эффективные модели. Эти модели описывают волновые поля в слоистых и блочных средах [1–3]. Недостаток такого подхода состоит в том, что при исследовании распространения волн не учитывается поглощение. Предлагаемая работа посвящена учету поглощения в указанных моделях. В ней делается предположение, что между частицами разных жидкостей возникает сила трения, пропорциональная разности скоростей частиц. В результате в уравнения эффективных моделей [1–3] добавляются дополнительные члены. Используемый подход был ранее применен в работах [5] и позволил ввести затухание в пористую среду Био и в эффективную модель среды с чередующимися упругими и жидкими слоями. В настоящей работе уравнения эффективной модели выводятся для трех жидких смесей: 1) для слоистой периодической среды, в которой чередуются два жидких слоя; 2) для двумерной блочной периодической в двух направлениях среды и 3) для трехмерной блочной периодической в трех направлениях среды. Анализ этих уравнений позволяет показать, как уменьшается со временем полная энергия волнового поля в энергетически изолированных системах.

Так как системы уравнений, учитывающие затухание в двумерном и трехмерном общих случаях, содержат большое количество уравнений, то для простоты при исследовании рассматриваются более простые случаи, когда в смеси содержатся две разные жидкости и эффективная модель является изотропной. Для чередующихся жидких слоев эффективная модель является трансверсально-изотропной и рассматривается в общем случае. Исследования решений уравнений эффективных моделей в

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), гранты No. 05-01-00936, 05-05-65301 и Ведомственной научной программы Минообразования No. 4733.

указанных случаях позволяют получить явные выражения для коэффициентов затухания волн в случае малых коэффициентов трения. При том же условии скорости волн в смесях практически не зависят от коэффициента затухания.

Анализ всех выражений для коэффициента затухания показывает, что эти коэффициенты пропорциональны квадрату разности плотностей жидкостей и не зависят от модулей жидкостей. Из этого результата, в частности, следует, что в жидкости, содержащей газовые пузырьки, затухание оказывается очень большим, так как плотность газа очень мала и коэффициент затухания пропорционален квадрату плотности жидкости. Полученные формулы для коэффициентов затухания определяют также зависимость этих коэффициентов от относительных размеров жидких блоков или от относительных толщин жидких слоев. При исследовании коэффициентов затухания в жидких блоках рассматриваются два случая, при этом в первом случае блоки с разными жидкостями чередуются вдоль координатных осей, а во втором случае все блоки с одной жидкостью окружены со всех сторон блоками с другой жидкостью. Первый случай соответствует равномерному распределению двух жидкостей в смеси, а во втором случае имеют место включения одной жидкости в другую жидкость. В обоих случаях зависимость коэффициента затухания от относительных размеров блоков может быть заменена зависимостью от концентраций жидкостей. Выражения для скоростей распространения и коэффициентов затухания могут быть использованы для прогнозирования состава смесей жидкостей или смесей жидкости и газа. Такое прогнозирование, в частности, может быть осуществлено при исследованиях указанных смесей в скважинах и в межскважинных областях. Использованный в работе подход может быть применен также при исследовании смесей трех и более жидкостей.

§1. Затухание в слоисто-периодической жидкой среде

Пусть задана жидкая среда $0 \leqslant z \leqslant H$, состоящая из чередующихся жидких слоев 1 и 2. Слои $i (i = 1, 2)$ имеют толщину h_i и описываются уравнениями

$$-\frac{\partial p_i}{\partial x} = \rho_i \frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial t^2}, \quad -\frac{\partial p_i}{\partial z} = \rho_i \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial t^2}, -p_i = \lambda_i \left(\frac{\partial u_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} \right), \quad (1.1)$$

в которых u_{xi} и u_{zi} – смещения, p_i – давление, ρ_i – плотность, $\lambda_i = \rho_1 v_i^2$ и v_i – скорость распространения в жидком слое i. На внутренних границах между слоями выполняются условия

$$p_1 = p_2, \quad u_{z1} = u_{z2} \tag{1.2}$$

непрерывности, а смещения u_{x1} и u_{x2} могут иметь разрывы. Линейные условия на внешних границах и задание источника могут быть произвольными. Среда является периодической с периодом $h = h_1 + h_2$ и с числом периодов $n = H/h$ (рис. 1).

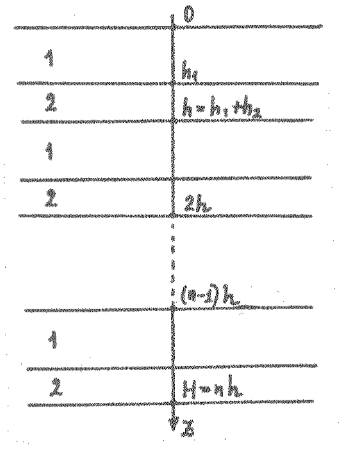

Рис. 1.

В заданной среде совершается предельный переход при условии

$$n \to \infty, H = \mathrm{const}, h_i \to 0, \varepsilon_1 = h_1/h = \mathrm{const}, \varepsilon_2 = h_2/h = \mathrm{const}\,. \tag{1.3}$$

Подобный предельный переход выполняется в работах [2, 6]. В результате предельного перехода волновое поле описывается уравнениями

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_1 \frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2}, \quad -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_2 \frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial t^2}, \quad -\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_{12} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},$$
$$-p = \lambda\left(\varepsilon_1 \frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right), \tag{1.4}$$

в которых

$$\rho_{12} = \rho_1\varepsilon_1 + \rho_2\varepsilon_2, \quad \lambda = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\varepsilon_1\lambda_2 + \varepsilon_2\lambda_1}, \quad p = p_1 = p_2. \tag{1.5}$$

В уравнениях (1.4) смещения u_{x1} и u_{x2} оказываются разными и в отличие от [7] не осредняются. Предполагается, что между частицами первого и второго слоев возникает сила трения, пропорциональная разности скоростей смещений вдоль оси x

$$b\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial t} - \frac{\partial u_{x2}}{\partial t}\right),$$

при этом $b > 0$ – коэффициент трения. Эти силы трения сохраняются после предельного перехода и их следует учитывать в первых двух уравнениях (1.4), выражающих равенства сил, действующих вдоль оси x. В результате уравнения (1.4) заменятся на уравнения

$$\begin{gathered}
-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_1\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2} + \frac{b}{\varepsilon_1}\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial t} - \frac{\partial u_{x2}}{\partial t}\right),\\
-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_2\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial t^2} + \frac{b}{\varepsilon_2}\left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial t} - \frac{\partial u_{x1}}{\partial t}\right),\\
-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_{12}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad -p = \lambda\left(\varepsilon_1\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \varepsilon_2\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right).
\end{gathered} \tag{1.6}$$

Дополнительные делители ε_1 и ε_2 в первых двух уравнениях (1.6) связаны с тем, что силы трения распределены по слоям.

Уравнения (1.6) описывают волновые поля, испытывающие затухание со временем. Чтобы исследовать это затухание, помножим первое, второе и третье уравнения соответственно на

$$\varepsilon_1\frac{\partial u_{x1}}{\partial t}, \quad \varepsilon_2\frac{\partial u_{x2}}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial t}, \tag{1.7}$$

проведем в них простые преобразования и сложим почленно. В результате придем к уравнению энергетического баланса

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_z}{\partial z} = \frac{\partial W_k}{\partial t} + \frac{\partial W_p}{\partial t} + b\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial t} - \frac{\partial u_{x2}}{\partial t}\right)^2, \tag{1.8}$$

где

$$p_x = -p\left(\varepsilon_1\frac{\partial u_{x1}}{\partial t} + \varepsilon_2\frac{\partial u_{x2}}{\partial t}\right), \tag{1.9}$$

$$p_z = -p\frac{\partial u_z}{\partial t}$$

– потоки энергий вдоль осей x и z,

$$W_k = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_1\rho_1\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial t}\right)^2 + \varepsilon_2\rho_2\left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial t}\right)^2 + \rho_{12}\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2\right] \tag{1.10}$$

– плотность кинетической энергии,

$$\frac{\partial W_p}{\partial t} = -p\left(\varepsilon_1\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t\partial x} + \varepsilon_2\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial t\partial x} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial t\partial z}\right) \tag{1.11}$$

– скорость изменения плотности потенциальной энергии. Используя четвертое уравнение (1.6), придем к соотношениям

$$W_p = \frac{\lambda}{2}\left(\varepsilon_1\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \varepsilon_2\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2 = \frac{p^2}{2\lambda}. \tag{1.12}$$

Из формул (1.8)–(1.12) следует, что в рассматриваемой среде имеет место затухание. В самом деле, если пренебречь потоками энергии, то из соотношения (1.8) следует равенство

$$W_x(t) + W_p(t) = W_k(0) + W_p(0) - b\int\limits_0^t \left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial t} - \frac{\partial u_{x2}}{\partial t}\right)^2 dt, \tag{1.13}$$

показывающее, что плотность полной энергии убывает в каждой точке среды. Если рассмотреть всю среду с объемом v и считать ее энергетически изолированной, то ее полная энергия

$$W(t) = \iiint\limits_v [W_k(t) + W_p(t)]dv \tag{1.14}$$

выражается формулой

$$W(t) = W(0) - b\int\limits_0^t dt \iiint\limits_v \left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial t} - \frac{\partial u_{x2}}{\partial t}\right)^2 dv. \tag{1.15}$$

Из равенства (2.8) следует, что полная энергия энергетически изолированной среды монотонно уменьшается со временем.

Решение уравнений (1.6) будем искать в виде равенств

$$u_{xi} = \int\limits_0^\infty \frac{\sin kx dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Big(U_{xi}^+ e^{kz\alpha} + U_{xi}^- e^{-kz\alpha}\Big) e^{kt\eta} d\eta \quad (i=1,2),$$

$$u_z = \int\limits_0^\infty \frac{\cos kx dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Big(U_z^+ e^{kz\alpha} + U_z^- e^{-kz\alpha}\Big) e^{kt\eta} d\eta,$$

$$-p = \int\limits_0^\infty \frac{k\cos kx dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (P^+ e^{kz\alpha} + P^- e^{-kz\alpha}) e^{et\eta} d\eta. \qquad (1.16)$$

Функции U_{x1}^+, U_{x2}^+, U_z^+ и P^+, входящие в уравнения (1.16), удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} k\varepsilon_1 P^+ =& k\varepsilon_1\rho_1\eta^2 U_{x1}^+ + b\eta U_{x1}^+ - b\eta U_{x2}^+, \\ k\varepsilon_2 P^+ =& k\varepsilon_2\rho_2\eta^2 U_{x2}^+ + b\eta U_{x2}^+ - b\eta U_{x1}^+, \\ \alpha P^+ =& \rho_{12}\eta^2 U_z^+, \\ \lambda^{-1} P^+ =& -\varepsilon_1 U_{x1}^+ - \varepsilon_2 U_{x2}^+ + \alpha U_z^+. \end{aligned} \qquad (1.17)$$

Система уравнений (1.17) имеет ненулевое решение при условии

$$\begin{vmatrix} k\varepsilon_1 & k\rho_1\varepsilon_1\eta^2 + b\eta & -b\eta & 0 \\ k\varepsilon_2 & -b\eta & k\rho_2\varepsilon_2\eta^2 + b\eta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \rho_{12}\eta^2 \\ \lambda^{-1} & -\varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & \alpha \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.18)$$

Равенство (1.18) определяет выражение для α^2

$$\alpha^2 = \rho_{12}\eta^2 \frac{\begin{vmatrix} k\varepsilon_1 & k\varepsilon_1\rho_1\eta^2 + b\eta & -b\eta \\ k\varepsilon_2 & -b\eta & k\varepsilon_2\rho_2\eta^2 + b\eta \\ \lambda^{-1} & -\varepsilon_1 & -\varepsilon_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k\varepsilon_1\rho_1\eta^2 + b\eta & -b\eta \\ -b\eta & k\varepsilon_2\rho_2\eta^2 + b\eta \end{vmatrix}}. \qquad (1.19)$$

После вычисления определителей равенство (1.19) заменяется соотношением

$$\alpha^2 = \rho_{12} \frac{\varepsilon_1\rho_2 + \varepsilon_2\rho_1 + \lambda^{-1}\rho_1\rho_2\eta^2 + \frac{b}{\varepsilon_1\varepsilon_2 k\eta}(1 + \lambda^{-1}\rho_{12}\eta^2)}{\rho_1\rho_2 + \frac{b\rho_{12}}{\varepsilon_1\varepsilon_2 k\eta}}. \qquad (1.20)$$

В равенстве (1.20) члены, содержащие коэффициент трения b, определяют поправки в волновом поле на трение между слоями и не входят выражения для скоростей волн

$$\sqrt{\lambda(\frac{\varepsilon_1}{\rho_1}+\frac{\varepsilon_2}{\rho_2})}, \quad \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_{12}}} \tag{1.21}$$

вдоль осей x и z. Эти скорости оказываются разными, так как эффективная модель является трансверсально-изотропной.

