Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 324, 2005 г.

А. С. Кирпичникова

ПОВЕДЕНИЕ ГАУССОВА ПУЧКА В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ С ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА МЕЖДУ ДВУМЯ СРЕДАМИ

1. Результаты

1.1. Основные определения.

Рассмотрим две анизотропные среды Ω_- и Ω_+, имеющие общую часть, которую назовем общей **границей раздела** γ. Предположим, что размерность $\Omega_\pm$ равна n, а граница раздела γ является гиперповерхностью. Считаем $\Omega_\pm$ Римановыми многообразиями $C^\infty-$ гладкими вплоть до границы $\partial\Omega_\pm$. Обозначим Риманов метрический тензор $g^\pm$ на $\Omega_\pm$, то есть $g^\pm = g(\Omega_\pm)$, предполагая, что

$$g^-|_\gamma \neq g^+|_\gamma. \tag{1}$$

1.1.1. Координаты. Будем использовать граничные нормальные координаты (также называемые полу-геодезическими), то есть координаты, связанные с границей раздела γ, так что $(\mathbf{q}, \sigma^\pm) = (q^1, .., q^{n-1}, \sigma^\pm) = \{q^\alpha, \sigma^\pm\}, \alpha = 1, .., n-1$, где $\mathbf{q}$ – некоторые гладкие координаты на γ и $\sigma^\pm$ - расстояние до γ в метрике $g^\pm$, то есть $\sigma = \begin{cases} \sigma^+ > 0,\ \Omega_+, \\ \sigma = 0,\ \gamma, \\ -\sigma^- < 0,\ \Omega_-, \end{cases}$. Будем использовать греческие буквы $\alpha, \beta, \delta, \dots$ для пересчета $(n-1)$ координат границы раздела $\{q^\alpha\} = \{q^1, .., q^{n-1}\}$. Иногда понадобится и обозначение для любых регулярных (внутренних) координат $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n) = \{x^i\},\ i = 1, .., n$, то есть гладких в некоторой окрестности $V \subset \Omega_- \bigcup \Omega_+$ точки на γ. Латинские буквы пересчитывают внутренние координаты сред $\{x^i\} = \{x^1, .., x^n\}$. Выберем точку начала координат на γ, например в полу-геодезических координатах возьмем точку M_1 с координатами $\sigma = 0, q^\alpha = 0$.

Так как σ ортогональна остальным q^α, матрица метрического тензора в полу-геодезических координатах выглядит так

$$\{g^{\pm}_{ij}\} = \begin{pmatrix} g^{\pm}_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $g^{\pm}_{\alpha\beta} = (\frac{d\mathbf{x}}{dq^{\alpha}}, \frac{d\mathbf{x}}{dq^{\beta}})_{g^{\pm}}$ представляет собой $(n-1)\times(n-1)$-гладкую матрицу касательных компонент метрики.

1.1.2. Оператор Лапласа-Бельтрами, задача Дирихле.

Рассмотрим оператор Лапласа-Бельтрами $\Delta_{\pm}$ с обеих сторон от γ, в локальных полу-геодезических координатах он имеет следующий вид

$$\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{g}}(\partial_\alpha g^{\alpha\beta}\sqrt{g}\partial_\beta + \partial_n\sqrt{g}\partial_n), \quad g = \det g_{ij},\ i,j = 1,..,n, \tag{2}$$

где $\partial_\alpha := \frac{\partial}{\partial q^\alpha}$, $\partial_n := \partial_\sigma := \frac{\partial}{\partial\sigma}$ и

$$g = \begin{cases} g^+, & \sigma > 0 \\ g^-, & \sigma < 0 \end{cases}, \text{ или } g = \begin{cases} g^+, & (\mathbf{q},\sigma^+) \in \Omega_+, \\ g^-, & (\mathbf{q},\sigma^-) \in \Omega_-. \end{cases}$$

Вспомним условие прерывности метрики на границе раздела (1). Наихудший случай (в смысле класса гладкости оператора) это случай, когда метрический тензор g имеет скачок на множестве меры ноль γ, то есть $g \in L^\infty$. Для такого оператора существует форма Дирихле. Это значит, что оператор определен в слабом смысле, в смысле квадратичных форм и может быть интегрирован с функциями из класса Соболева H^1_0. Поставим спектральную задачу Дирихле, дополнив оператор условиями непрерывности на границе раздела и граничными условиями для единственности решения. Итак,

$$\begin{cases} -\Delta_g\varphi_k(\mathbf{x}) = \lambda_k\varphi_k(\mathbf{x}), \\ \varphi_k\big|_{(\Gamma_0)\setminus\gamma} = 0 \text{ граничные условия типа Дирихле (DBC)}, \\ \text{условия непрерывности функции и ее нормальной} \\ \text{производной на границе раздела}\,\gamma, \end{cases} \tag{3}$$

где $\varphi_k(\cdot,\cdot) = \begin{cases} \varphi^+_k, & (\mathbf{q},\sigma^+) \\ \varphi^-_k, & (\mathbf{q},\sigma^-) \end{cases}$ – собственные функции оператора, рассмотренного на объединении наших сред, во всей области, а λ_k – соответствующие им собственные числа. Область определения оператора

$$D(\Delta_g) = \left\{ f^{\pm} \in H_0^1(\Omega_{\pm}) : f^+\big|_{\gamma} = f^-\big|_{\gamma},\ \sqrt{g^+}\frac{\partial f^+}{\partial \sigma^+}\bigg|_{\gamma} = \sqrt{g^-}\frac{\partial f^-}{\partial \sigma^-}\bigg|_{\gamma} \right\}.$$

Используем полезное обозначение:

$$\Box_g = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_g, \text{ - волновой оператор Д'Аламбера.} \qquad (4)$$

Полезно выписать несколько вариантов возможного задания DBC, различающихся типом области, на которой они заданы. Итак, DBC могут быть заданы, скажем, на Γ_0 представляющим собой

- всю границу многообразия или часть этой границы, в нашем случае $\Gamma_0 = (\partial\Omega_+ \bigcup \partial\Omega_-)\backslash\gamma$ или $\Gamma_0 \subset ((\partial\Omega_+ \bigcup \partial\Omega_-)\backslash\gamma)$ соответственно.
- часть связной подобласти $\mathcal{D}$ коразмерности единица внутри $(\Omega_+ \bigcup \Omega_-)$.

Условия непрерывности на границе раздела, необходимые для единственности решения, рассмотрим позднее. Не умаляя общности, предполагаем, что за время $t_0 > 0$ решение не выйдет за границы области регулярности полугеодезических координат, и не дойдет до границы области $\partial\Omega_+ \bigcup \partial\Omega_-$.

1.2. Гауссовы пучки – квазифотоны.

Будем искать решение волнового уравнения в виде гауссова пучка повторяя известную процедуру, приведенную в работах В. Бабича, В. Улина [1], А. Качалова [3], Дж. Ральстона [7] и других. *Гауссов пучок* это комплекснозначное асимптотическое решение волнового уравнения, такое, что,

- ✓ стартуя с границы, оно сконцентрировано в момент времени t около точки $\mu(t)$ некой геодезической. Другими словами, гауссов пучок быстро убывает при увеличении расстояния от этой точки,
- ✓ оно распространяется с единичной скоростью вдоль этой геодезической $\mu(t)$.

Такое решение может быть получено как единственное решение начально-краевой задачи (IBVP) для волнового уравнения, предполагая, что источник $f^0(\varepsilon; t, \mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \Gamma_0$ находится на границе Γ_0 в окрестности начальной точки $M_0(\mathbf{z}_0, \tau_0)$ в момент времени $-t_0 < 0$, $\mathbf{z}_0 \in \Gamma_0$, где (z, τ) - полу-геодезические координаты, связанные с Γ_0, т.е. $\Gamma_0 : \{\tau = \tau_0 = 0, \mathbf{z}^\alpha$ – некоторые гладкие координаты на $\Gamma_0\}$. Обозначим через

$$U(t, \mathbf{z}, \tau) = \begin{cases} U^+(t, \mathbf{z}, \tau), \ \sigma > 0, \\ U^-(t, \mathbf{z}, \tau), \ \sigma < 0 \end{cases}$$

решение задачи

$$\begin{cases} \partial_t^2 U - \Delta_g U = 0, \\ U|_{-t_0} = \partial_t U|_{-t_0} = 0, \\ U|_{\Gamma_0} = f^0(\varepsilon; t, \mathbf{z}). \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $f^0(\varepsilon; t, \mathbf{z}) := M_\varepsilon \chi^0(t, \mathbf{z}) \exp\{i\varepsilon^{-1}\Theta^0(t, \mathbf{z})\} V^0(\mathbf{z})$ – класс функций на $\Gamma_0 \times \mathbb{R}$, χ^0 – гладкая характеристическая функция в окрестности точки $(-t_0, \mathbf{z}_0)$, где $M_\varepsilon := (\pi\varepsilon)^{-\frac{n}{4}}$, $V^0(\mathbf{z})$ – известная гладкая функция, ε-малый параметр, $0 < \varepsilon < 1$. Амплитуда представляется суммой гладких однородных полиномов от расстояний $(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)$ и $(t + t_0)$ с комплексными коэффициентами, фазовая функция имеет такой вид

$$\Theta^0(t, \mathbf{z}) = -(t + t_0) + \frac{1}{2}(H^0(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0), (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)) + \frac{i}{2}(t + t_0)^2, \tag{6}$$

где $(\cdot, \cdot)$ – евклидово скалярное произведение, $(H^0)^t = H^0$, $\operatorname{Im} H^0 > 0$. Рассмотрим