Для определения коэффициента затухания волны выясним расположение точек ветвления характеристической функции $\alpha(\eta)$. В случае отсутствия трения между слоями точки ветвления выражаются формулами

$$\eta = \pm i\sqrt{\lambda(\frac{\varepsilon_1}{\rho_1}+\frac{\varepsilon_2}{\rho_2})}, \tag{1.22}$$

вытекающими из равенства (1.20). Если же учитывать трение между слоями, то точки ветвления функции $\alpha(\eta)$ определяются уравнением

$$\eta^2 = -\lambda(\frac{\varepsilon_1}{\rho_1}+\frac{\varepsilon_2}{\rho_2}) - \frac{b}{k\eta\varepsilon_1\varepsilon_2}(\lambda+\rho_{12}\eta^2) \tag{1.23}$$

и формулой

$$\eta = -b\rho_{12}/(k\varepsilon_1\varepsilon_2\rho_1\rho_2). \tag{1.24}$$

Остановимся на исследовании точек ветвления, определяемых уравнением (1.23). Предположим, что коэффициент трения b является малой величиной и подставим выражение (1.22) в правую часть равенства (1.23). После ряда элементарных преобразований приходим к выражениям

$$\eta = \pm i\sqrt{\lambda(\frac{\varepsilon_1}{\rho_1}+\frac{\varepsilon_2}{\rho_2})} - \frac{b(\rho_1-\rho_2)^2}{2k\rho_1\rho_2\rho_{12}}, \tag{1.25}$$

из которых следует, что точки ветвления смещаются в левую полуплоскость. Такое смещение соответствует затуханию, которое определяется коэффициентом затухания

$$\varkappa = \frac{b(\rho_1-\rho_2)^2}{2k\rho_1\rho_2\rho_{12}}. \tag{1.26}$$

В случае, когда плотности в обоих слоях равны ($\rho_1 = \rho_2$), коэффициент затухания (1.26) обращается в нуль. В этом случае равенство (1.20) переходит в соотношение

$$\alpha^2 = 1 + \frac{\rho\eta^2}{\lambda}. \tag{1.27}$$

Согласно формуле (1.27), эффективная модель при условии $\rho_1 = \rho_2$ является изотропной жидкостью и затухание в ней отсутствует. В заключение отметим, что точка ветвления (1.24), расположенная на отрицательной части вещественной оси, не связана с распространением волн, так как соответствует нулевой скорости и определяет затухание при $\rho_1 \neq \rho_2$ в каждой точке.

§2. Затухание в двумерной блочной жидкой среде

Пусть задана двумерная периодическая вдоль осей x и z блочная жидкая среда $0 \leqslant x \leqslant H$, $0 \leqslant z \leqslant \tilde{H}$, в которой в направлениях x и z расположено n и $\tilde{n}$ периодов с длинами h и $\tilde{h}$. Среда разделяется на $n\tilde{n}$ одинаковых прямоугольных ячеек с размерами h и $\tilde{h}$. Каждая ячейка состоит из 4 однородных изотропных жидких блоков 1, 2, 3, 4 (рис. 2). Размеры первого, второго, третьего и четвертого блоков выражаются равенствами

$$\begin{aligned} &h_1 = h\varepsilon_1, \tilde{h}_1 = \tilde{h}\tilde{\varepsilon}_1,\\ &h_2 = h\varepsilon_2, \tilde{h}_1 = \tilde{h}\tilde{\varepsilon}_1,\\ &h_1 = h\varepsilon_1, \tilde{h}_2 = \tilde{h}\tilde{\varepsilon}_2,\\ &h_2 = h\varepsilon_2, \tilde{h}_2 = h\tilde{\varepsilon}_2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

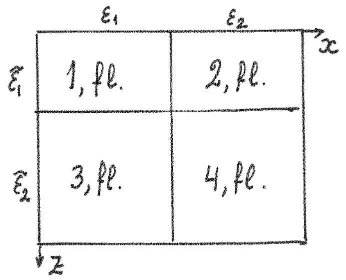

Рис. 2

Блок с номером $i (i = 1, 2, 3, 4)$ характеризуется плотностью ρ_i, скоростью распространения волны v_i, модулем $\lambda_i = \rho_i v_i^2$ и описывается уравнениями (1.1). На внутренних границах, параллельных оси x, выполняются условия

$$p_1 = p_3, \quad u_{z1} = u_{z3}, \quad p_2 = p_4, \quad u_{z2} = u_{z4}. \tag{2.2}$$

На границах между жидкостями 1 и 3, а также между жидкостями 2 и 4 возникают силы трения

$$b_{13}\Big(\frac{\partial u_{x1}}{\partial t} - \frac{\partial u_{x3}}{\partial t}\Big), \quad b_{24}\Big(\frac{\partial u_{x2}}{\partial t} - \frac{\partial u_{x4}}{\partial t}\Big), \tag{2.3}$$

где b_{13} и b_{24} – коэффициенты трения на границах между блоками 1 и 3 и между блоками 2 и 4. На внутренних границах, параллельных оси z, выполняются условия

$$p_1 = p_2, \quad u_{x1} = x_{x2}, \quad p_3 = p_4, \quad u_{x_3} = u_{x4}. \tag{2.4}$$

Между жидкостями 1 и 2, а также между жидкостями 3 и 4 образуются силы трения

$$b_{12}\left(\frac{\partial u_{z1}}{\partial t} - \frac{\partial u_{z2}}{\partial t}\right), \quad b_{34}\left(\frac{\partial u_{z3}}{\partial t} - \frac{\partial u_{z4}}{\partial t}\right), \tag{2.5}$$

при этом b_{12} и b_{34} – коэффициенты трения на границах между блоками 1 и 2 и блоками 3 и 4. Линейные краевые условия на внешних границах, а также характер и расположение источников, возбуждающих среду, являются несущественными.

Для построения эффективной модели совершим предельный переход в волновом поле при условиях

$$\begin{gathered} n \to \infty,\ \tilde{n} \to \infty,\ h_1 \to 0,\ \tilde{h}_1 \to 0,\ h_2 \to 0,\ \tilde{h}_2 \to 0, \\ H = \text{const},\ \tilde{H} = \text{const},\ \varepsilon_1 = \text{const},\ \varepsilon_2 = \text{const},\ \tilde{\varepsilon}_1 = \text{const},\ \tilde{\varepsilon}_2 = \text{const} \end{gathered} \tag{2.6}$$

и выясним, каким уравнениям удовлетворяют предельное волновое поле. Эти уравнения будут описывать эффективную модель, учитывающую осреднение заданной блочной среды. Это осреднение проведем сперва вдоль координаты z, а затем вдоль координаты x, при этом будем использовать результаты осреднения §1. После осреднения блоков 1 и 3 вдоль координаты z получим уравнения

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial p^{(13)}}{\partial x} = \rho_1 \frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2} + \frac{b_{13}}{\tilde{\varepsilon}_1}\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial t} - \frac{\partial u_{x3}}{\partial t}\right),\\
&-\frac{\partial p^{(13)}}{\partial x} = \rho_3 \frac{\partial^2 u_{x3}}{\partial t^2} + \frac{b_{13}}{\tilde{\varepsilon}_2}\left(\frac{\partial u_{x3}}{\partial t} - \frac{\partial u_{x1}}{\partial t}\right),\\
&-\frac{\partial p^{(13)}}{\partial z} = \rho_{13} \frac{\partial^2 u_z^{(13)}}{\partial t^2}, -p^{(13)} = \lambda_{13}\left(\tilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \tilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial u_{x3}}{\partial x} + \frac{\partial u_z^{(13)}}{\partial z}\right),
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

где

$$
\rho_{13} = \rho_1 \tilde{\varepsilon}_1 + \rho_3 \tilde{\varepsilon}_2, \quad \lambda_{13} = \frac{\lambda_1 \lambda_3}{\tilde{\varepsilon}_1 \lambda_3 + \tilde{\varepsilon}_2 \lambda_1}. \tag{2.8}
$$

Осреднение блоков 2 и 4 приводит к уравнениям

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial p^{(24)}}{\partial x} = \rho_2 \frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial t^2} + \frac{b_{24}}{\tilde{\varepsilon}_1}\left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial t} - \frac{\partial u_{x4}}{\partial t}\right),\\
&-\frac{\partial p^{(24)}}{\partial x} = \rho_4 \frac{\partial^2 u_{x4}}{\partial t^2} + \frac{b_{24}}{\tilde{\varepsilon}_2}\left(\frac{\partial u_{x4}}{\partial t} - \frac{\partial u_{x2}}{\partial t}\right),\\
&-\frac{\partial p^{(24)}}{\partial z} = \rho_{24} \frac{\partial^2 u_z^{(24)}}{\partial t^2}, \; -p^{(24)} = \lambda_{24}\left(\tilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + \tilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial u_{x4}}{\partial x} + \frac{\partial u_z^{(24)}}{\partial z}\right),
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

где

$$
\rho_{24} = \rho_2 \tilde{\varepsilon}_1 + \rho_4 \tilde{\varepsilon}_2, \quad \lambda_{24} = \frac{\lambda_2 \lambda_4}{\tilde{\varepsilon}_1 \lambda_4 + \tilde{\varepsilon}_2 \lambda_2}. \tag{2.10}
$$

Полученные равенства (2.7) и (2.9) аналогичны уравнениям (1.6).

В результате второго осреднения, проводимого вдоль оси x, приходим к уравнениям

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_{12}\frac{\partial^2 u_x^{(12)}}{\partial t^2} + \frac{b_x}{\tilde{\varepsilon}_1}\left(\frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial t} - \frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial t}\right),\\
&-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_{34}\frac{\partial^2 u_x^{(34)}}{\partial t^2} + \frac{b_x}{\tilde{\varepsilon}_2}\left(\frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial t} - \frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial t}\right),\\
&-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_{13}\frac{\partial^2 u_z^{(13)}}{\partial t^2} + \frac{b_z}{\varepsilon_1}\left(\frac{\partial u_z^{(13)}}{\partial t} - \frac{\partial u_z^{(24)}}{\partial t}\right),\\
&-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_{24}\frac{\partial u_z^{(24)}}{\partial t^2} + \frac{b_z}{\varepsilon_2}\left(\frac{\partial u_z^{(24)}}{\partial t} - \frac{\partial u_z^{(13)}}{\partial t}\right),\\
&\quad -p = \lambda\left(\tilde{\varepsilon}_1\frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial x} + \tilde{\varepsilon}_2\frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial x} + \varepsilon_1\frac{\partial u_z^{(13)}}{\partial z} + \varepsilon_2\frac{\partial u_z^{(24)}}{\partial z}\right),
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\rho_{12} = \rho_1\varepsilon_1 + \rho_2\varepsilon_2, \quad \rho_{34} = \rho_3\varepsilon_1 + \rho_4\varepsilon_2,\\
&b_x = b_{13}\varepsilon_1 + b_{24}\varepsilon_2, \quad b_z = b_{12}\tilde{\varepsilon}_1 + b_{34}\tilde{\varepsilon}_2,\\
&\quad \lambda = \frac{\lambda_{13}\lambda_{24}}{\varepsilon_1\lambda_{24} + \varepsilon_2\lambda_{13}} = \left(\frac{\varepsilon_1\tilde{\varepsilon}_1}{\lambda_1} + \frac{\varepsilon_2\tilde{\varepsilon}_1}{\lambda_2} + \frac{\varepsilon_1\tilde{\varepsilon}_2}{\lambda_3} + \frac{\varepsilon_2\tilde{\varepsilon}_2}{\lambda_4}\right)^{-1}.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Уравнения (2.11) могут быть также получены в случае первого осреднения вдоль оси x и второго осреднения вдоль оси z. Таким образом, уравнения (2.11) не зависят от последовательности осреднений. Уравнения (2.11) описывают двумерную двухфазную анизотропную вязкую жидкость. Одна из фаз определяется смещениями $u_x^{(12)}$, $u_z^{(13)}$, а другая – смещениями $u_x^{(34)}$, $u_z^{(24)}$. Давления в обеих фазах одинаковые. Без учета вязкости эта модель была получена в работе [7], в которой ее обе фазы были осреднены в одну фазу. Однако такое сокращение фаз возможно только при отсутствии затухания.

Чтобы исследовать затухание в полученной модели помножим первое, второе, третье и четвертое уравнения (2.11) соответственно на

$$
\tilde{\varepsilon}_1\frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial t}, \quad \tilde{\varepsilon}_2\frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial t}, \quad \varepsilon_1\frac{\partial u_z^{(13)}}{\partial t}, \quad \varepsilon_2\frac{\partial u_z^{(24)}}{\partial t}, \tag{2.13}
$$

сложим почленно полученные уравнения и после простых преобразований придем к уравнению энергетического баланса

$$\frac{\partial p_x}{\partial x}+\frac{\partial p_z}{\partial z} = \frac{\partial W_k}{\partial t}+\frac{\partial W_p}{\partial t}+b_x\left(\frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial t}-\frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial t}\right)^2+b_z\left(\frac{\partial u_z^{(13)}}{\partial t}-\frac{\partial u_z^{(24)}}{\partial t}\right)^2. \tag{2.14}$$

В уравнении (2.14)

$$p_x = -p\left(\tilde{\varepsilon}_1\frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial t}+\tilde{\varepsilon}_2\frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial t}\right),$$

$$p_z = -p\left(\varepsilon_1\frac{\partial u_z^{(13)}}{\partial t}+\varepsilon_2\frac{\partial u_z^{(24)}}{\partial t}\right) \tag{2.15}$$

– потоки энергий вдоль осей x и z,

$$W_k = \frac{1}{2}\left[\tilde{\varepsilon}_1\rho_{12}\left(\frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial t}\right)^2+\tilde{\varepsilon}_2\rho_{34}\left(\frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial t}\right)^2 \right.$$
$$\left. +\varepsilon_1\rho_{13}\left(\frac{\partial u_z^{(13)}}{\partial t}\right)^2+\varepsilon_2\rho_{24}\left(\frac{\partial u_z^{(24)}}{\partial t}\right)^2\right] \tag{2.16}$$

– плотность кинетической энергии и

$$\frac{\partial W_p}{\partial t} = -p\left(\tilde{\varepsilon}_1\frac{\partial^2 u_x^{(12)}}{\partial t\partial x}+\tilde{\varepsilon}_2\frac{\partial^2 u_x^{(34)}}{\partial t\partial x}+\varepsilon_1\frac{\partial^2 u_z^{(13)}}{\partial t\partial z}+\varepsilon_2\frac{\partial^2 u_z^{(24)}}{\partial t\partial z}\right) \tag{2.17}$$

– скорость изменения плотности потенциальной энергии. Используя пятое уравнение (2.11), придем к соотношениям

$$W_p = \frac{\lambda}{2}\left(\tilde{\varepsilon}_1\frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial x}+\tilde{\varepsilon}_2\frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial x}+\varepsilon_1\frac{\partial u_z^{(13)}}{\partial z}+\varepsilon_2\frac{\partial u_z^{(24)}}{\partial z}\right)^2 = \frac{p^2}{2\lambda} \tag{2.18}$$

для плотности потенциальной энергии. Из формул (2.14)–(2.18) следует, что в рассматриваемой среде имеет место затухание. Если не учитывать потоки энергии, то из соотношения (2.14) получим равенство

$$W_k(t)+W_p(t) = W_k(0)+W_p(0)-b_x\int_0^t\left(\frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial t}-\frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial t}\right)^2 dt$$
$$-b_z\int_0^t\left(\frac{\partial u_z^{(13)}}{\partial t}-\frac{\partial u_z^{(24)}}{\partial t}\right)^2 dt, \tag{2.19}$$

из которого следует, что плотность полной энергии убывает в каждой точке среды. В энергетически изолированной среде с объемом v полная энергия выражается формулами

$$W(t) = W(0) - b_x \int_0^t dt \iint_v \left(\frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial t} - \frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial t} \right)^2 dv$$

$$-b_z \int_0^t dt \iint_v \left(\frac{\partial u_z^{(13)}}{\partial t} - \frac{\partial u_z^{(24)}}{\partial t} \right) dv \tag{2.20}$$

и монотонно уменьшается со временем.

§3. Исследование частных случаев двумерной блочной жидкой среды

1. В рассматриваемой двумерной блочной жидкой среде сделаем ряд предположений

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 = \tilde{\varepsilon}_1,\ \varepsilon_2 = \tilde{\varepsilon}_2,\ \rho_1 = \rho_4,\ \rho_2 = \rho_3,\ \rho_{12} = \rho_{13},\ \rho_{24} = \rho_{34}, \\ &\lambda_1 = \lambda_4,\ \lambda_2 = \lambda_3,\ b_x = b_z = b. \end{aligned} \tag{3.1}$$

При этих предположениях эффективная модель описывается уравнениями

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{dx} &= \rho_{12} \frac{\partial^2 u_x^{(12)}}{\partial t^2} + \frac{b}{\varepsilon_1}\left(\frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial t} - \frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial t} \right), \\ -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho_{34} \frac{\partial^2 u_x^{(34)}}{\partial t^2} + \frac{b}{\varepsilon_2}\left(\frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial t} - \frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial t} \right), \\ -\frac{\partial p}{\partial z} &= \rho_{12} \frac{\partial^2 u_z^{(13)}}{\partial t^2} + \frac{b}{\varepsilon_1}\left(\frac{\partial u_z^{(13)}}{\partial t} - \frac{\partial u_z^{(24)}}{\partial t} \right), \\ -\frac{\partial p}{\partial z} &= \rho_{34} \frac{\partial^2 u_z^{(24)}}{\partial t^2} + \frac{b}{\varepsilon_2}\left(\frac{\partial u_z^{(24)}}{\partial t} - \frac{\partial u_z^{(13)}}{\partial t} \right), \\ -p &= \lambda\left[\varepsilon_1 \left(\frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial x} + \frac{\partial u_z^{(13)}}{\partial z} \right) + \varepsilon_2 \left(\frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial x} + \frac{\partial u_z^{(24)}}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Решения уравнений (3.2) представляются равенствами

$$u_x^{(i)} = \int\limits_0^\infty \frac{\sin kx dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (U_x^{(i)+} e^{kz\alpha} + U_x^{(i)-} e^{-kz\alpha}) e^{kt\eta} d\eta \ (i = 12, 34),$$

$$u_z^{(j)} = \int\limits_0^\infty \frac{\cos kx dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma+i\infty}^{\sigma+i\infty} (U_z^{(j)+} e^{kz\alpha} + U_z^{(j)} e^{-kz\alpha}) e^{kt\eta} d\eta, (j = 13, 24),$$

$$-p = \int\limits_0^\infty \frac{k \cos kx dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (P^+ e^{kz\alpha} + P^- e^{-kz\alpha}) e^{kt\eta} d\eta. \qquad (3.3)$$

Функции $U_x^{(12)+}$, $U_x^{(34)+}$, $U_z^{(13)+}$, $U_z^{(24)+}$ и P^+, входящие в равенства (3.3), удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}
P^+ &= \left(\rho_{12}\eta^2 + \frac{b\eta}{k\varepsilon_1}\right) U_x^{(12)+} - \frac{b\eta}{k\varepsilon_1} U_x^{(34)+},\\
P^+ &= -\frac{b\eta}{k\varepsilon_2} U_x^{(12)+} + \left(\rho_{34}\eta^2 + \frac{b\eta}{k\varepsilon_2}\right) U_x^{(34)+},\\
-\alpha P^+ &= \left(\rho_{12}\eta^2 + \frac{b\eta}{k\varepsilon_1}\right) U_z^{(13)+} - \frac{b\eta}{k\varepsilon_1} U_z^{(24)+},\\
-\alpha P^+ &= -\frac{b\eta}{k\varepsilon_2} U_z^{(13)+} + \left(\rho_{34}\eta^2 + \frac{b\eta}{k\varepsilon_2}\right) U_z^{(24)+},\\
-\lambda^{-1} P^+ &= \varepsilon_1 U_x^{(12)+} + \varepsilon_2 U_x^{(34)+} + \varepsilon_1 \alpha U_z^{(13)+} + \varepsilon_2 \alpha U_z^{(24)+}.
\end{aligned} \qquad (3.4)$$

Система уравнений (3.4) имеет ненулевое решение при условии

$$\begin{vmatrix}
-\varepsilon_1 & \varepsilon_1\rho_{12}\eta^2 + \frac{b\eta}{k} & -\frac{b\eta}{k} & 0 & 0\\
-\varepsilon_2 & -\frac{b\eta}{k} & \varepsilon_2\rho_{34}\eta^2 + \frac{b\eta}{k} & 0 & 0\\
\varepsilon_1\alpha & 0 & 0 & \varepsilon_1\rho_{12}\eta^2 + \frac{b\eta}{k} & -\frac{b\eta}{k}\\
\varepsilon_2\alpha & 0 & 0 & -\frac{bn}{k} & \varepsilon_2\rho_{34}\eta^2 + \frac{b\eta}{k}\\
\lambda^{-1} & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \alpha\varepsilon_1 & \alpha\varepsilon_2
\end{vmatrix} = 0. \qquad (3.5)$$

Равенство (3.5) определяет характеристическую функцию α. При использовании свойств определителей приходим к равенствам

$$\alpha^2 = \frac{\begin{vmatrix} k\varepsilon_1 & k\varepsilon_1\rho_{12}\eta^2 + b\eta & -b\eta \\ k\varepsilon_2 & -b\eta & k\varepsilon_2\rho_{34}\eta^2 + b\eta \\ -\lambda^{-1} & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k\varepsilon_1 & k\varepsilon_1\rho_{12}\eta^2 + b\eta & -b\eta \\ k\varepsilon_2 & -b\eta & k\varepsilon_2\rho_{34}\eta^2 + b\eta \\ 0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{vmatrix}} =$$

$$= 1 + \frac{\eta^2}{\lambda} \frac{\begin{vmatrix} k\eta\varepsilon_1\rho_{12} + b & -b \\ -b & k\eta\varepsilon_2\rho_{34} + b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k\varepsilon_1 & k\varepsilon_1\rho_{12}\eta^2 + b\eta & -b\eta \\ k\varepsilon_2 & -b\eta & k\varepsilon_2\rho_{34}\eta^2 + b\eta \\ 0 & -\varepsilon_1 & -\varepsilon_2 \end{vmatrix}} \tag{3.6}$$

После вычисления определителей равенства (3.6) заменяются соотношением

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{\lambda} \frac{k\varepsilon_1\varepsilon_2\rho_{12}\rho_{34}\eta + b(\varepsilon_1\rho_{12} + \varepsilon_2\rho_{34})}{k\eta\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1\rho_{34} + \varepsilon_2\rho_{12}) + b}}. \tag{3.7}$$

Из равенства (3.7) следует, что эффективная модель при предположениях (3.1) является изотропной жидкостью с затуханием и скоростью распространения

$$v = \sqrt{\frac{\lambda(\varepsilon_1\rho_{34} + \varepsilon_2\rho_{12})}{\rho_{12}\rho_{34}}}, \tag{3.8}$$

которая соответствует результатам работы [7].