Определение. *Конечный гауссов пучок (КГП)порядка N это функция $U_N(\varepsilon; t, \mathbf{q}, \sigma)$ следующего вида (мы следуем работам А.Качалова* [4], [3] *и А. Качалова, Я. Курылева, М. Лассаса* [5]*):*

$$U_N(\varepsilon; t, \mathbf{q}, \sigma) \asymp^N M_\varepsilon \exp\{-(i\varepsilon)^{-1}\Theta_N(t, \mathbf{q}, \sigma)\} \sum_{l=0}^{N} u_l(t, \mathbf{q}, \sigma)(i\varepsilon)^l, \tag{7}$$

где фазовая функция $\Theta_N(t, \mathbf{q}, \sigma)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\operatorname{Im} \Theta_N(t, \mu(t)) = 0, \quad \mu(t) = (\mathbf{q}(t), \sigma(t))^t \ \text{– геодезическая,} \tag{8}$$

$$\operatorname{Im} \Theta_N(t, \mathbf{q}, \sigma) \geqslant C_0(t) \operatorname{dist}^2(\xi, \xi(t)), \ \operatorname{dist}(\xi, \xi(t)) \neq 0, \tag{9}$$

здесь C_0 – непрерывная положительная функция. Для пучка выполняется неравенство:

$$|\Box_g U_N(\varepsilon; t, \mathbf{q}, \sigma)| \leqslant C(2t_0) M_\varepsilon \varepsilon^N, \tag{10}$$

где $C(2t_0)$ не зависит от ε,

$$\xi = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \sigma \end{pmatrix}, \quad \xi(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \sigma(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \xi - \xi(t), \tag{11}$$

где $0 < \eta < 1/6$. Разложения фазовой и амплитудной функций имеют вид:

$$\Theta_N = \theta_1 + \theta_2 + \dots \theta_{K(N)}, \quad K(N) = \frac{2(N + 2 - l)}{1 - 2\eta}, \tag{12}$$

$$u_l = u_{l(0)} + \dots + u_{l(L(N))}, \; L(N) = \frac{2(N + 1 - l)}{1 - 2\eta}, \tag{13}$$

причем $\operatorname{dist}(\xi, \xi(t)) = \operatorname{dist}((\mathbf{q}, \sigma), (\mathbf{q}(t), \sigma(t)))$ *– расстояние в $\Omega_\pm$.*

Замечание. Лемма 2.49 из [5] доказывает, что можно ограничиться построением конечного числа членов разложения фазовой и амплитудной функции, см. (12), (13).

Замечание. Конечный гауссов пучок (КГП) $U_N(\varepsilon; t, \mathbf{q}, \sigma)$, который введен выше, сконцентрирован около $\xi(t)$, то есть $\|U_N(\varepsilon; t, \cdot)|_{B_\rho}\| = \mathcal{O}(1)$. КГП экспоненциально убывает

$$\|U_N(\varepsilon; t, \cdot)|_{(\Omega_- \bigcup \Omega_+) \setminus B_\rho}\| = \mathcal{O}(\varepsilon^p),$$

для любого $p > 0$ вне шара $B_\rho(\xi(t))$ радиуса $\rho > 0$, $\rho \sim \varepsilon^{\frac{1}{2} - \eta}$ (то есть на расстояниях больше, чем $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/2 - \eta})$, $0 < \eta < 1/6$ от геодезической $\mu(t)$).

Полезное обозначение 1: Будем писать $\asymp^k$ там, где имеет место равенство формальных рядов (мы не заботимся о сходимости) до порядка k по всем степеням $\varepsilon, t, q^1, .., q^{n-1}, \sigma$ и их комбинациям; через $\asymp^k$ обозначим формальное асимтотическое (алгебраическое) разложение, то есть будем писать $f(t, \mathbf{Y}(t)) \asymp^k 0$ когда $\partial^\delta_Y f(t, \mathbf{Y}(t))|_{\mathbf{Y}(t)=0} = 0$, где $|\delta| \leqslant k$ – мультииндекс. Если индекс k отсутствует, то разложение верно для любого k.

Полезные обозначения 2: Первые члены разложения фазовой функции Θ_N гауссова пучка имеют специальные обозначения (полиномиальные)

$$\theta_1(t, q^\alpha, \sigma) = p_\alpha(t) \mathbf{Y}^\alpha + p_n(t) \mathbf{Y}^n, \tag{14}$$

где $p(t) := (p_\alpha(t), p_n(t))$ – **импульс** гауссова пучка и

$$\theta_2(t, q^\alpha, \sigma) = \frac{1}{2} H_{\alpha\beta}(t) \mathbf{Y}^\alpha \mathbf{Y}^\beta + H_{\alpha n}(t) \mathbf{Y}^\alpha \mathbf{Y}^n + \frac{1}{2} H_{nn}(t) (\mathbf{Y}^n)^2, \quad (15)$$

где

$$H(t) := \begin{pmatrix} H_{\alpha\beta}(t) & H_{\alpha n}(t) \\ H_{n\beta}(t) & H_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

называется **квадратичной формой**, которая содержит в себе расходимость лучей и форму гауссова пучка. Таким образом, $\theta_l(t, q^\alpha, \sigma)$ – однородные полиномы степени l по $\mathbf{Y}$, члены порядка $l > 2$ играют вспомогательную роль. Подобным образом можно ввести обозначения и для старших членов ряда:

$$\theta_l = \frac{1}{l!} (Q_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \mathbf{Y}^{\alpha_1} \ldots \mathbf{Y}^{\alpha_l} + C_l^1 Q_{\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1} n} \mathbf{Y}^{\alpha_1} \ldots \mathbf{Y}^{\alpha_{l-1}} \mathbf{Y}^n + ..),$$

где C_l^k – коэффициенты Бернулли.

Определение. Формальный гауссов пучок (ФГП) *представлен формальным разложением:*

$$U(\varepsilon; t, \mathbf{q}, \sigma) \asymp M_\varepsilon \exp\{-(i\varepsilon)^{-1} \Theta(t, \mathbf{q}, \sigma)\} \sum_{l=0}^{\infty} (i\varepsilon)^l u_l(t, \mathbf{q}, \sigma), \quad (16)$$

где

$$\Theta(t, \mathbf{q}, \sigma) \asymp \sum_{l \geqslant 1} \theta_l(t) = \sum_{|\delta| \geqslant 1} \frac{\theta_\delta(t)}{\delta!} (\xi - \xi(t))^\delta. \quad (17)$$

Определение. Гауссов пучок $\mathcal{U}_N$ *порядка* N *это решение следующей задачи*

$$\begin{cases} \partial_t^2 \mathcal{U}_N - \Delta_g \mathcal{U}_N = 0, \ (t, \mathbf{q}, \sigma) \in [-t_0, t_0] \times \mathcal{M}, \\ \mathcal{U}_N(-t_0, \mathbf{q}, \sigma) = U_N(\varepsilon; -t_0, \mathbf{q}, \sigma), \\ \partial_t \mathcal{U}_N(-t_0, \mathbf{q}, \sigma) = \partial_t U_N(\varepsilon; -t_0, \mathbf{q}, \sigma), \\ \mathcal{U}_N(t, \mathbf{q}, \sigma)|_{\Gamma_0} = U_N(\varepsilon; t, \mathbf{q}, \sigma)|_{\Gamma_0}. \end{cases} \quad (18)$$

Необходимо заметить, что

$$|\partial_t^j \partial_{\mathbf{x}}^\kappa (\mathcal{U}_N(t, \mathbf{q}, \sigma) - \chi(t, \mathbf{q}, \sigma) U_N(\varepsilon; t, \mathbf{q}, \sigma))| \leqslant C M_\varepsilon \varepsilon^{N-(j+|\kappa|)}, \ \forall j \geqslant 0, \quad (19)$$

здесь κ *– мультииндекс,* $\partial_{\mathbf{x}}^\kappa$ *обозначает частное дифференцирование по* n *пространственным координатам* $\mathbf{x} = \{\mathbf{q}^\alpha, \sigma\}$, χ *– характеристическая функция, равная единице в окрестности* $\xi = \xi(t)$ *и равная нулю вне этой окрестности.*

1.2.1. Условия непрерывности и вид решения.

Для того, чтобы волновое уравнение во всей нашей области имело единственное решение, необходимо дополнить его условиями на гладкой поверхности раздела γ между областями Ω_- и Ω_+ (см., например, М. М. Попов [6]):

$$\mathcal{U}^-|_\gamma = \mathcal{U}^+|_\gamma, \qquad \sqrt{g^-}\frac{\partial \mathcal{U}^-}{\partial \sigma}|_\gamma = \sqrt{g^+}\frac{\partial \mathcal{U}^+}{\partial \sigma}|_\gamma, \tag{20}$$

где $\mathcal{U}^\pm$ – значение полного поля в Ω_- и Ω_+. Будем искать решение в виде **падающей и отраженной волны** в "первой" среде Ω_- и **преломленной волны** во "второй" среде Ω_+. Обозначим эти волны через $U^{\rm in}, U^{\rm ref}, U^{\rm tr}$ соответственно. Вспоминая представление формального гауссова пучка (16) и предполагая, что он подходит к границе раздела в точке M_1- начале полу-геодезических координат в момент времени $t = 0$, выпишем формальные условия:

$$U^{\rm in}(\varepsilon; t, \mathbf{q}, 0) + U^{\rm ref}(\varepsilon; t, \mathbf{q}, 0) \asymp U^{\rm tr}(\varepsilon; t, \mathbf{q}, 0), \tag{21}$$

$$\sqrt{g^-}(\mathbf{q},0)\big[\frac{\partial U^{\rm in}}{\partial \sigma^-}(\varepsilon; t, \mathbf{q}, 0)+\frac{\partial U^{\rm ref}}{\partial \sigma^-}(\varepsilon; t, \mathbf{q}, 0)\big] \asymp \sqrt{g^+}(\mathbf{q},0)\frac{\partial U^{\rm tr}}{\partial \sigma^+}(\varepsilon; t, \mathbf{q}, 0). \tag{22}$$