Чтобы записать выражение для коэффициента затухания необходимо предварительно найти точки ветвления радикала (3.7), которые определяются равенствами

$$\eta^2 = -\lambda \frac{k\eta\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1\rho_{34} + \varepsilon_2\rho_{12}) + b}{k\eta\varepsilon_1\varepsilon_2\rho_{12}\rho_{34} + b(\varepsilon_1\rho_{12} + \varepsilon_2\rho_{34})} \tag{3.9}$$

и формулой

$$\eta = -b\frac{\varepsilon_1\rho_{12} + \varepsilon_2\rho_{34}}{k\eta\varepsilon_1\varepsilon_2\rho_{12}\rho_{34}}. \tag{3.10}$$

Точка ветвления (3.10) подобна точке ветвления (1.24), не связана с распространением волн и определяет затухание в каждой точке среды. Из равенства (3.9) следуют соотношения

$$\eta = \pm i\sqrt{\lambda\frac{\rho_{34}\varepsilon_1 + \rho_{12}\varepsilon_2}{\rho_{12}\rho_{34}}} - \frac{b(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2(\rho_1 - \rho_2)^2}{2k\rho_{12}\rho_{34}(\varepsilon_1\rho_{34} + \varepsilon_2\rho_{12})}, \tag{3.11}$$

определяющие точки ветвления при малых b. В случае отсутствия затухания точки ветвления лежат на мнимой оси и их положение определяет скорость волны (3.8). Второе слагаемое описывает смещение точек ветвления в левую полуплоскость при учете затухания в линейном приближении. Коэффициент затухания выражается формулой

$$\varkappa = \frac{b(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2(\rho_1 - \rho_2)^2}{2k\rho_{12}\rho_{34}(\varepsilon_1\rho_{34} + \varepsilon_2\rho_{12})} \tag{3.12}$$

и обращается в нуль в двух случаях, когда $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ или когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.5$. При $\rho_1 = \rho_2$ вязкое трение отсутствует и характеристическая функция (3.7) представляется равенством

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{\rho\eta^2}{\lambda}}. \tag{3.13}$$

Если выполняется условие $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.5$, то осредненные плотности вдоль осей x и z оказываются одинаковыми ($\rho_{12} = \rho_{34} = 0.5(\rho_1 + \rho_2)$ и поэтому вязкое трение не возникает. Характеристическая функция при этом условии выражается формулой

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{(\rho_1 + \rho_2)\eta^2}{2\lambda}}. \tag{3.14}$$

Оба выражения (3.13) и (3.14) соответствуют идеальным жидкостям.

2. Сделаем ряд предположений

$$\begin{gathered}\varepsilon_1 = \tilde{\varepsilon}_1,\ \varepsilon_2 = \tilde{\varepsilon}_2,\ \rho_2 = \rho_3 = \rho_4,\ \rho_{12} = \rho_{13},\ \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4, \\ b_{12} = b_{13} = b,\ b_{24} = b_{34} = 0. \end{gathered} \tag{3.15}$$

При этих предположениях эффективная модель описывается уравнениями

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho_{12}\frac{\partial^2 u_x^{(12)}}{\partial t^2} + b\left(\frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial t} - \frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial t}\right),\\
-\varepsilon_2\frac{\partial p}{\partial x} &= \varepsilon_2\rho_2\frac{\partial^2 u_x^{(34)}}{\partial t^2} + \varepsilon_1 b\left(\frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial t} - \frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial t}\right),\\
-\frac{\partial p}{\partial z} &= \rho_{12}\frac{\partial^2 u_z^{(13)}}{\partial t^2} + b\left(\frac{\partial u_z^{(13)}}{\partial t} - \frac{\partial u_z^{(24)}}{\partial t}\right),\\
-\varepsilon_2\frac{\partial p}{\partial z} &= \varepsilon_2\rho_2\frac{\partial^2 u_z^{(24)}}{\partial t^2} + \varepsilon_1 b\left(\frac{\partial u_z^{(24)}}{\partial t} - \frac{\partial u_z^{(13)}}{\partial t}\right),\\
-p &= \left[\varepsilon_1\frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial x} + \varepsilon_2\frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial x} + \varepsilon_1\frac{\partial u_z^{(13)}}{\partial z} + \varepsilon_2\frac{\partial u_z^{(24)}}{\partial z}\right].
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Решения уравнений (3.16) представляются равенствами (3.3), и после подстановки (3.3) в (3.16) приходим к системе уравнений

$$
\begin{aligned}
P^+ &= \left(\rho_{12}\eta^2 + \frac{b\eta}{k}\right)U_x^{(12)+} - \frac{b\eta}{k}U_x^{(34)+},\\
\varepsilon_1 P^+ &= -\frac{\varepsilon_1 b\eta}{k}U_x^{(12)+} + \left(\varepsilon_2\rho_2\eta^2 + \frac{\varepsilon_1 b\eta}{k}\right)U_x^{(34)+},\\
-\alpha P^+ &= \left(\rho_{12}\eta^2 + \frac{b\eta}{k}\right)U_z^{(13)+} - \frac{b\eta}{k}U_z^{(24)+},\\
-\varepsilon_2\alpha P^+ &= -\varepsilon_1\frac{b\eta}{k}U_z^{(13)+} + \left(\varepsilon_2\rho_2\eta^2 + \frac{\varepsilon_1 b\eta}{k}\right)U_z^{(24)+},\\
-P^+\lambda^{-1} &= \varepsilon_1 U_x^{(12)+} + \varepsilon_2 U_x^{(34)+} + \varepsilon_1\alpha U_z^{(13)+} + \varepsilon_2\alpha U_z^{(24)+}.
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Система (3.17) имеет ненулевое решение при условии

$$
\begin{vmatrix}
-1 & \rho_{12}\eta^2 + \frac{b\eta}{k} & -\frac{b\eta}{k} & 0 & 0\\
-\varepsilon_1 & -\varepsilon_1\frac{b\eta}{k} & \varepsilon_2\rho_2\eta^2 + \varepsilon_1\frac{b\eta}{k} & 0 & 0\\
\alpha & 0 & 0 & \rho_{12}\eta^2 + \frac{b\eta}{k} & -\frac{b\eta}{k}\\
\alpha\varepsilon_2 & 0 & 0 & -\varepsilon_1\frac{b\eta}{k} & \varepsilon_2\rho_2\eta^2 + \varepsilon_1\frac{b\eta}{k}\\
\lambda^{-1} & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \alpha\varepsilon_1 & \alpha\varepsilon_2
\end{vmatrix} = 0.
\tag{3.18}
$$

Равенство (3.18) определяет характеристическую функцию α.

Используя свойства определителей, приходим к равенствам

$$\alpha^2 = \frac{\begin{vmatrix} k & k\rho_{12}\eta^2 + b\eta & -b\eta \\ k\varepsilon_2 & -\varepsilon_1 b\eta & k\varepsilon_2\rho_2\eta^2 + \varepsilon_1 b\eta \\ \lambda^{-1} & -\varepsilon_1 & -\varepsilon_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & k\rho_{12}\eta^2 + b\eta & -b\eta \\ k\varepsilon_2 & -\varepsilon_1 b\eta & k\varepsilon_2\rho_2\eta^2 + \varepsilon_1 b\eta \\ 0 & -\varepsilon_1 & -\varepsilon_2 \end{vmatrix}} =$$

$$= 1 + \frac{\eta^2}{\lambda} \frac{\begin{vmatrix} k\eta\rho_{12} + b & -b \\ -\varepsilon_1 b & k\eta\varepsilon_2\rho_2 + b\varepsilon_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & k\rho_{12}\eta^2 + b\eta & -b\eta \\ k\varepsilon_2 & -\varepsilon_1 b\eta & k\varepsilon_2\rho_2\eta^2 + \varepsilon_1 b\eta \\ 0 & -\varepsilon_1 & -\varepsilon_2 \end{vmatrix}}. \tag{3.19}$$

После вычисления определителей равенства (3.19) заменяются на соотношение

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{\lambda} \frac{\varepsilon_2\rho_2\rho_{12}k\eta + b(\varepsilon_1\rho_{12} + \varepsilon_2\rho_2)}{\varepsilon_2(\varepsilon_1\rho_2 + \varepsilon_2\rho_{12})k\eta + b}}. \tag{3.20}$$

Из равенства (3.20) следует, что эффективная модель при предположениях (3.15) является изотропной жидкостью, в которой имеет место затухание и скорость волны выражается формулой

$$v = \sqrt{\frac{\lambda(\varepsilon_1\rho_2 + \varepsilon_2\rho_{12})}{\rho_2\rho_{12}}}, \tag{3.21}$$

совпадающей с равенством (4.14) работы [7].

Для вывода выражения коэффициента затухания найдем точки ветвления радикала (3.20)

$$\eta^2 = -\lambda \frac{\varepsilon_2(\varepsilon_1\rho_2 + \varepsilon_2\rho_{12})k\eta + b}{\varepsilon_2\rho_2\rho_{12}k\eta + b(\varepsilon_1\rho_{12} + \varepsilon_2\rho_2)}, \tag{3.22}$$

$$\eta = -\frac{b}{\varepsilon_2 k(\varepsilon_1\rho_2 + \varepsilon_2\rho_{12})}. \tag{3.23}$$

Точка ветвления (3.23), как и точки (1.24) и (3.9), не связана с распространением волн. Из равенства (3.22) следует соотношение

$$\eta = \pm i\sqrt{\frac{\lambda(\varepsilon_1\rho_2 + \varepsilon_2\rho_{12})}{\rho_2\rho_{12}}} - \frac{b\varepsilon_1^3(\rho_1 - \rho_2)^2}{2k\rho_2\rho_{12}(\varepsilon_1\rho_2 + \rho_{12}\varepsilon_2)}, \tag{3.24}$$

справедливое при малых b. Мнимая часть выражения (3.24) определяет скорость распространения (3.21), а правая часть – коэффициент затухания

$$\varkappa = \frac{b\varepsilon_1^3(\rho_1 - \rho_2)^2}{2k\rho_2\rho_{12}(\varepsilon_1\rho_2 + \rho_{12}\varepsilon_2)}. \tag{3.25}$$

Коэффициент затухания обращается в нуль в случае, когда плотности одинаковы ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$) или когда размеры блока 1 равны 0. Если $\rho_1 = \rho_2$, то затухание в эффективной модели отсутствует,

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{\rho\eta^2}{\lambda}} \tag{3.26}$$

и эффективная модель является идеальной жидкостью.