Итак, мы ищем решение в виде:

$$U^+(\varepsilon; t, \mathbf{q}, \sigma) = U^{\rm tr}(\varepsilon; t, \mathbf{q}, \sigma), U^-(\varepsilon; t, \mathbf{q}, \sigma) = U^{\rm in}(\varepsilon; t, \mathbf{q}, \sigma) + U^{\rm ref}(\varepsilon; t, \mathbf{q}, \sigma).$$

1.3. Основные результаты. Мы построим три формальных ряда $U^{\rm in}(\varepsilon,\cdot)$, $U^{\rm ref}(\varepsilon,\cdot)$, $U^{\rm tr}(\varepsilon,\cdot)$ и предположим, что все три могут быть гладко продолжены в противоположную "области обитания" область $\Omega_- \bigcup \Omega_+$. Мы "оборвем" эти ряды на порядке N и построим конечные ряды $U_N^{\rm in}(\varepsilon,\cdot)$, $U_N^{\rm ref}(\varepsilon,\cdot)$, $U_N^{\rm tr}(\varepsilon,\cdot)$ в Ω_- и Ω_+. Покажем, что эти решения близки к искомым решениям волнового уравнения (гауссовым пучкам) в норме H^1. Пусть $U^{\rm in}$ распространяется в Ω_- вдоль геодезической $\mu^{\rm in}(t) := (q^\alpha_{\rm in}(t), \sigma_{\rm in}(t))$ и достигает точки $M_1 = (q^\alpha, \sigma) = (0, 0)$ на границе раздела γ в момент времени $t = 0$.

Основная Теорема. *Пусть ФГП $U^{\rm in}$ (16) начал движение в момент $-t_0 < 0$ в точке $M_0 = (\mathbf{z}_0, \tau_0) \in \Gamma_0$ и подошел трансверсально к границе раздела γ в точке $M_1 \in \gamma$ в момент времени $t = 0$. Предположим, что*

$$0 \leqslant g_+^{\alpha\beta} p^{\rm in}_\alpha p^{\rm in}_\beta < 1. \tag{23}$$

Тогда

- *Для $t > 0$ решение волнового уравнения представимо в виде суммы двух ФГП U^{ref} и U^{tr}; волна U^{ref} отражается от границы раздела внутрь Ω_- и U^{tr} преломляется от границы раздела внутрь Ω_+. Оба пучка U^{ref} и U^{tr} могут быть построены, если падающий пучок U^{in} известен. Построенные таким образом ФГП будут иметь все свойства, позволяющие оценивать их как асимптотические приближения к искомым точным решениям $\mathcal{U}^{\mathrm{ref}}, \mathcal{U}^{\mathrm{tr}}$.*
- *Для падающего, отраженного и преломленного пучков выполняются анизотропные аналоги законов геометрической оптики Френеля и закона Снеллиуса. Угол отражения и угол преломления выражаются через угол падения.*
- *Для любого N можно построить точное решение – гауссов пучок. Это решение $\mathcal{U}^{\mathrm{in}}$ удовлетворяет уравнению $\Box\mathcal{U}^{\mathrm{in}} = 0$ и отличается от построенных КГП $U_N^{\mathrm{in}} + U_N^{\mathrm{ref}}$ в Ω_- и U_N^{tr} в Ω_+ на функцию, которая мала с нужным количеством своих производных. Другими словами, для любого N существуют константы $p(N)$ и $\widetilde{C}_N$ такие, что разность точного решения волнового уравнения $\mathcal{U}_N$ и КГП*

$$\|\mathcal{U}_N - \chi U_N\|_{C^{p(N)}([-t_0,t_0];\mathcal{D}(\Delta_g))} \leqslant \widetilde{C}_N \varepsilon^{p(N)}.$$

Первое и второе утверждения теоремы будут доказаны конструктивно в разделах 2, 3, а третье утверждение будет доказано в разделе 4.

Замечание. Поскольку $g^-_{\alpha\beta}(\mathbf{q},0) \neq g^+_{\alpha\beta}(\mathbf{q},0)$, порядок преломленной волны будет совпадать с порядком падающей волны. В случае, когда метрический тензор непрерывен, а его производная(-ые) терпят скачок, порядок преломленного поля будет слабеть, но это выходит за рамки данной работы.

Замечание. В случае, когда условие (23) не выполняется, мы сталкиваемся с полным внутренним отражением. Пограничный случай $g_+^{\alpha\beta} p_\alpha^{\mathrm{in}} p_\beta^{\mathrm{in}} = 1$ соответствует касательному к границе раздела направлению распространения преломленной волны U^{tr}, мы его исключаем из нашего рассмотрения, так как становится невозможные использовать лучевые разложения ввиду того, что граница раздела становится характеристической поверхностью.

1.4. Формальные ряды.

Будем следовать процедурам, проведенным в работах В. Бабича, В. Улина, [1], А. Качалова, [3]. Рассмотрим волновой оператор $\Box_g$ (4), примененный к КГП $U_N(\varepsilon;\cdot)$. Для того, чтобы ряд формально удовлетворял волновому уравнению, эйконал Θ_N и u_l должны быть решениями уравнений Гамильтона–Якоби и уравнений переноса соответственно. Опустим значки "in, ref, tr", так как следующее будет верно для всех трех волн. Выпишем уравнения Гамильтона–Якоби для членов амплитудного ряда:

$$\left[\left(\frac{\partial\Theta_N}{\partial t}\right)^2 - g^{\alpha\beta}\frac{\partial\Theta_N}{\partial q^\alpha}\frac{\partial\Theta_N}{\partial q^\beta} - \left(\frac{\partial\Theta_N}{\partial\sigma}\right)^2\right] \asymp 0, \tag{24}$$

теперь, когда они формально выполнены для Θ_N, запишем уравнения для амплитудных функций. Оператор $\mathcal{L}_{\Theta_N}$ носит название **оператора переноса**

$$\mathcal{L}_{\Theta_N}u = 2\frac{\partial\Theta_N}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} - 2g^{\alpha\beta}\frac{\partial\Theta_N}{\partial q^\alpha}\frac{\partial u}{\partial q^\beta} - 2\frac{\partial\Theta_N}{\partial\sigma}\frac{\partial u}{\partial\sigma} + (\Box\Theta_N)\cdot u. \tag{25}$$

Первое приближение амплитудных функций следует из

$$\left[\left(\frac{\partial\Theta_N}{\partial t}\right)^2 - g^{\alpha\beta}\frac{\partial\Theta_N}{\partial q^\alpha}\frac{\partial\Theta_N}{\partial q^\beta} - \left(\frac{\partial\Theta_N}{\partial\sigma}\right)^2\right]u_0(t,q,\sigma) \asymp 0. \tag{26}$$

Уравнения для следующих приближений для амплитуды, $l = 1,\dots,N$ принимают вид уравнений переноса:

$$\mathcal{L}_{\Theta_N}u_l \asymp \Box_g u_{l-1},\ l = 0,..,N,\ u_{-2}(t,q,\sigma) \equiv u_{-1}(t,q,\sigma) \equiv 0. \tag{27}$$

2. Фазовые функции

В данном разделе мы будем строить $\Theta_N^{\mathrm{ref}}(t,\mathbf{q},\sigma)$, $\Theta_N^{\mathrm{tr}}(t,\mathbf{q},\sigma)$, предполагая, что они имеют вид (12). Во-первых, изучим фазовую функцию падающего поля $\Theta_N^{\mathrm{in}}(t,\mathbf{q},\sigma)$. Во-вторых, покажем, как получить КГП $\Theta_N^{\mathrm{ref}}(t,\cdot)$, $\Theta_N^{\mathrm{tr}}(t,\cdot)$ в виде рядов конечных однородных полиномов через падающее поле. Мы рассмотрим дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют члены этих рядов.

2.1. Основные уравнения

Рассмотрим КГП $U_N^{\mathrm{in}}(t,\mathbf{q},\sigma)$, движущийся к границе раздела γ вдоль геодезической $\mu^{\mathrm{in}}(t) := (q_{\mathrm{in}}^\alpha(t),\sigma_{\mathrm{in}}(t))$. Следуя процедуре, приведенной, например, в [5], рассмотрим $\Box_g U_N^{\mathrm{in}}(t,\mathbf{q},\sigma)$. Мы видели, что фазовая функция обязана удовлетворять уравнению Гамильтона–Якоби (24). По построению, волны должны распространяться с единичной скоростью, а это влечет **уравнение эйконала** для Θ_N^{in} :

$$g_-^{\alpha\beta}\frac{\partial\Theta_N^{\mathrm{in}}}{\partial q^\alpha}\frac{\partial\Theta_N^{\mathrm{in}}}{\partial q^\beta}+(\frac{\partial\Theta_N^{\mathrm{in}}}{\partial\sigma^-})^2\asymp 1. \tag{28}$$

Введем новые обозначения и перепишем (12) (или (17)):

$$\Theta_N^{\mathrm{in}}(t,\mathbf{q},\sigma)=\left(P^{\mathrm{in}}(t)^t,\mathbf{Y}^{\mathrm{in}}(t)\right)+\frac{1}{2}\left(H^{\mathrm{in}}(t)\mathbf{Y}^{in}(t),\mathbf{Y}^{\mathrm{in}}(t)\right)+\dots, \tag{29}$$

$$P^{\mathrm{in}}(t)=\left(p_1^{\mathrm{in}}(t)\dots p_{n-1}^{\mathrm{in}}(t)\ p_n^{\mathrm{in}}(t)\right)^t=\begin{pmatrix}p_\alpha^{\mathrm{in}}(t)\\ p_n^{\mathrm{in}}(t)\end{pmatrix}, \tag{30}$$

$$\mathbf{Y}^{\mathrm{in}}(t)=\xi^{\mathrm{in}}-\xi^{\mathrm{in}}(t)=\begin{pmatrix}q^1-q^1_{\mathrm{in}}(t)\\ \cdot\\ q^{n-1}-q^{n-1}_{\mathrm{in}}(t)\\ \sigma-\sigma_{\mathrm{in}}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q^\alpha-q^\alpha_{\mathrm{in}}(t)\\ \sigma-\sigma_{\mathrm{in}}(t)\end{pmatrix}, \tag{31}$$

$$H^{in}(t)=\begin{pmatrix}H^{\mathrm{in}}_{\alpha\beta}(t) & H^{\mathrm{in}}_{\alpha n}(t)\\ H^{\mathrm{in}}_{n\beta}(t) & H^{\mathrm{in}}_{nn}(t)\end{pmatrix}, \tag{32}$$

где $\xi(t)$ было введено в (11). Продолжаем стандартный метод построения гауссовых пучков (см., например,[1], [3]), уравнение эйконала (28) влечет за собой уравнение для всех членов разложения (12), в том числе, систему уравнений Гамильтона–Якоби (36) для импульсов (35) и уравнение Риккати (37) для квадратичных форм. Обозначим через h **Гамильтониан** системы

$$h^{\mathrm{in}}(\mathbf{q},\sigma;\mathbf{p})=(\mathbf{p},\mathbf{p})^{1/2}_{g_-}=\sqrt{g_-^{\alpha\beta}p^{\mathrm{in}}_\alpha(t)p^{\mathrm{in}}_\beta(t)+(p^{\mathrm{in}}_n(t))^2}\equiv 1, \tag{33}$$

$$(h^{\mathrm{in}})^2=g_-^{\alpha\beta}\frac{\partial\Theta^{\mathrm{in}}}{\partial q^\alpha}\frac{\partial\Theta^{\mathrm{in}}}{\partial q^\beta}+(\frac{\partial\Theta^{\mathrm{in}}}{\partial\sigma})^2=g_-^{\alpha\beta}p^{\mathrm{in}}_\alpha p^{\mathrm{in}}_\beta+(p^{\mathrm{in}}_n)^2=(\frac{\partial\Theta^{\mathrm{in}}}{\partial t})^2, \tag{34}$$

тогда **уравнение импульсов**

$$g_-^{\alpha\beta}p^{\mathrm{in}}_\alpha(t)p^{\mathrm{in}}_\beta(t)+(p^{\mathrm{in}}_n(t))^2\equiv 1. \tag{35}$$

Уравнения Гамильтона (канонические уравнения):

$$\begin{cases}\dot q^\alpha_{\mathrm{in}}(t)=\frac{\partial h^{\mathrm{in}}}{\partial p_\alpha}=\frac{1}{h^{\mathrm{in}}}g_-^{\alpha\beta}p^{\mathrm{in}}_\beta(t),\\ \dot\sigma_{\mathrm{in}}(t)=\frac{\partial h^{\mathrm{in}}}{\partial p_n}=\frac{1}{h^{\mathrm{in}}}p^{\mathrm{in}}_n(t),\end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{p}^{\rm in}_\gamma(t) = -\frac{\partial h^{\rm in}}{\partial q^\gamma} = -\frac{1}{2h^{\rm in}} p^{\rm in}_\alpha(t) p^{\rm in}_\beta(t) \frac{\partial g^{\alpha\beta}_-}{\partial q^\gamma}, \\ \dot{p}^{\rm in}_n(t) = -\frac{\partial h^{\rm in}}{\partial \sigma} = -\frac{1}{2h^{\rm in}} p^{\rm in}_\alpha(t) p^{\rm in}_\beta(t) \frac{\partial g^{\alpha\beta}_-}{\partial \sigma}. \end{array}\right. \tag{36}$$

Решение этой системы является бихарактеристикой $(q^\alpha_{\rm in}(t),\, \sigma_{\rm in}(t);$ $p^{\rm in}_\alpha(t),\, p^{\rm in}_n(t))$. Третье уравнение, которому удовлетворяет квадратичная форма гауссова пучка – **уравнение Риккати**:

$$\frac{d}{dt} H^{\rm in} + D^{\rm in} + (B^{\rm in} H^{\rm in} + H^{\rm in} (B^{\rm in})^t) + H^{\rm in} C^{\rm in} H^{\rm in} = 0. \tag{37}$$

где коэффициентами $(B^{\rm in})^t = B^{{\rm in}\,*}$, $(C^{\rm in})^t = C^{{\rm in}\,*} = C$, $(D^{\rm in})^t = D^{{\rm in}\,*} = D$ являются $n \times n$ матрицы вторых производных гамильтониана, подсчитанные в точке $(\mathbf{q}, \sigma; \mathbf{p}) = (\mathbf{q}_{\rm in}(t), \sigma_{\rm in}(t); \mathbf{p}^{\rm in}(t))$ на бихарактеристике:

$$D^{\rm in} = \begin{pmatrix} D^{\rm in}_{\alpha\beta} & D^{\rm in}_{\alpha n} \\ D^{\rm in}_{n\beta} & D^{\rm in}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h^{\rm in}}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} & \frac{\partial^2 h^{\rm in}}{\partial q^\alpha \partial \sigma} \\ \frac{\partial^2 h^{\rm in}}{\partial \sigma \partial q^\beta} & \frac{\partial^2 h^{\rm in}}{\partial \sigma^2} \end{pmatrix}, \tag{38}$$

$$B^{\rm in} = \begin{pmatrix} B^{\beta\,{\rm in}}_\alpha & B^{n\,{\rm in}}_\alpha \\ B^{\beta\,{\rm in}}_n & B^{n\,{\rm in}}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h^{\rm in}}{\partial q^\alpha \partial p_\beta} & \frac{\partial^2 h^{\rm in}}{\partial q^\alpha \partial p_n} \\ \frac{\partial^2 h^{\rm in}}{\partial q^\beta \partial p_n} & \frac{\partial^2 h^{\rm in}}{\partial \sigma \partial p_n} \end{pmatrix}, \tag{39}$$

$$C^{\rm in} = \begin{pmatrix} C^{\alpha\beta\,{\rm in}} & C^{\alpha n\,{\rm in}} \\ C^{n\beta\,{\rm in}} & C^{nn\,{\rm in}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h^{\rm in}}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} & \frac{\partial^2 h^{\rm in}}{\partial p_\alpha \partial p_n} \\ \frac{\partial^2 h^{\rm in}}{\partial p_n \partial p_\beta} & \frac{\partial^2 h^{\rm in}}{\partial p_n^2} \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Наш следующий шаг – получение уравнений для членов высшего порядка. Можно заметить, что все полученные уравнения являются рекуррентными, так как каждый раз члены старших порядков равны нулю вдоль бихарактеристик. Однородный член θ^{in}_l порядка l в разложении Тейлора (24) зависит от $\theta^{\rm in}_m$, где $m \leqslant l{+}1$. Но члены, содержащие $\theta^{\rm in}_{l+1}$ равны нулю вдоль би-характеристик. В итоге полученные дифференциальное уравнение для однородных полиномов $\theta^{\rm in}_l$, $l \geqslant 3$ линейны (см. [5]),

$$\frac{\partial \theta^{\rm in}_l}{\partial t} + \mathcal{N}^{({\rm in})i}_j \frac{\partial \theta^{\rm in}_l}{\partial (\mathbf{Y}^{\rm in})^i} (\mathbf{Y}^{\rm in})^j = \mathcal{F}_l(\theta^{\rm in}_m), \quad l = 3, 4, .. \tag{41}$$

где $m < l$. Компоненты $\mathcal{N}^{({\rm tr})i}_j$ образуют $n \times n$ матрицу:

$$\mathcal{N}^{({\rm in})i}_j(t) = \frac{\partial^2 h^{\rm in}}{\partial x^i \partial p_j} + \frac{\partial^2 h^{\rm in}}{\partial p_i \partial p_k} H^{\rm in}_{kj} = [B^t_{\rm in} + C_{\rm in} H_{\rm in}]^i_j, \tag{42}$$

где матрицы B^{in}, C^{in} определены выше в (39)–(40).

Замечание. Полученные уравнения (41) можно свести к линейным ОДУ по t для $\theta_l^{\mathrm{in}}(t)$. Для единственности разрешения они требуют знания начальных данных. Еще раз заметим, что данные уравнения, полученные для падающего поля могут быть формально написаны и для поля отраженного, и для преломленного, так как при выводе были использованы только общие свойства гауссовых пучков, так как мы рассматриваем однородные полиномы и приравниваем их коэффициенты.