§4. Затухание в трехмерной блочной жидкой среде

Рассмотрим трехмерную периодическую в трех направлениях блочную жидкую среду. Подобная среда была задана в §1 работы [7] и отличается от указанной среды только наличием трения на границах между блоками. Вся среда вдоль осей x, y, z имеет размеры H, $\overline{H}$, $\widetilde{H}$. Ячейка среды, как и в работе [7], состоит из 8 блоков и представляется на рис. 3. Размеры ячеек определяются соответственно величинами $h = H/n$, $\bar{h} = \bar{H}/\bar{n}$, $\tilde{h} = \tilde{h}/\tilde{n}$, при этом n, $\bar{n}$, $\tilde{n}$ – числа периодов вдоль осей x, y, z. Относительные размеры блоков вдоль осей x, y, z даются величинами ε_1, $\varepsilon_2 = 1 - \varepsilon_1$, $\overline{\varepsilon_1}$, $\overline{\varepsilon_2} = 1 - \overline{\varepsilon_1}$, $\widetilde{\varepsilon}_1$, $\widetilde{\varepsilon}_2 = 1 - \widetilde{\varepsilon}_1$.

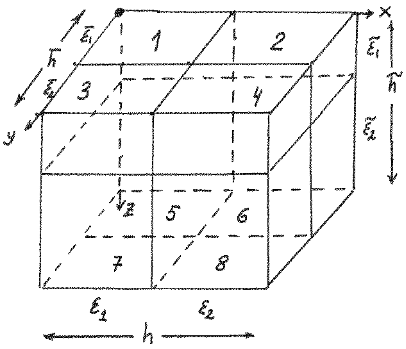

Рис. 3.

Блок с номером i описывается уравнениями

$$-\frac{\partial p_i}{\partial x} = \rho_i \frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial t^2}, -\frac{\partial p_i}{\partial y} = \rho_i \frac{\partial^2 u_{yi}}{\partial t^2}, -\frac{\partial p_i}{\partial z} = \rho_i \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial t^2},$$
$$-p = \lambda_i \left(\frac{\partial u_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial u_{yi}}{\partial y} + \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} \right). \quad (4.1)$$

Граничные условия между блоками задаются равенствами (1.4)–(1.6) работы [7]. На границах между блоками следует дополнительно учесть силы трения, которые задаются соотношениями типа (1.6), (2.3), (2.5) с коэффициентами трения b_{12}, b_{13}, b_{15}, b_{24}, b_{26}, b_{34}, b_{37}, b_{48}, b_{56}, b_{57}, b_{68} и b_{78}, в которых индексы определяют границы между блоками. Условия на внешних границах и источники, возбуждающие среду, оказываются несущественными.

В волновом поле в заданной среде совершается предельный переход при условиях (1.7) [7]. Это переход подобен предельным переходам (1.3) и (2.6). В случае отсутствия трения между блоками среда после предельного перехода описывается 13 уравнениями (1.13) и (1.19) [7], которые осредняются и заменяются 4 уравнениями (1.25) и (1.26) [7]. При учете трения между блоками в 12 уравнений (из указанных 13 уравнений) необходимо добавить дополнительные члены, описывающие трение. С этими дополнительными членами указанные уравнения не осредняются. Тринадцатое уравнение (1.19) [7], определяющее закон Гука для жидкой смеси, остается без изменения. В результате после предельного перехода с учетом трения приходим к уравнениям

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_{12} \frac{\partial^2 u_x^{(12)}}{\partial t^2} + \frac{b_{13,24}}{\bar\varepsilon_1 \tilde\varepsilon_1} \left(\frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial t} - \frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial t} \right) + \frac{b_{15,26}}{\bar\varepsilon_1 \tilde\varepsilon_1} \left(\frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial t} - \frac{\partial u_x^{(56)}}{\partial t} \right),$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_{34} \frac{\partial^2 u_x^{(34)}}{\partial t^2} + \frac{b_{13,24}}{\bar\varepsilon_2 \tilde\varepsilon_1} \left(\frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial t} - \frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial t} \right) + \frac{b_{37,48}}{\bar\varepsilon_2 \tilde\varepsilon_1} \left(\frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial t} - \frac{\partial u_x^{(78)}}{\partial t} \right),$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_{56} \frac{\partial^2 u_x^{(56)}}{\partial t^2} + \frac{b_{15,26}}{\bar\varepsilon_1 \tilde\varepsilon_2} \left(\frac{\partial u_x^{(56)}}{\partial t} - \frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial t} \right) + \frac{b_{57,68}}{\bar\varepsilon_1 \tilde\varepsilon_2} \left(\frac{\partial u_x^{(56)}}{\partial t} - \frac{\partial u_x^{(78)}}{\partial t} \right),$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_{78} \frac{\partial^2 u_x^{(78)}}{\partial t^2} + \frac{b_{37,48}}{\bar\varepsilon_2 \tilde\varepsilon_2} \left(\frac{\partial u_x^{(78)}}{\partial t} - \frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial t} \right) + \frac{b_{57,68}}{\bar\varepsilon_2 \tilde\varepsilon_2} \left(\frac{\partial u_x^{(78)}}{\partial t} - \frac{\partial u_x^{(56)}}{\partial t} \right),$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = \rho_{13} \frac{\partial^2 u_y^{(13)}}{\partial t^2} + \frac{b_{12,34}}{\varepsilon_1 \tilde\varepsilon_1} \left(\frac{\partial u_y^{(13)}}{\partial t} - \frac{\partial u_y^{(24)}}{\partial t} \right) + \frac{b_{15,37}}{\varepsilon_1 \tilde\varepsilon_1} \left(\frac{\partial u_y^{(13)}}{\partial t} - \frac{\partial u_y^{(57)}}{\partial t} \right),$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y}=\rho_{24}\frac{\partial^2 u_y^{(24)}}{\partial t^2}+\frac{b_{12,34}}{\varepsilon_2\tilde{\varepsilon}_1}\left(\frac{\partial u_y^{(24)}}{\partial t}-\frac{\partial u_y^{(13)}}{\partial t}\right)+\frac{b_{26,48}}{\varepsilon_2\tilde{\varepsilon}_1}\left(\frac{\partial u_y^{(24)}}{\partial t}-\frac{\partial u_y^{(68)}}{\partial t}\right),$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y}=\rho_{57}\frac{\partial^2 u_y^{(57)}}{\partial t^2}+\frac{b_{15,37}}{\varepsilon_1\tilde{\varepsilon}_2}\left(\frac{\partial u_y^{(57)}}{\partial t}-\frac{\partial u_y^{(13)}}{\partial t}\right)+\frac{b_{56,78}}{\varepsilon_1\tilde{\varepsilon}_2}\left(\frac{\partial u_y^{(57)}}{\partial t}-\frac{\partial u_y^{(68)}}{\partial t}\right),$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y}=\rho_{68}\frac{\partial^2 u_y^{(68)}}{\partial t^2}+\frac{b_{26,48}}{\varepsilon_2\tilde{\varepsilon}_2}\left(\frac{\partial u_y^{(68)}}{\partial t}-\frac{\partial u_y^{(24)}}{\partial t}\right)+\frac{b_{56,78}}{\varepsilon_2\tilde{\varepsilon}_2}\left(\frac{\partial u_y^{(68)}}{\partial t}-\frac{\partial u_y^{(57)}}{\partial t}\right),$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z}=\rho_{15}\frac{\partial^2 u_z^{(15)}}{\partial t^2}+\frac{b_{12,56}}{\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_1}\left(\frac{\partial u_z^{(15)}}{\partial t}-\frac{\partial u_z^{(26)}}{\partial t}\right)+\frac{b_{13,57}}{\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_1}\left(\frac{\partial u_z^{(15)}}{\partial t}-\frac{\partial u_z^{(37)}}{\partial t}\right),$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z}=\rho_{26}\frac{\partial^2 u_z^{(26)}}{\partial t^2}+\frac{b_{12,56}}{\varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1}\left(\frac{\partial u_z^{(26)}}{\partial t}-\frac{\partial u_z^{(15)}}{\partial t}\right)+\frac{b_{24,68}}{\varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1}\left(\frac{\partial u_z^{(26)}}{\partial t}-\frac{\partial u_z^{(48)}}{\partial t}\right),$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z}=\rho_{37}\frac{\partial^2 u_z^{(37)}}{\partial t^2}+\frac{b_{13,57}}{\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2}\left(\frac{\partial u_z^{(37)}}{\partial t}-\frac{\partial u_z^{(15)}}{\partial t}\right)+\frac{b_{34,78}}{\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2}\left(\frac{\partial u_z^{(37)}}{\partial t}-\frac{\partial u_z^{(48)}}{\partial t}\right),$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z}=\rho_{48}\frac{\partial^2 u_z^{(48)}}{\partial t^2}+\frac{b_{24,68}}{\varepsilon_2\bar{\varepsilon}_2}\left(\frac{\partial u_z^{(48)}}{\partial t}-\frac{\partial u_z^{(26)}}{\partial t}\right)+\frac{b_{34,78}}{\varepsilon_2\bar{\varepsilon}_2}\left(\frac{\partial u_z^{(48)}}{\partial t}-\frac{\partial u_z^{(37)}}{\partial t}\right),$$

$$-p=\lambda\Bigg[\bar{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}_1\frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial x}+\bar{\varepsilon}_2\tilde{\varepsilon}_1\frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial x}+\bar{\varepsilon}_1\tilde{\varepsilon}_2\frac{\partial u_x^{(56)}}{\partial x}+\bar{\varepsilon}_2\tilde{\varepsilon}_2\frac{\partial u_x^{(78)}}{\partial x}+$$

$$+\varepsilon_1\tilde{\varepsilon}_1\frac{\partial u_y^{(13)}}{\partial y}+\varepsilon_2\tilde{\varepsilon}_1\frac{\partial u_y^{(24)}}{\partial y}+\varepsilon_1\tilde{\varepsilon}_2\frac{\partial u_y^{(57)}}{dy}+\varepsilon_2\tilde{\varepsilon}_2\frac{\partial u_y^{(68)}}{\partial y}+$$

$$+\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_1\frac{\partial u_z^{(15)}}{\partial z}+\varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1\frac{\partial u_z^{(26)}}{\partial z}+\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2\frac{\partial u_z^{(37)}}{\partial z}+\varepsilon_2\bar{\varepsilon}_2\frac{\partial u_z^{(48)}}{\partial z}\Bigg], \qquad (4.2)$$