2.2. Подготовительный шаг. Рассмотрим разложение фазовой функции в ряд (29) и переразложим его в окрестности $t=0$, то есть разложим в ряд Тейлора $P^{\mathrm{in}}(t)$ (30), $H^{\mathrm{in}}(t)$ (32) и $\mathbf{Y}^{\mathrm{in}}(t)$ (31) и соберем новые формы, действующие уже на $n+1$ переменную $t, \mathbf{q}, \sigma$. Обозначим новые формы $\widetilde{P}^{\mathrm{in}}$, $\widetilde{H}^{\mathrm{in}}$, то есть тильда сверху обозначает коэффициенты новых форм, полученных в результате разложения:

$$\mathbf{Y}^{\mathrm{in}}(t) \asymp^2 \begin{pmatrix} q^\alpha - \dot{q}^\alpha_{\mathrm{in}}(0)t - \frac{1}{2}\ddot{q}^\alpha_{\mathrm{in}}(0)t^2 \\ \sigma - \dot{\sigma}_{\mathrm{in}}(0)t - \frac{1}{2}\ddot{\sigma}_{\mathrm{in}}(0)t^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Theta_N^{\mathrm{in}}(t,\mathbf{q},\sigma) \asymp^2 \\ \widetilde{p}_0 t + \widetilde{p}^{\mathrm{in}}_\alpha q^\alpha + \widetilde{p}^{\mathrm{in}}_n \sigma + \frac{1}{2}\widetilde{H}^{\mathrm{in}}_{00}t^2 + \frac{1}{2}\widetilde{H}^{\mathrm{in}}_{\alpha\beta}q^\alpha q^\beta + \frac{1}{2}\widetilde{H}^{\mathrm{in}}_{nn}\sigma^2 + \\ + \widetilde{H}^{\mathrm{in}}_{0\alpha}tq^\alpha + \widetilde{H}^{\mathrm{in}}_{0n}t\sigma + \widetilde{H}^{\mathrm{in}}_{\alpha n}q^\alpha\sigma = \\ = \big((\widetilde{\mathbf{P}}^{\mathrm{in}})^t, \psi\big) + \frac{1}{2}\big(\widetilde{\mathbf{H}}^{\mathrm{in}}\psi, \psi\big), \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$\widetilde{\mathbf{H}}^{\mathrm{in}} = \begin{pmatrix} \widetilde{H}^{\mathrm{in}}_{00} & \widetilde{H}^{\mathrm{in}}_{0\beta} & \widetilde{H}^{\mathrm{in}}_{0n} \\ \widetilde{H}^{\mathrm{in}}_{\alpha 0} & \widetilde{H}^{\mathrm{in}}_{\alpha\beta} & \widetilde{H}^{\mathrm{in}}_{\alpha n} \\ \widetilde{H}^{\mathrm{in}}_{n0} & \widetilde{H}^{\mathrm{in}}_{n\beta} & \widetilde{H}^{\mathrm{in}}_{nn} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{P}}^{\mathrm{in}} = \begin{pmatrix} \widetilde{p}^{\mathrm{in}}_0 \\ \widetilde{p}^{\mathrm{in}}_\alpha \\ \widetilde{p}^{\mathrm{in}}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ p^{\mathrm{in}}_\alpha(0) \\ p^{\mathrm{in}}_n(0) \end{pmatrix}, \quad (44)$$

$$\psi = \begin{pmatrix} t \\ q^\alpha \\ \sigma \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\widetilde{H}^{\rm in}_{00} = -\dot{p}^{\rm in}_\alpha(0)\dot{q}^\alpha_{\rm in}(0) - \dot{p}^{\rm in}_n(0)\dot{\sigma}_{\rm in}(0) - \frac{1}{2}(p^{\rm in}_\alpha(0)\ddot{q}^\alpha_{\rm in}(0) + p^{\rm in}_n(0)\ddot{\sigma}_{\rm in}(0)) \\ +\frac{1}{2}H^{\rm in}_{nn}(0)(\dot{\sigma}_{\rm in}(0))^2 + \frac{1}{2}H^{\rm in}_{\alpha\beta}(0)\dot{q}^\alpha_{\rm in}(0)\dot{q}^\beta_{\rm in}(0) + H^{\rm in}_{n\alpha}(0)\dot{q}^\alpha_{\rm in}(0)\dot{\sigma}_{\rm in}(0), \\ \widetilde{H}^{\rm in}_{\alpha\beta} = H^{\rm in}_{\alpha\beta}(0), \\ \widetilde{H}^{\rm in}_{nn} = H^{\rm in}_{nn}(0), \\ \widetilde{H}^{\rm in}_{0\alpha} = \dot{p}^{\rm in}_\alpha(0) - H^{\rm in}_{\alpha\beta}(0)\dot{q}^\beta_{\rm in}(0) - H^{\rm in}_{\alpha n}(0)\dot{\sigma}_{\rm in}(0), \\ \widetilde{H}^{\rm in}_{n0} = \dot{p}^{\rm in}_n(0) - H^{\rm in}_{nn}(0)\dot{\sigma}_{\rm in}(0) - H^{\rm in}_{\alpha n}(0)\dot{q}^\alpha_{\rm in}(0), \\ \widetilde{H}^{\rm in}_{\alpha n} = H^{\rm in}_{\alpha n}(0). \end{cases} \tag{45}$$

Полученные коэффициенты разложения пригодятся при нахождении начальных данных для квадратичной формы. Заметим, что подобные разложения могут быть написаны как для отраженного, так и для преломенного поля.

Построение импульсов $\mathbf{p}^{\rm ref}$, $\mathbf{p}^{\rm tr}$.

Цель данного раздела – построение первых линейных членов разложений отраженной и преломленной фазовых функций Θ_N^{ref} и Θ_N^{tr}, то есть построение импульсов $P^{\rm ref}(t)$, $P^{\rm tr}(t)$ (аналогично (14)). По известной начальной точке и единичной длине в метрике мы найдем импульсы.

2.3.1. Начальные данные для импульсов. Рассмотрим разложение (14) по $t, \mathbf{q}, \sigma$ (опустим аналогичное разложение $\theta_1^{\rm tr}(t)$, имеющее такой же вид):

$$\theta_1^{\rm ref}(t,\mathbf{q},\sigma) = p^{\rm ref}_\alpha(0)q^\alpha + p^{\rm ref}_n(0)\sigma - p^{\rm ref}_\alpha(0)\dot{q}^\alpha_{\rm ref}(0)t - p^{\rm ref}_n(0)\dot{\sigma}_{\rm ref}(0)t \tag{46}$$

Мы хотим найти начальные данные, используя для этого данные на границе раздела (21). Первое условие непрерывности влечет равенство

$$\theta_1^{\rm in}(t,\mathbf{q},0) = \theta_1^{\rm ref}(t,\mathbf{q},0) = \theta_1^{\rm tr}(t,\mathbf{q},0), \tag{47}$$

из чего ясно, что касательные составляющие импульсов (соответствующие γ) равны:

$$p^{\rm in}_\alpha(t) = p^{\rm ref}_\alpha(t) = p^{\rm tr}_\alpha(t), \;\Rightarrow p^{\rm in}_\alpha(0) = p^{\rm ref}_\alpha(0) = p^{\rm tr}_\alpha(0). \tag{48}$$

Тогда, полагая, что мы знаем значение падающего гауссова пучка в момент $t = 0$, то есть, зная $P^{\rm in}(0)$ и помня, что скорость равна единице, то есть $|P^{\mathrm{tr,ref}}(t)| = 1$ (импульс удовлетворяет уравнению эйконала (28) для любого t, значит и для $t = 0$), мы напишем

$$|P^{\mathrm{tr,ref}}(0)| = h(0,0; P^{\mathrm{tr,ref}}(0))$$
$$= \sqrt{g_{\pm}^{\alpha\beta}(0,0)p_{\alpha}^{\mathrm{in}}(0)p_{\beta}^{\mathrm{in}}(0) + (p_n^{\mathrm{tr,ref}}(0))^2} = 1.$$

Тогда $p_n^{\mathrm{tr,ref}}(0)$ определяется с точностью до знака квадратного корня. Так как преломленный гауссов пучок распространяется внутрь Ω_+ мы должны взять $\frac{\partial\theta^{\mathrm{tr}}}{\partial\sigma^+} > 0$, то есть $p_n^{\mathrm{tr}}(0) > 0$, а отраженный пучок двигается внутрь Ω_-, тогда $p_n^{\mathrm{in}}(0) = -p_n^{\mathrm{ref}}(0)$, то есть

$$p_n^{\mathrm{tr}}(0) = \sqrt{1 - g_{+}^{\alpha\beta}(0,0)p_{\alpha}^{\mathrm{in}}(0)p_{\beta}^{\mathrm{in}}(0)} > 0, \tag{49}$$

$$p_n^{\mathrm{ref}}(0) = \sqrt{1 - g_{-}^{\alpha\beta}(0,0)p_{\alpha}^{\mathrm{in}}(0)p_{\beta}^{\mathrm{in}}(0)} = -p_n^{\mathrm{in}}(0) > 0. \tag{50}$$

Замечание. Условие $|p^{\mathrm{tr}}| < 1$ гарантирует отсутствие полного внутреннего отражения.

2.3.2. Построение импульсов.

Мы нашли начальные значения $P^{\mathrm{ref}}(0)$ (и $P^{\mathrm{tr}}(0)$). Начальная точка для $t = 0$ $(\mathbf{q}_{\mathrm{ref(tr)}}(0), \sigma_{\mathrm{ref(tr)}}(0)) = (0,0)$ соответствующей бихарактеристики $(\mathbf{q}_{\mathrm{ref(tr)}}(t), \sigma_{\mathrm{ref(tr)}}(t); \mathbf{p}_{\mathrm{ref(tr)}}(t))$ известна, следовательно, мы может решить систему уравнений Гамильтона (36). Соответствующий гамильтониан

$$(h^{\mathrm{ref(tr)}})^2 = g_{\pm}^{\alpha\beta}(\mathbf{q},\sigma)p_{\alpha}^{\mathrm{ref(tr)}}(t)p_{\beta}^{\mathrm{ref(tr)}}(t) + (p_n^{\mathrm{ref(tr)}}(t))^2 = 1.$$

2.4. Квадратичные формы. Цель данной главы – построить вторые (квадратичные) члены разложения фазовой функции (29), а именно, $H^{\mathrm{ref}}(t,\cdot)$, $H^{\mathrm{tr}}(t,\cdot)$ предполагая, что нам известно $H^{\mathrm{in}}(0)$ и что импульсы мы уже построили. Для этого необходимо решить уравнение Риккати (37), вычислив начальные данные $H^{\mathrm{ref(tr)}}(t = 0)$.

2.4.1. Начальные данные $\theta_2^{\mathrm{ref}}(0,\mathbf{q},\sigma)$, $\theta_2^{\mathrm{tr}}(0,\mathbf{q},\sigma)$..

Задача этого параграфа – по данным (на γ) граничным данным построить начальные данные с заданными свойствами, то есть, зная $\widetilde{H}_{0\alpha}^{\mathrm{in}}$, $\widetilde{H}_{\alpha\beta}^{\mathrm{in}}$, $\widetilde{H}_{00}^{\mathrm{in}}$, и предполагая, что мы уже построили импульсы и нашли геодезические, выразить $H_{\alpha\beta}^{\mathrm{ref,tr}}(t = 0)$, $H_{\alpha n}^{\mathrm{ref,tr}}(t = 0)$, $H_{nn}^{\mathrm{ref,tr}}(t = 0)$ через известное. И в этот раз воспользуемся условиями непрерывности (21), вспоминая, что $\Theta^{\rm in}|_\gamma = \Theta^{\rm tr}|_\gamma = \Theta^{\rm ref}|_\gamma$. Последнее перепишем следующим образом

$$\widetilde{H}^{\rm in}_{\alpha\beta} = \widetilde{H}^{\rm ref}_{\alpha\beta} = \widetilde{H}^{\rm tr}_{\alpha\beta} = H^{\rm in}_{\alpha\beta}(0) = H^{\rm ref}_{\alpha\beta}(0) = H^{\rm tr}_{\alpha\beta}(0). \tag{51}$$

Тогда на границе раздела $\sigma = 0$ (43) получим

$$-t + p^{\rm in}_\alpha q^\alpha + \frac{1}{2}\widetilde{H}^{\rm in}_{00}t^2 + \frac{1}{2}\widetilde{H}^{\rm in}_{\alpha\beta}q^\alpha q^\beta + \widetilde{H}^{\rm in}_{0\alpha}tq^\alpha + \ldots =$$

$$-t + p^{\rm ref}_\alpha q^\alpha + \frac{1}{2}\widetilde{H}^{\rm ref}_{00}t^2 + \frac{1}{2}\widetilde{H}^{\rm ref}_{\alpha\beta}q^\alpha q^\beta + \widetilde{H}^{\rm ref}_{0\alpha}tq^\alpha + \ldots.$$

Из чего следует

$$\begin{cases} \widetilde{H}^{\rm in}_{00} = \widetilde{H}^{\rm ref}_{00} = \widetilde{H}^{\rm tr}_{00}, \\ \widetilde{H}^{\rm in}_{0\alpha} = \widetilde{H}^{\rm ref}_{0\alpha} = \widetilde{H}^{\rm tr}_{0\alpha}. \end{cases} \tag{52}$$

Теперь подставим во второе уравнение (52) коэффициенты (45) и подобное выражение для $H^{\rm ref}$ и H^{tr}. Таким образом мы получим представления для $H^{\rm ref,tr}_{\alpha n}(0)$ через известное падающее поле и известные производные геодезических:

$$H^{\rm ref}_{\alpha n}(0) = -H^{\rm in}_{\alpha n}(0). \tag{53}$$

Далее мы не будем приводить выражение для членов отраженной и преломленной квадратичных форм в нулевой момент времени, ввиду их громоздкости, а приведем только выражения для их мнимых частей, которые и пригодятся в дальнейшем. Для отраженного поля получим

$$\operatorname{Im} H^{\rm tr}_{\alpha n}(0)\dot\sigma_{\rm tr}(0) = -\operatorname{Im} H^{\rm in}_{\alpha n}(0)\dot\sigma_{\rm in}(0) - \operatorname{Im} H^{\rm in}_{\alpha\beta}(0)[\dot q^\alpha_{\rm in}(0) - \dot q^\alpha_{\rm tr}(0)]. \tag{54}$$

Аналогично для $H^{\rm ref}_{nn}(t=0)$:

$$\operatorname{Im}(H^{\rm ref}_{nn}(0)(\dot\sigma_{\rm ref}(0))^2) = \operatorname{Im}(H^{\rm in}_{nn}(0)(\dot\sigma_{\rm in}(0))^2), \tag{55}$$

$$\operatorname{Im}(H^{\rm tr}_{nn}(0)(\dot\sigma_{\rm tr}(0))^2) = \tag{56}$$

$$\operatorname{Im}\left(H^{\rm in}_{nn}(0)(\dot\sigma_{\rm in}(0))^2 + H^{in}_{\alpha\beta}(0)\left[\dot q^\alpha_{tr}(0)\dot q^\beta_{tr}(0) - \dot q^\alpha_{in}(0)\dot q^\beta_{in}(0)\right]\right)$$

$$-2\operatorname{Im}\left(H^{\rm tr}_{n\alpha}(0)\dot q^\alpha_{\rm tr}(0)\dot\sigma_{\rm tr}(0) + H^{\rm in}_{n\alpha}(0)\dot q^\alpha_{\rm in}(0)\dot\sigma_{\rm in}(0)\right).$$

Итак, мы нашли начальные данные для отраженной и преломленной квадратичных форм, используя только известное падающее поле и только что построенные импульсы.

2.4.2. Начально-краевая задача.

Так как мы построили начальные данные $H^{\rm ref}(0)$, $H^{\rm tr}(0)$, то мы можем решить уравнение Риккати (37). Если нам удастся показать, что начальная квадратичная форма $H(0) = H_0$ удовлетворяет свойствам следующей леммы, то решением уравнения Риккати будет искомая квадратичная формы гауссова пучка. Следующая лемма - это лемма 2.56 из [5] (также Бабич В., Улин В., [1], или Бабич В., Булдырев В., Молотков И., [2], Качалов А., [3]):

Лемма 2.56. *Пусть H_0 – $n \times n$ комплекснозначная матрица, такая, что*

$$H_0 = H_0^t, \tag{57}$$

$$\operatorname{Im} H_0 > 0. \tag{58}$$

Тогда (i) *начально-краевая задача для уравнения Риккати (37) с начальными значениями*

$$H|_{t=0} = H_0 \tag{59}$$

имеет единственное решение $H(t)$, $t \in \mathbf{R}$. Производные вычисляются в точке $(\mathbf{q}, \sigma; \mathbf{p}) = (\mathbf{q}(t), \sigma(t); \mathbf{p}(t))$, то есть на бихарактеристике, являющейся решением уравнений Гамильтона (36).

(ii) *Решение $H(t)$, $t \in \mathbf{R}$ симметрично, $H(t) = H(t)^t$, и* $\operatorname{Im} H(t) > 0$.

(iii) *Кроме того, для любых Y_0, Z_0 таких, что $H_0 = Z_0 Y_0^{-1}$, матрица $H(t)$ представима в виде $H(t) = Z(t)Y(t)^{-1}$. Пара матриц $(Z(t), Y(t))$ является решением начально-краевой задачи,*

$$\frac{d}{dt} Y(t) = B^t \cdot Y + C \cdot Z, \quad Y|_{t=0} = Y_0, \tag{60}$$

$$\frac{d}{dt} Z(t) = -D \cdot Y - B \cdot Z, \quad Z|_{t=0} = Z_0, \tag{61}$$

где матрица $Y(t)$ невырождена для любых $t \in \mathbf{R}$, $\det Y(t) \neq 0$.

Лемма. *Для любого гауссова пучка* $\det(\operatorname{Im} H(t)) \cdot |\det Y(t)|^2$ *постоянен.*

Обе леммы доказаны в [5].

Для того, чтобы воспользоваться результатами леммы 2.56, нам необходимо показать, что полученные $H^{\rm ref}(0)$, $H^{\rm tr}(0)$ удовлетворяют ее требованиям (симметричные и положительно-определенные).

Утверждение. *Пусть нам известно, что* $\operatorname{Im}\theta_2^{\mathrm{in}}(t,q,0)>0$*, и пусть* $\theta_2^{\mathrm{in}}(t,\mathbf{q},0)$ *симметрична, тогда* $\operatorname{Im}\theta_2^{\mathrm{ref,tr}}(0,\mathbf{q},\sigma)>0$ *и* $\theta_2^{\mathrm{ref,tr}}(0,\mathbf{q},\sigma)$ *тоже симметричны.*

Начнем доказательство утверждения с симметричности $H^{\mathrm{ref,tr}}(0)$. Действительно, мы не можем утверждать, что однородные полиномы $\theta_2^{\mathrm{ref,tr}}(0,\mathbf{q},\sigma)$ задаются симметричными построенными матрицами $H^{\mathrm{ref,tr}}(0)$, но мы всегда можем однозначно выбрать симметричный тензор, который порождает нужный полином $\theta^{\mathrm{ref,tr}}(0,q,\sigma)$. Докажем вторую часть утверждения. Пусть мы знаем, что мнимая часть $\operatorname{Im}H^{\mathrm{ref,tr}}(t)>0$, (32) для любого t, то есть

$$\left(\begin{pmatrix}\operatorname{Im}H^{\mathrm{in}}_{\alpha\beta}(0) & \operatorname{Im}H^{\mathrm{in}}_{\alpha n}(0)\\ \operatorname{Im}H^{\mathrm{in}}_{n\beta} & \operatorname{Im}H^{\mathrm{in}}_{nn}(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q^\alpha\\ \sigma\end{pmatrix},\begin{pmatrix}q^\beta\\ \sigma\end{pmatrix}\right)>0.$$