в которых

$$\begin{aligned}
\rho_{12} =& \rho_1\varepsilon_1 + \rho_2\varepsilon_2, \quad & b_{13,24} = b_{13}\varepsilon_1 + b_{24}\varepsilon_2,\\
\rho_{34} =& \rho_3\varepsilon_1 + \rho_4\varepsilon_2, \quad & b_{15,26} = b_{15}\varepsilon_1 + b_{26}\varepsilon_2,\\
\rho_{56} =& \rho_5\varepsilon_1 + \rho_6\varepsilon_2, \quad & b_{37,48} = b_{37}\varepsilon_1 + b_{48}\varepsilon_2,\\
\rho_{78} =& \rho_7\varepsilon_1 + \rho_8\varepsilon_2, \quad & b_{57,68} = b_{57}\varepsilon_1 + b_{68}\varepsilon_2,\\
\rho_{13} =& \rho_1\bar\varepsilon_1 + \rho_3\bar\varepsilon_2, \quad & b_{12,34} = b_{12}\bar\varepsilon_1 + b_{34}\bar\varepsilon_2,\\
\rho_{24} =& \rho_2\bar\varepsilon_1 + \rho_4\bar\varepsilon_2, \quad & b_{15,37} = b_{15}\bar\varepsilon_1 + b_{37}\bar\varepsilon_2,\\
\rho_{57} =& \rho_5\bar\varepsilon_1 + \rho_7\bar\varepsilon_2, \quad & b_{26,48} = b_{26}\bar\varepsilon_1 + b_{48}\bar\varepsilon_2,\\
\rho_{68} =& \rho_6\bar\varepsilon_1 + \rho_8\bar\varepsilon_2, \quad & b_{56,78} = b_{56}\bar\varepsilon_1 + b_{78}\bar\varepsilon_2,\\
\rho_{15} =& \rho_1\tilde\varepsilon_1 + \rho_5\tilde\varepsilon_2, \quad & b_{12,56} = b_{12}\tilde\varepsilon_1 + b_{56}\tilde\varepsilon_2,\\
\rho_{26} =& \rho_2\tilde\varepsilon_1 + \rho_6\tilde\varepsilon_2, \quad & b_{13,57} = b_{13}\tilde\varepsilon_1 + b_{57}\tilde\varepsilon_2,\\
\rho_{37} =& \rho_3\tilde\varepsilon_1 + \rho_7\tilde\varepsilon_2, \quad & b_{24,68} = b_{24}\tilde\varepsilon_1 + b_{68}\tilde\varepsilon_2\\
\rho_{48} =& \rho_4\tilde\varepsilon_1 + \rho_8\tilde\varepsilon_2, \quad & b_{34,78} = b_{34}\tilde\varepsilon_1 + b_{78}\tilde\varepsilon_2,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\lambda = \left[\frac{\varepsilon_1\bar\varepsilon_1\tilde\varepsilon_1}{\lambda_1} + \frac{\varepsilon_2\bar\varepsilon_1\tilde\varepsilon_1}{\lambda_2} + \frac{\varepsilon_1\bar\varepsilon_2\tilde\varepsilon_1}{\lambda_3} + \frac{\varepsilon_2\bar\varepsilon_2\tilde\varepsilon_1}{\lambda_4} \right.$$
$$\left. + \frac{\varepsilon_1\bar\varepsilon_1\tilde\varepsilon_2}{\lambda_5} + \frac{\varepsilon_2\bar\varepsilon_1\tilde\varepsilon_2}{\lambda_6} + \frac{\varepsilon_1\bar\varepsilon_2\tilde\varepsilon_2}{\lambda_7} + \frac{\varepsilon_2\bar\varepsilon_2\tilde\varepsilon_2}{\lambda_8}\right]^{-1}.$$

В уравнениях (4.2) коэффициенты трения делятся на относительные объемы двойных блоков, на границе которых действуют силы трения.

В этом отношении уравнения (4.2) отличаются от уравнений (2.11), в которых коэффициенты трения делятся на относительные размеры плоских двойных блоков.

Энергетическое исследование уравнений (4.2) проводятся теми же методами, как и в случае уравнений (1.6) и (2.7), и поэтому мы будем излагать это исследование кратко. Помножим первое, второе, ... двенадцатое уравнения (4.2) соответственно на множители

$$\bar\varepsilon_1\tilde\varepsilon_1\frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial t},\ \bar\varepsilon_2\tilde\varepsilon_1\frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial t},\ \bar\varepsilon_1\tilde\varepsilon_2\frac{\partial u_x^{(56)}}{\partial t},\ \bar\varepsilon_2\tilde\varepsilon_2\frac{\partial u_x^{(78)}}{\partial t},$$
$$\varepsilon_1\tilde\varepsilon_1\frac{\partial u_y^{(13)}}{\partial t},\ \varepsilon_2\tilde\varepsilon_2\frac{\partial u_y^{(24)}}{\partial t},\varepsilon_1\tilde\varepsilon_2\frac{\partial u_y^{(57)}}{\partial t},\ \varepsilon_2\tilde\varepsilon_2\frac{\partial u_y^{(68)}}{\partial t},$$
$$\varepsilon_1\bar\varepsilon_1\frac{\partial u_z^{(15)}}{\partial t},\ \varepsilon_2\bar\varepsilon_1\frac{\partial u_z^{(26)}}{\partial t},\ \varepsilon_1\bar\varepsilon_2\frac{\partial u_z^{(37)}}{\partial t},\ \varepsilon_2\bar\varepsilon_2\frac{\partial u_z^{(48)}}{\partial t}, \tag{4.4}$$

сложим почленно и после ряда преобразований придем к уравнению энергетического баланса

$$\frac{\partial p_x}{\partial x}+\frac{\partial p_y}{\partial y}+\frac{\partial p_z}{\partial z}=\frac{\partial W_k}{\partial t}+\frac{\partial W_p}{\partial t}+b_{13,24}\left(\frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial t}-\frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial t}\right)^2+$$
$$+b_{15,26}\left(\frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial t}-\frac{\partial u_x^{(56)}}{\partial t}\right)^2+b_{37,48}\left(\frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial t}-\frac{\partial u_x^{(78)}}{\partial t}\right)^2+$$
$$+b_{57,68}\left(\frac{\partial u_x^{(78)}}{\partial t}-\frac{\partial u_x^{(56)}}{\partial t}\right)^2+b_{12,34}\left(\frac{\partial u_y^{(13)}}{\partial t}-\frac{\partial u_y^{(24)}}{\partial t}\right)^2+$$
$$+b_{15,37}\left(\frac{\partial u_y^{(13)}}{\partial t}-\frac{\partial u_y^{(57)}}{\partial t}\right)^2+b_{26,48}\left(\frac{\partial u_y^{(24)}}{\partial t}-\frac{\partial u_y^{(68)}}{\partial t}\right)^2+$$
$$+b_{56,78}\left(\frac{\partial u_y^{(57)}}{\partial t}-\frac{\partial u_y^{(68)}}{\partial t}\right)^2+b_{12,56}\left(\frac{\partial u_z^{(15)}}{\partial t}-\frac{\partial u_z^{(26)}}{\partial t}\right)^2+$$
$$+b_{13,57}\left(\frac{\partial u_z^{(15)}}{\partial t}-\frac{\partial u_z^{(37)}}{\partial t}\right)^2+b_{24,68}\left(\frac{\partial u_z^{(26)}}{\partial t}-\frac{\partial u_z^{(48)}}{\partial t}\right)^2+$$
$$+b_{34,78}\left(\frac{\partial u_z^{(37)}}{\partial t}-\frac{\partial u_z^{(48)}}{\partial t}\right)^2. \tag{4.5}$$

В равенстве (4.5)

$$p_x=-p\left(\bar\varepsilon_1\tilde\varepsilon_1\frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial t}+\bar\varepsilon_2\tilde\varepsilon_1\frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial t}+\bar\varepsilon_1\tilde\varepsilon_2\frac{\partial u_x^{(56)}}{\partial t}+\bar\varepsilon_2\tilde\varepsilon_2\frac{\partial u_x^{(78)}}{\partial t}\right),$$

$$p_y=-p\left(\varepsilon_1\tilde\varepsilon_1\frac{\partial u_y^{(13)}}{\partial t}+\varepsilon_2\tilde\varepsilon_1\frac{\partial u_y^{(24)}}{\partial t}+\varepsilon_1\tilde\varepsilon_2\frac{\partial u_y^{(57)}}{\partial t}+\varepsilon_2\tilde\varepsilon_2\frac{\partial u_y^{(68)}}{\partial t}\right),$$

$$p_z = -p\left(\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_1\frac{\partial u_z^{(15)}}{\partial t} + \varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1\frac{\partial u_z^{(26)}}{\partial t} + \varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2\frac{\partial u_z^{(37)}}{\partial t} + \varepsilon_2\bar{\varepsilon}_2\frac{\partial u_z^{(48)}}{\partial t}\right) \quad (4.6)$$

– потоки энергии вдоль осей x, y, z;

$$W_k = \frac{1}{2}\Bigg[\bar{\varepsilon}_1\tilde{\varepsilon}_1\rho_{12}\left(\frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial t}\right)^2 + \bar{\varepsilon}_2\tilde{\varepsilon}_1\rho_{34}\left(\frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial t}\right)^2 + \bar{\varepsilon}_1\tilde{\varepsilon}_2\rho_{56}\left(\frac{\partial u_x^{(56)}}{\partial t}\right)^2 +$$

$$+\varepsilon_2\tilde{\varepsilon}_2\rho_{78}\left(\frac{\partial u_x^{(78)}}{\partial t}\right)^2 + \varepsilon_1\tilde{\varepsilon}_1\rho_{13}\left(\frac{\partial u_y^{(13)}}{\partial t}\right)^2 + \varepsilon_2\tilde{\varepsilon}_1\rho_{24}\left(\frac{\partial u_y^{(24)}}{\partial t}\right)^2$$

$$+\varepsilon_1\tilde{\varepsilon}_2\rho_{57}\left(\frac{\partial u_y^{(57)}}{\partial t}\right)^2 + \varepsilon_2\tilde{\varepsilon}_2\rho_{68}\left(\frac{\partial u_y^{(68)}}{\partial t}\right)^2 + \varepsilon_1\bar{\varepsilon}_1\rho_{15}\left(\frac{\partial u_z^{(15)}}{\partial t}\right)^2$$

$$+\varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1\rho_{26}\left(\frac{\partial u_z^{(26)}}{\partial t}\right)^2 + \varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2\rho_{37}\left(\frac{\partial u_z^{(37)}}{\partial t}\right)^2 + \varepsilon_2\bar{\varepsilon}_2\rho_{48}\left(\frac{\partial u_z^{(48)}}{\partial t}\right)^2\Bigg] \quad (4.7)$$

– плотность кинетической энергии и

$$\frac{\partial W_p}{\partial t} = -p\Bigg[\bar{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}_1\frac{\partial^2 u_x^{(12)}}{\partial x\partial t} + \bar{\varepsilon}_2\tilde{\varepsilon}_1\frac{\partial^2 u_x^{(34)}}{\partial x\partial t} + \bar{\varepsilon}_1\tilde{\varepsilon}_2\frac{\partial^2 u_x^{(56)}}{\partial x\partial t} + \bar{\varepsilon}_2\tilde{\varepsilon}_2\frac{\partial^2 u_x^{(78)}}{\partial x\partial t}$$

$$+\varepsilon_1\tilde{\varepsilon}_1\frac{\partial^2 u_y^{(13)}}{\partial y\partial t} + \varepsilon_2\tilde{\varepsilon}_1\frac{\partial^2 u_y^{(24)}}{\partial y\partial t} + \varepsilon_1\tilde{\varepsilon}_2\frac{\partial^2 u_y^{(57)}}{\partial y\partial t} + \varepsilon_2\tilde{\varepsilon}_2\frac{\partial^2 u_y^{(68)}}{\partial y\partial t}$$

$$+\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_1\frac{\partial^2 u_z^{(15)}}{\partial z\partial t} + \varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1\frac{\partial^2 u_z^{(26)}}{\partial z\partial t} + \varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2\frac{\partial^2 u_z^{(37)}}{\partial z\partial t} + \varepsilon_2\bar{\varepsilon}_2\frac{\partial^2 u_z^{(48)}}{\partial z\partial t}\Bigg]. \quad (4.8)$$

– производная плотности потенциальной энергии по времени.