Критерий Сильвестра положительной определенности говорит, что необходимым и достаточным условием является положительность всех главных миноров. Заметим, что все главные миноры матриц $\operatorname{Im}H^{\mathrm{in,ref,tr}}(0)$, кроме детерминанта, совпадают. Соответственно, для того, чтобы показать положительную определенность $\operatorname{Im}H^{\mathrm{ref,tr}}(0)$, нам придется следить только за положительностью их определителей. Рассмотрим сначала отраженную квадратичную форму

$$\det\begin{pmatrix}\operatorname{Im}H^{\mathrm{ref}}_{\alpha\beta}(0) & \operatorname{Im}H^{\mathrm{ref}}_{\alpha n}(0)\\ \operatorname{Im}H^{\mathrm{ref}}_{n\beta}(0) & \operatorname{Im}H^{\mathrm{ref}}_{nn}(0)\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\operatorname{Im}H^{\mathrm{in}}_{\alpha\beta}(0) & -\operatorname{Im}H^{\mathrm{in}}_{\alpha n}(0)\\ -\operatorname{Im}H^{\mathrm{in}}_{n\beta}(0) & \operatorname{Im}H^{\mathrm{in}}_{nn}(0)\end{pmatrix}.$$

Как видно, определители равны, а, следовательно мы доказали, что $\operatorname{Im}H^{\mathrm{ref}}(0)>0$. Теперь рассмотрим $\operatorname{Im}H^{\mathrm{tr}}(0)$. Очевидно, домножая сначала последний столбец, а затем последнюю строку на константу $\dot\sigma_{\mathrm{in,tr}}(0)$ матриц $\operatorname{Im}H^{\mathrm{in}}(0)$, $\operatorname{Im}H^{\mathrm{tr}}(0)$ соответственно ((54), (56)), знак определителя мы не меняем. Будем работать с матрицей

$$\begin{pmatrix}\operatorname{Im}H^{\mathrm{in}}_{\alpha\beta}(0) & \operatorname{Im}H^{\mathrm{in}}_{\alpha n}(0)\dot\sigma_{\mathrm{in}}(0)\\ \operatorname{Im}H^{\mathrm{tr}}_{n\beta}(0)\dot\sigma_{\mathrm{in}}(0) & \operatorname{Im}H^{\mathrm{tr}}_{nn}(0)\dot\sigma^2_{\mathrm{in}}(0)\end{pmatrix},$$

определитель которой не изменился, положителен. Далее линейными преобразованиями (не меняющими определитель) получим матрицу $\operatorname{Im}H^{\mathrm{tr}}(0)$ с компонентами ((51), (54), (56)), что и докажет ее положительную определенность. Упомянутые преобразования таковы: прибавим к последнему столбцу линейную комбинацию всех правых строк с множителем $-[\dot{q}^{\beta}_{\rm in}(0) - \dot{q}^{\beta}_{\rm tr}(0)]$, теперь самый правый столбец полученной матрицы имеет компоненты $-\operatorname{Im} H^{\rm in}_{\alpha n}\dot{\sigma}_{\rm in}(0) - [\dot{q}^{\beta}_{\rm in}(0) - \dot{q}^{\beta}_{\rm tr}(0)]\operatorname{Im} H^{\rm in}_{\alpha\beta}(0)$, что совпадает с (54). Последняя компонента выглядит так: $\operatorname{Im} H^{\rm in}_{nn}(0)\dot{\sigma}_{\rm in}(0) - \operatorname{Im} H^{\rm in}_{n\beta}(0)\dot{\sigma}_{\rm in}(0)[\dot{q}^{\beta}_{\rm in}(0) - \dot{q}^{\beta}_{\rm tr}(0)]$. Теперь прибавим к последней строке линейную комбинацию всех верхних строк с множителем $-[\dot{q}^{\alpha}_{\rm in}(0) - \dot{q}^{\alpha}_{\rm tr}(0)]$. Первые $(n-1)$ компонент последней строки теперь совпадают с (54), а последняя компонента полностью совпадает с (56), что доказывает положительную определенность матрицы $\operatorname{Im} H^{\rm tr}(0) > 0$.

Мы доказали утверждение и теперь можем построить решения уравнения Риккати с необходимыми свойствами

$$\begin{cases} H^{\rm ref}(t) = Z^{\rm ref}(t)(Y^{\rm ref}(t))^{-1}, \\ H^{\rm tr}(t) = Z^{\rm tr}(t)(Y^{\rm tr}(t))^{-1}. \end{cases} \tag{62}$$

Теперь ФГП (16) на многообразии сконцентрирован в окрестности точки и распространяется на геодезической $(p^{\rm ref,tr}(t); q^{\rm ref,tr}(t), \sigma^{\rm ref,tr}(t))$ с единичной скоростью.

2.5. Полиномы старших степеней. Применяем похожую процедуру для поиска однородных полиномов $\theta^{\rm ref}_l(t,\mathbf{q},\sigma)$, $\theta^{\rm tr}_l(t,\mathbf{q},\sigma)$, $l \geqslant 3$. Сначала схематично наметим рекуррентную процедуру нахождения начальных данных. Затем представим дифференциальное уравнение для их нахождения. Дополненные начальными данными, эти уравнения однозначно решаются.

2.5.1. Начальные данные $\theta^{\rm ref}_l(0,\mathbf{q},\sigma)$, $\theta^{\rm tr}_l(0,\mathbf{q},\sigma)$.

Мы не будем приводить здесь формулы для вычисления начальных данных из-за их громоздкости, а приведем лишь основные идеи метода. Зафиксируем $l \geqslant 3$, и будем считать, что уже нашли все $\theta^{\rm ref,tr}_l(t,\mathbf{q},\sigma)$ младших степеней. Опять же падающее поле будем считать известным. Рассмотрим формальные ряды (аналогично тому, как мы рассматривали их для $l = 1,2$ (14), (15)). Затем рассмотрим разложения этих рядов в ряды Тейлора в окрестности $t = 0$ (аналогично (43)). Из условий непрерывности на границе раздела будет видно, что коэффициенты форм $\theta^{\rm ref,tr}_l(t,\mathbf{q},\sigma)$ в $t = 0$ можно выразить через коэффициенты падающего поля и $\theta^{\rm ref,tr}_l(t,\mathbf{q},\sigma)$ степеней ниже l. На самом деле, полученная таким образом система уравнений будет треугольной, то есть все необходимые коэффициенты можно выразить последовательно. То есть, начать можно с приравнивания коэффициентов, при мономах, не содержащих σ, а содержащих комбинации l касательных и временных переменных. Такие коэффициенты непосредственно равны аналогичным известным коэффициентам падающего поля. Продолжая процедуру, приравниваем следующую группу коэффициентов при мономах, содержащих одну σ и $l-1$ касательных и временных переменных, коэффициенты выражаются через полученные на предыдущем этапе, известные коэффициенты падающего поля и полученные раннее полиномы меньших порядков.

2.5.2. Уравнения для старших степеней.

Предполагаем снова, что нам известны $\theta_1^{\mathrm{ref,tr}}(t), .., \theta_{l-1}^{\mathrm{ref,tr}}(t)$ и начальные данные $\theta_l^{\mathrm{ref,tr}}(0)$. Приведем здесь начально-краевую задачу для нахождения $\theta_l^{\mathrm{ref,tr}}(t)$. Будем следовать методу, предложенному, например, в [5]. Напомним, что каждый член фазовой функции должен удовлетворять (41) с начальными данными полученными выше. Для упрощения решения (41) используем новые координаты

$$\hat{t} = t, \quad \hat{y} = Y^{-1}(t)\mathbf{Y}(t), \tag{63}$$

где $Y(t)$ определен в (62) и $\mathbf{Y}(t)$ определен в (31) так, что

$$\frac{\partial}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial}{\partial t} + \left[(B)^t Y + CZ\right]^i_j \hat{y}^j \frac{\partial}{\partial \mathbf{Y}^i} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{N}^i_j \mathbf{Y}^j \frac{\partial}{\partial \mathbf{Y}^i},$$

где $\mathcal{N}^i_j$ определены в (42). Пусть $\hat{\theta}_l(\hat{t}, \hat{y})$ – представления полиномов $\theta_l(t, \mathbf{Y})$ в новых координатах с “крышечками”, тогда уравнения (41) принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \widetilde{\theta}_l = \widetilde{\mathcal{F}}_l, \ l = 3, 4, \dots .$$

Дополнив эти уравнения начальными данными, $\hat{\theta}_l(\hat{t}, \widetilde{y})|_{\hat{t}=0} = \theta_l(t, \mathbf{Y})|_{t=0}$ и $Y(0) = I$, можно найти $\hat{\theta}_l(\hat{t}, \hat{y})$ для любого $\hat{t}$, а, следовательно, определить $\theta_l(t, \mathbf{Y})$ для любого t.

2.6. Фазовые функции $\Theta_N^{\mathrm{ref}}(t, \mathbf{q}, \sigma)$, $\Theta_N^{\mathrm{tr}}(t, \mathbf{q}, \sigma)$.