Используя выражения для давления (4.2), приходим к формуле

$$W_p = \frac{1}{2\lambda}p^2 \quad (4.9)$$

для плотности потенциальной энергии.

Равенства (4.5)–(4.9) находятся в соответствии с соотношениями (2.14)–(2.18). Из обеих указанных групп формул следует, что в случае пренебрежения потоками энергии плотность полной энергии убывает монотонно в каждой точке и что в энергетически изолированной среде полная энергия уменьшается со временем. Эти выводы были сделаны для плоской среды на основании формул (2.14)–(2.19) и могут быть доказаны при использовании равенств (4.3)–(4.9) в случае трехмерной среды.

§5. Исследование частных случаев трехмерной блочной жидкой среды

1. Пусть в заданной среде относительные размеры вдоль осей оказываются одинаковыми

$$\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1 = \tilde{\varepsilon}_1, \quad \varepsilon_2 = \bar{\varepsilon}_2 = \tilde{\varepsilon}_2, \tag{5.1}$$

блоки 1, 4, 6 и 7 заполнены жидкостью 1, а блоки 2, 3, 5 и 8 – жидкостью 2

$$\begin{gathered}\rho_1 = \rho_4 = \rho_6 = \rho_7, \quad \rho_2 = \rho_3 = \rho_5 = \rho_8,\\ \lambda_1 = \lambda_4 = \lambda_6 = \lambda_7, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_5 = \lambda_8\end{gathered} \tag{5.2}$$

и все коэффициенты трения являются одинаковыми,

$$\begin{gathered}b_{12} = b_{13} = b_{15} = b_{24} = b_{26} = b_{34} = b_{37} = b_{48} = b_{56} =\\ = b_{57} = b_{68} = b_{78} = b.\end{gathered} \tag{5.3}$$

При этих предположениях для величин (4.3) выполняются равенства

$$\begin{gathered}\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{15} = \rho_{48} = \rho_{68} = \rho_{78}, \quad \rho_{24} = \rho_{26} = \rho_{34} = \rho_{37} = \rho_{56} = \rho_{57}\\ = \rho_{21} = \rho_2\varepsilon_1 + \rho_1\varepsilon_2,\\ b = b_{12,34} = b_{12,56} = b_{13,24} = b_{13,57} = b_{15,26} = b_{15,37} =\\ = b_{24,68} = b_{26,48} = b_{34,78} = b_{37,48} = b_{56,78} = b_{57,68},\\ \lambda = \left[\frac{\varepsilon_1(\varepsilon_1^2 + 3\varepsilon_2^2)}{\lambda_1} + \frac{\varepsilon_2(3\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2)}{\lambda_2}\right]^{-1}.\end{gathered} \tag{5.4}$$

С учетом формул (5.4) из уравнений (4.2) следуют соотношения

$$u_x^{(34)} = u_x^{(56)}, \quad u_y^{(24)} = u_y^{(57)}, \quad u_z^{(26)} = u_z^{(37)} \tag{5.5}$$

и в уравнениях (4.2) могут быть отброшены третье, седьмое и одиннадцатое равенства. В результате уравнения (4.2) заменяются уравнениями

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_{12}\frac{\partial^2 u_x^{(12)}}{\partial t^2} + \frac{2b}{\varepsilon_1^2}\left(\frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial t} - \frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial t}\right),$$

$$
-\frac{\partial p}{\partial x}=\rho_{21}\frac{\partial^2 u_x^{(34)}}{\partial t^2}+\frac{b}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(2\frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial t}-\frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial t}-\frac{\partial u_x^{(78)}}{\partial t}\right),
$$

$$
-\frac{\partial p}{\partial x}=\rho_{12}\frac{\partial^2 u_x^{(78)}}{\partial t^2}+\frac{2b}{\varepsilon_2^2}\left(\frac{\partial u_x^{(78)}}{\partial t}-\frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial t}\right),
$$

$$
-\frac{\partial p}{\partial y}=\rho_{12}\frac{\partial^2 u_y^{(13)}}{\partial t^2}+\frac{2b}{\varepsilon_1^2}\left(\frac{\partial u_y^{(13)}}{\partial t}-\frac{\partial u_y^{(24)}}{\partial t}\right),
$$

$$
-\frac{\partial p}{\partial y}=\rho_{21}\frac{\partial^2 u_y^{(24)}}{\partial t^2}+\frac{b}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(2\frac{\partial u_y^{(24)}}{\partial t}-\frac{\partial u_y^{(13)}}{\partial t}-\frac{\partial u_y^{(68)}}{dt}\right),
$$

$$
-\frac{\partial p}{\partial y}=\rho_{12}\frac{\partial^2 u_y^{(68)}}{\partial t^2}+\frac{2b}{\varepsilon_2^2}\left(\frac{\partial u_y^{(68)}}{\partial t}-\frac{\partial u_y^{(24)}}{\partial t}\right), \tag{5.6}
$$

$$
-\frac{\partial p}{\partial z}=\rho_{12}\frac{\partial^2 u_z^{(15)}}{\partial t^2}+\frac{2b}{\varepsilon_1^2}\left(\frac{\partial u_z^{(15)}}{\partial t}-\frac{\partial u_z^{(26)}}{\partial t}\right),
$$

$$
-\frac{\partial p}{\partial z}=\rho_{21}\frac{\partial^2 u_z^{(26)}}{\partial t^2}+\frac{b}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(2\frac{\partial u_z^{(26)}}{\partial t}-\frac{\partial u_z^{(15)}}{\partial t}-\frac{\partial u_z^{(48)}}{dt}\right),
$$

$$
-\frac{\partial p}{\partial z}=\rho_{12}\frac{\partial^2 u_z^{(48)}}{\partial t^2}+\frac{2b}{\varepsilon_2^2}\left(\frac{\partial u_z^{(48)}}{\partial t}-\frac{\partial u_z^{(26)}}{\partial t}\right),
$$

$$
-p=\lambda\left[\varepsilon_1^2\frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial x}+2\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial x}+\varepsilon_2^2\frac{\partial u_x^{(78)}}{\partial x}+\varepsilon_1^2\frac{\partial u_y^{(13)}}{\partial y}+\right.
$$

$$
\left.+2\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{\partial u_y^{(24)}}{\partial y}+\varepsilon_2^2\frac{\partial u_y^{(68)}}{\partial y}+\varepsilon_1^2\frac{\partial u_z^{(15)}}{\partial z}+2\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{\partial u_z^{(26)}}{\partial z}+\varepsilon_2^2\frac{\partial u_z^{(48)}}{\partial z}\right].
$$

Уравнения (5.6) описывают изотропную эффективную модель смеси жидкостей. При исследовании этой модели будем предполагать, что все смещения вдоль оси y обращаются в нуль ($u_y^{(13)}=u_y^{(24)}=u_y^{(57)}=0$) и зависимость волнового поля от y отсутствует. Эти предположения приводят к отбрасыванию членов с производными по y в последнем уравнении (5.6) и к отбрасыванию четвертого, пятого и шестого уравнений (5.6). Решение системы уравнений (5.6) представим равенствами (3.3), в которых $i=12,34,78$; $j=15,26,48$. После подстановки соотношений (3.3) в уравнения (5.6) система переходит в однородную систему из 7 уравнений. Ненулевые решения этой системы существуют лишь при условии равенства нулю определителя системы. Это условие после небольших преобразований записывается в виде равенства

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1^2 & a_{12} & -2B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 & -B & a_{23} & -B & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_2^2 & 0 & -2B & a_{34} & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1^2 & 0 & 0 & 0 & a_{12} & -2B & 0 \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 & -B & a_{23} & -B \\ \varepsilon_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2B & a_{34} \\ \eta^2/\lambda & -\varepsilon_1^2 & -2\varepsilon_1\varepsilon_2 & -\varepsilon_2^2 & \varepsilon_1^2\alpha^2 & 2\varepsilon_1\varepsilon_2\alpha^2 & \varepsilon_2^2\alpha^2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (5.7)$$

в котором

$$B = b/(k\eta), \quad a_{12} = \rho_{12}\varepsilon_1^2 + 2B,$$
$$a_{23} = \rho_{21}\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2B, \quad a_{34} = \rho_{12}\varepsilon_2^2 + 2B.$$

Равенство (5.7) определяет величину α^2. Используя свойства определителей, приходим к соотношению

$$\alpha^2 = 1 + \frac{\eta^2}{\lambda} \frac{\begin{vmatrix} \rho_{12}\varepsilon_1^2 + 2B & -2B & 0 \\ -B & \rho_{21}\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2B & -B \\ 0 & -2B & \rho_{12}\varepsilon_2^2 + 2B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varepsilon_1^2 & \rho_{12}\varepsilon_1^2 + 2B & -2B & 0 \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 & -B & \rho_{21}\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2B & -B \\ \varepsilon_2^2 & 0 & -2B & \rho_{12}\varepsilon_2^2 + 2B \\ 0 & \varepsilon_1^2 & 2\varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 \end{vmatrix}}. \qquad (5.8)$$

После вычисления определителей заменим формулу (5.8) равенством

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{\lambda}\frac{\Delta_1}{\Delta_2}}, \qquad (5.9)$$

в котором

$$\Delta_1 = \varepsilon_1^3\varepsilon_2^3\rho_{12}^2\rho_{21} + 2B\rho_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2[\rho_{21}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + \varepsilon_1\varepsilon_2\rho_{12}] +$$
$$+ 2B^2[\rho_{12}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + 2\rho_{21}\varepsilon_1\varepsilon_2], \qquad (5.10)$$
$$\Delta_2 = \varepsilon_1^3\varepsilon_2^3\rho_{12}[\rho_{21}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\rho_{12}] +$$
$$+ 2B\varepsilon_1\varepsilon_2[3\rho_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\rho_{12}\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + (\varepsilon_1^4 + \varepsilon_2^4)\rho_{21}].$$

Для определения скорости распространения волны и коэффициента ее затухания найдем точки ветвления радикала α. Точка ветвления, в которой $\Delta_2 = 0$, не представляет интереса, как точки (1.24), (3.10) и (3.23). Скорость распространения и затухание определяются точками ветвления

$$\eta = \pm i\sqrt{\frac{(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)\rho_{21}+2\varepsilon_1\varepsilon_2\rho_{12}}{\rho_{12}\rho_{21}\lambda^{-1}}} - \frac{2b(\rho_1-\rho_2)^2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2}{k\rho_{12}\rho_{21}[(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)\rho_{21}+2\varepsilon_1\varepsilon_2\rho_{12}]}. \tag{5.11}$$

Мнимая часть выражения (5.11) равна скорости распространения волны, что соответствует формуле (3.11) [7]. Коэффициент затухания выражается равенством

$$\varkappa = \frac{2b(\rho_1-\rho_2)^2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2}{k\rho_{12}\rho_{21}[(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)\rho_{21}+2\varepsilon_1\varepsilon_2\rho_{12}]} \tag{5.12}$$

и обращается в нуль при $\rho_1 = \rho_2$ или при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.5$. В этих случаях характеристическая функция представляется соответственно равенствами

$$\alpha = \sqrt{1+\frac{\rho_1\eta^2}{\lambda}}, \quad \alpha = \sqrt{1+\frac{(\rho_1+\rho_2)\eta^2}{2\lambda}}, \tag{5.13}$$

затухание отсутствует и эффективная модель является идеальной жидкостью. Отсутствие вязкого трения при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.5$ в эффективной модели связано с тем, что осредненные плотности вдоль всех трех осей оказываются одинаковыми. В крайних случаях $\varepsilon_1 = 1$ и $\varepsilon_1 = 0$, когда блочная среда заменяется однородной средой с соответствующими характеристическими функциями

$$\alpha = \sqrt{1+\frac{\rho_1\eta^2}{\lambda_1}}, \quad \alpha = \sqrt{1+\frac{\rho_2\eta^2}{\lambda_2}}, \tag{5.14}$$

затухание отсутствует и формула (5.12) для коэффициента затухания становится неприменимой.

2. Пусть в заданной среде относительные размеры вдоль осей оказываются одинаковыми (5.1), блок 1 заполнен жидкостью 1, все остальные блоки заполнены жидкостью 2 и выполняются равенства

$$\rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \rho_5 = \rho_6 = \rho_7 = \rho_8,$$
$$\lambda_2 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8. \tag{5.15}$$

Трение между жидкостями 1 и 2 характеризуется коэффициентами $b_{12} = b_{13} = b_{15} = b$. На границах между блоками с одинаковой жидкостью 2 трение отсутствует и

$$b_{24} = b_{26} = b_{34} = b_{37} = b_{48} = b_{56} = b_{57} = b_{68} = b_{78} = 0. \tag{5.16}$$

При этих предположениях для величин (4.3) выполняются равенства

$$\begin{gathered}
b_{12} = b_{13} = b_{15}, \quad \rho_{48} = \rho_{68} = \rho_{78} = \rho_{24} = \rho_{26} = \rho_{34} = \rho_{37} = \rho_{56} = \\
\rho_{57} = \rho_{27} = \rho_2, b_{12,34} = b_{12,56} = b_{13,24} = b_{13,57} = b_{15,26} = b_{15,37} = b\varepsilon_1, \\
b_{15,26} = b_{37,48} = b_{57,68} = b_{26,48} = b_{56,78} = b_{24,68} = b_{34,78} = 0, \\
\lambda = \left[\frac{\varepsilon_1^3}{\lambda_1} + \frac{1-\varepsilon_1^3}{\lambda_2}\right]^{-1}.
\end{gathered} \tag{5.17}$$

Из уравнений (4.2) с учетом формул (5.17) также следуют соотношения (5.5) и среда описывается уравнениями

$$\begin{gathered}
-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_{12}\frac{\partial^2 u_x^{(12)}}{\partial t^2} + \frac{2b}{\varepsilon_1}\left(\frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial t} - \frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial t}\right), \\
-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_2\frac{\partial^2 u_x^{(34)}}{\partial t^2} + \frac{b}{\varepsilon_2}\left(\frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial t} - \frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial t}\right), \\
-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_2\frac{\partial^2 u_x^{(78)}}{\partial t^2}, \\
-\frac{\partial p}{\partial y} = \rho_{12}\frac{\partial^2 u_y^{(13)}}{\partial t^2} + \frac{2b}{\varepsilon_1}\left(\frac{\partial u_y^{(13)}}{\partial t} - \frac{\partial u_y^{(24)}}{\partial t}\right), \\
-\frac{\partial p}{\partial y} = \rho_2\frac{\partial^2 u_y^{(24)}}{\partial t^2} + \frac{b}{\varepsilon_2}\left(\frac{\partial u_y^{(24)}}{\partial t} - \frac{\partial u_y^{(13)}}{\partial t}\right), \\
-\frac{\partial p}{\partial y} = \rho_2\frac{\partial^2 u_y^{(68)}}{\partial t^2}, \\
-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_{12}\frac{\partial^2 u_z^{(15)}}{\partial t^2} + \frac{2b}{\varepsilon_1}\left(\frac{\partial u_z^{(15)}}{\partial t} - \frac{\partial u_z^{(26)}}{\partial t}\right), \\
-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_2\frac{\partial^2 u_z^{(26)}}{\partial t^2} + \frac{b}{\varepsilon_2}\left(\frac{\partial u_z^{(26)}}{\partial t} - \frac{\partial u_z^{(15)}}{\partial t}\right),
\end{gathered} \tag{5.18}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_2 \frac{\partial^2 u_z^{(48)}}{\partial t^2},$$

$$-p = \lambda \left[\varepsilon_1^2 \frac{\partial u_x^{(12)}}{\partial x} + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{\partial u_x^{(34)}}{\partial x} + \varepsilon_2^2 \frac{\partial u_x^{(78)}}{\partial x} + \varepsilon_1^2 \frac{\partial u_y^{(13)}}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{\partial u_y^{(24)}}{\partial y} + \varepsilon_2^2 \frac{\partial u_y^{(68)}}{\partial y} + \varepsilon_1^2 \frac{\partial u_z^{(15)}}{\partial z} + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{\partial u_z^{(24)}}{\partial z} + \varepsilon_2^2 \frac{\partial u_z^{(48)}}{\partial z} \right].$$

Уравнения (5.18), как и уравнения (5.6), описывают изотропную эффективную модель смеси двух жидкостей. При исследовании будем также предполагать, что зависимость волнового поля от y отсутствует и $u_y^{(13)} = u_y^{(24)} = u_y^{(68)} = 0$. Это предположение приводит к отбрасыванию четвертого, пятого и шестого уравнений (5.18) и к отбрасыванию членов с производными по y в последнем уравнении (5.18). Решение системы (5.6) представим равенствами (3.3), в которых $i = 12, 34, 78$ и $j = 15, 26, 48$. После подстановки соотношений (3.3) в уравнения (5.17) приходим к однородной системе из 7 линейных уравнений. Ненулевые решения этой системы существуют лишь при условии равенства нулю определителя системы. Указанное условие после небольших преобразований записывается в виде равенства

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_1\rho_{12} + 2B & -2B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_2 & -B & \varepsilon_2\rho_2 + B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \rho_2 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1\rho_{12} + 2B & -2B & 0 \\ \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 & -B & \varepsilon_2\rho_2 + B & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_2 \\ \eta^2\lambda^{-1} & -\varepsilon_1^2 & -2\varepsilon_1\varepsilon_2 & -\varepsilon_2^2 & \alpha^2\varepsilon_1^2 & 2\alpha^2\varepsilon_1\varepsilon_2 & \alpha^2\varepsilon_2^2 \end{vmatrix} = 0, \tag{5.19}$$

где $B = b/(k\eta)$. Равенство (5.19) определяет характеристическую функцию α. Используя свойства определителей, приходим к соотношению

$$\alpha^2 = 1 + \frac{\rho_2\eta^2}{\lambda} \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon_1\rho_{12} + 2B & -2B \\ -B & \varepsilon_2\rho_2 + B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_1\rho_{12} + 2B & -2B & 0 \\ \varepsilon_2 & -B & \varepsilon_2\rho_2 + B & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \rho_2 \\ 0 & \varepsilon_1^2 & 2\varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 \end{vmatrix}}. \tag{5.20}$$

После вычисления определителей формула (5.20) заменяется равенством

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{\rho_2\eta^2}{\lambda}\frac{\Delta_1}{\Delta_2}}, \tag{5.21}$$

в котором

$$\Delta_1 = \varepsilon_1\varepsilon_2\rho_2\rho_{12} + B(2\varepsilon_2\rho_2 + \varepsilon_1\rho_{12}), \tag{5.22}$$

$$\Delta_2 = \rho_2\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1^2\rho_2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\rho_{12} + \varepsilon_2^2\rho_{12}) + \\ +B(\varepsilon_1\varepsilon_2^2\rho_{12} + 2\varepsilon_2^2\rho_2 + \varepsilon_1^3\rho_2 + 4\varepsilon_1\varepsilon_2\rho_2).$$

Точки ветвления характеристической функции(5.21) определяются равенствами

$$\eta = \pm i\sqrt{\lambda\frac{\varepsilon_1^2\rho_2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\rho_{12} + \varepsilon_2^2\rho_{12}}{\rho_2\rho_{12}}} - \frac{b}{k}\frac{\varepsilon_1^3(\rho_1-\rho_2)^2}{\rho_2\rho_{12}(\varepsilon_2^2\rho_{12} + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\rho_{12} + \varepsilon_1^2\rho_2)} \tag{5.23}$$

и уравнением $\Delta_2 = 0$. Последнее уравнение, как и точки (1.24), (3.10) и (3.23), не представляет интереса. Мнимая часть выражения (5.23) равна скорости распространения и соответствует формуле (3.21) [7]. Реальная часть выражения (5.23) определяет коэффициент затухания

$$\varkappa = \frac{b\varepsilon_1^3(\rho_2-\rho_1)^2}{k\rho_2\rho_{12}(\varepsilon_2^2\rho_{12} + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\rho_{12} + \varepsilon_1^2\rho_2)} \tag{5.24}$$

Соотношение (5.24) выполняется в интервале $0 \leqslant \varepsilon_1 < 1$. При $\varepsilon_1 = 1$, согласно равенствам (5.21) и (5.22), затухание отсутствует.

Полученные выражения для характеристических функций (5.9), (5.10), (5.21), (5.22) и для коэффициентов затухания (5.12) и (5.23) справедливы также и в соответствующих осесимметрических случаях, когда волновое поле не зависит от угловой координаты θ и не содержит составляющей смещения u_θ. Во всех формулах (1.26), (3.12), (3.25), (5.12) и (5.24) коэффициенты затухания пропорциональны квадрату разности плотностей. Отсюда следует, что в жидкостях с газовыми пузырьками затухание оказывается значительным. Для таких жидкостей эффективная модель описывается уравнениями (5.18), а коэффициенты затухания выражаются формулой (5.24). Согласно формуле (5.24), коэффициент затухания в этом случае пропорционален относительному объему газа ε_1^3 при малых ε_1. Используя соотношение (5.24), можно выразить и исследовать зависимость коэффициента затухания от объемной концентрации газа в жидкости.

Литература

1. Л. А. Молотков, *Об эквивалентности слоисто-периодических и трансверсально-изотропных сред.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **89** (1979), 219–233.
2. Л. А. Молотков, *Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред.* С.-Петербург (2001), 348.
3. Л. А. Молотков, *Об эффективной модели упругой блочной среды с проскальзыванием на границах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **218** (1994), 96–117.
4. M. A. Biot, *Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range.* — J. Acoust. Soc. Am **28**, No. 2 (1956), 179–191.
5. Л. А. Молотков, *О затухании волн в эффективной модели, описывающей пористые и трещиноватые среды, насыщенные жидкостью.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **297** (2003), 216–229.
6. Л. А. Молотков, *О методах вывода уравнений, описывающих эффективные модели слоистых сред.* — Зап. научн. семин ПОМИ **250** (1998) 219–243.
7. Л. А. Молотков, *О распространении сейсмических волн в блочных жидких средах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **308** (2004), 124–146.

Molotkov L. A. On attenuation of waves propagating in fluid mixtures.

Wave propagation in fluid mixtures is investigated on the basis of effective models of block and layer media. These models are anisotropic fluids described by wave equations. In the pointed out equations, additional terms describing wave attenuation are introduced. This attenuation is connected with friction force proporitional to difference of tangent displacements on boundaries. In consequence of the attenuation the total energy of the wave field decreases steadly and amplitudes of the waves reduce with time by expotential law. This law of descreasing is determined by attenuation coefficients. The mentioned attenuation coefficients is determined in the two cases, that two fluids are mixed thoroughly and that the particles of one fluid are inclusions into another fluid. The suggested approach permits to consider also more complicated fluid mixtures.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 10 февраля 2005 г.