Мы привели процедуру построения любого конечного члена разложения фазовых функций $\theta_1^{\mathrm{ref,tr}}(t), \theta_2^{\mathrm{ref,tr}}(t), \dots, \theta_N^{\mathrm{ref,tr}}(t)$. Приведем выводы леммы 2.61 из [5]. Предположим, что Θ_N^{in} известна, тогда можно построить $\Theta_n^{\mathrm{ref(tr)}}$, так что построенные функции представимы рядом

$$\Theta^{\mathrm{ref(tr)}}(t,\mathbf{q},\sigma) \asymp^N \Theta_N^{\mathrm{ref(tr)}}(t,\mathbf{q},\sigma) = \sum_{l=1}^{N-1} \theta_l^{\mathrm{ref(tr)}}(t)$$

$$= \sum_{|\iota|=1}^{N-1} \frac{1}{\iota!}\theta_\iota^{\mathrm{ref(tr)}}(t)\mathbf{Y}^\iota(t), \tag{64}$$

и так, что

$$\Theta_1^{\mathrm{ref(tr)}} = (P^{\mathrm{ref(tr)}}(t), \mathbf{Y}(t)), \quad |P^{\mathrm{ref(tr)}}(t)| = 1$$

действительные и $(P^{\mathrm{ref(tr)}}(t)$ определены (30), и $\mathbf{Y}(t)$ определены (31),

$$\Theta_2^{\mathrm{ref(tr)}} = \frac{1}{2}(H^{\mathrm{ref(tr)}}(t)\mathbf{Y}(t), \mathbf{Y}(t)), \quad \operatorname{Im} H(t) \geqslant 0,$$

$H^{\mathrm{ref,tr}}(t)$ построены выше. Более того, построенные фазовые функции удовлетворяют условиям (8), (9) и оценкам

$$|((\partial_t)^2 - g^{ij}\partial_i\partial_j)\Theta_N^{\mathrm{ref(tr)}}| \leqslant C_N|\mathbf{Y}(t)|^N, \tag{65}$$

то есть выполнены все требования для того, чтобы они были фазовыми функциями гауссова пучка.

2.6.1. Законы отражения и преломления. Рассмотрим кокасательное расслоение $T^*_{M_1\in\gamma}(\mathcal{M})$ и коплоскость $\pi^{\mathrm{in}}(M_1)$ в нем, такую, что точка $M_1 = (\mathbf{0}, 0)$ – точка падения пучка на границу раздела. Коплоскость $\pi^{\mathrm{in}}(M_1)$ – двумерная коплоскость, натянутая на ковектор

$$P^{\mathrm{in}}(0) = d\Theta^{\mathrm{in}}|_\gamma(M_1) = (\frac{\partial\Theta^{\mathrm{in}}}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial\Theta^{\mathrm{in}}}{\partial\sigma_-})|_{M_1}$$

и ковектор нормали $d\sigma_- = (0, \dots, 0, -1)$ в точке M_1 момент $t = 0$. **Угол падения** $\varphi^-(M_1) \in \pi^{\mathrm{in}}(M_1)$ в кокасательном расслоении – угол, под которым падающая волна U^{in} падает на границу раздела γ в момент времени $t = 0$.

Пусть U^{tr} стартует с γ внутрь Ω_+ под **углом преломления** φ^{tr} между ковектором $P^{\mathrm{tr}}(0) = d\Theta^{\mathrm{tr}}|_\gamma(t=0) = (\frac{\partial\Theta^{\mathrm{tr}}}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial\Theta^{\mathrm{tr}}}{\partial\sigma_+})|_{t=0}$ и вектором конормали $d\sigma_+ = (0, \dots, 0, 1)$, $\pi^{\mathrm{tr}} \in T^*_{M_1\in\gamma}(\Omega_+)$, где двумерная коплоскость π^{tr} натянута на ковектора $d\sigma_+$ и $P^{\mathrm{tr}}(0)$. Угол преломления φ^{tr} определяет геодезическую $\mu^{\mathrm{tr}}(t)$.

Аналогично определим **угол отражения** φ^{ref} **в точке** M_1 **между ковекторами** $P^{\mathrm{ref}}(0) = d\Theta^{\mathrm{ref}}|_\gamma(t=0) = (\frac{\partial\Theta^{\mathrm{ref}}}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial\Theta^{\mathrm{ref}}}{\partial\sigma_-})|_{t=0}$ **и** $d\sigma_-$ **в коплоскости** π^{ref}.

Предложение. *Двумерные коплоскости* π^{in}, π^{ref}, π^{tr} *совпадают. Если известна величина угла* φ^{in}, *то можно найти угол преломления* φ^{tr} *и угол отражения* φ^{ref}.

Вспоминая условия непрерывности и дифференцируя первое из них (21) по q^α (мы не можем дифференцировать по σ так как условие выполнено только на γ), получим

$$\frac{\partial\Theta^{\mathrm{in}}}{\partial q^\alpha}|_\gamma = \frac{\partial\Theta^{\mathrm{ref}}}{\partial q^\alpha}|_\gamma = \frac{\partial\Theta^{\mathrm{tr}}}{\partial q^\alpha}|_\gamma.$$

Уравнение эйконала (28) и нормализованность координат в точке M_1 дает

$$\frac{\partial\Theta_N^{\mathrm{in}}}{\partial\sigma_-}(M_1) = \cos\varphi^{\mathrm{in}} = p_n^{\mathrm{in}}(0) < 0, \quad \frac{\partial\Theta_N^{\mathrm{in}}}{\partial\sigma_-}(M_1) = p_n^{\mathrm{ref}}(0) = -p_n^{\mathrm{in}}(0) > 0,$$

а

$$\sin^2\varphi^{\mathrm{in}} = g_-^{\alpha\beta}\frac{\partial\Theta^{\mathrm{in}}}{\partial q^\alpha}\frac{\partial\Theta^{\mathrm{in}}}{\partial q^\beta}(M_1) = g_-^{\alpha\beta}p_\alpha^{\mathrm{in}}(0)p_\beta^{\mathrm{in}}(0) \leqslant 1.$$

Рассмотрим два ковектора $P^{\mathrm{in}}(0)$, $d\sigma_-$, на которые натянута коплоскость $\pi^{\mathrm{in}}(M_1)$. Рассмотрим два ковектора $P^{\mathrm{ref}}(0)$ и $d\sigma_-$, на которые натянута коплоскость $\pi^{\mathrm{ref}}(M_1)$. Мы получили значение $P^{\mathrm{ref}}(0)$ ранее. Можно увидеть, что все его касательные компоненты совпадают с $P^{\mathrm{in}}(0)$. Из формул (48)–(50) видно, что отличается у них только последняя координата. Следовательно, коплоскость $\pi^{\mathrm{ref}}(M_1)$ совпадает с коплоскостью $\pi^{\mathrm{in}}(M_1)$, так как ковектор $P^{\mathrm{ref}}(0)$ может быть представлен линейной комбинацией $P^{\mathrm{in}}(0)$ и $d\sigma_-$. Значит, они лежат в одной и той же двумерной коплоскости.

Аналогично, рассмотрим ковекторы $P^{\mathrm{in}}(0)$ и $P^{\mathrm{tr}}(0)$ – они так же отличаются в последней координате, как видно из (50). Теперь сравним $d\sigma_-$ и $d\sigma_+$. Очевидно, что они лежат на одной прямой $(\mathbf{q}=0,\ \sigma^-)\equiv(\mathbf{q}=0,\ \sigma^+)$ в общем кокасательном пространстве $T^*_{M_1}\Omega^-\equiv T^*_{M_1}\Omega^+$ с координатами $(\mathbf{q},\ \sigma^-)$, $(\mathbf{q},\ \sigma^+)$, а $P^{\mathrm{tr}}(0)$ представим в виде линейной комбинации $P^{\mathrm{in}}(0)$ и $d\sigma_-$. Тогда двумерные коплоскости $\pi^{\mathrm{in}}(M_1)$ и $\pi^{\mathrm{tr}}(M_1)$ совпадают.

Введем два ковектора

$$b_- \in \pi^{\rm in}(M_1)\bigcap T^*_{M_1\in\gamma}\gamma,\ \ b_+ \in \pi^{\rm tr}(M_1)\bigcap T^*_{M_1\in\gamma}\gamma$$

такие, что

$$(d\sigma_-, b_-)_{g^-} = 0,\ \ |b_-|_{g^-} = \sin\varphi^{\rm in},$$

$$(d\sigma_+, b_+)_{g^+} = 0,\ \ |b_+|_{g^+} = \sin\varphi^{\rm tr}.$$

Тогда в равных коплоскостях $\pi^{\rm ref}(M_1)$ и $\pi^{\rm in}(M_1)$:

$$(d\Theta^{\rm in}, b_-) = g_-^{\alpha\beta}(M_1)\frac{\partial\Theta^{\rm in}}{\partial q^\alpha}b_\beta = \sin\varphi^{\rm in} g_-^{\alpha\beta}(M_1)b_\alpha b_\beta$$

$$= \sin\varphi^{\rm ref} g_-^{\alpha\beta}(M_1)b_\alpha b_\beta = (d\Theta^{\rm ref}, b_-) = g_-^{\alpha\beta}(M_1)\frac{\partial\Theta^{\rm ref}}{\partial q^\alpha}b_\beta.$$

Отсюда $\sin\varphi^{\rm in} = \sin\varphi^{\rm ref}$, а уравнение эйконала дает отраженный косинус $\cos\varphi^{\rm ref} = -\cos\varphi^{\rm in}$. Последняя формула соответствует анизотропному обобщению закона геометрической оптики Френеля, то есть

$$\begin{cases} \sin\varphi^{\rm ref} = g_-^{\alpha\beta}\frac{\partial\Theta^{\rm in}}{\partial q^\alpha}\frac{\partial\Theta^{\rm in}}{\partial q^\beta}(M_1) = g_-^{\alpha\beta}(M_1)p^{\rm in}_\alpha(0)p^{\rm in}_\beta(0) = \sin\varphi^{\rm in}, \\ \cos\varphi^{\rm ref} = -\sqrt{1-(g_-^{\alpha\beta}\frac{\partial\Theta^{\rm in}}{\partial q^\alpha}\frac{\partial\Theta^{\rm in}}{\partial q^\beta}(M_1))} = -\cos\varphi^{\rm in}. \end{cases} \tag{66}$$

$$\frac{\partial\Theta^{\rm in}}{\partial q^\alpha}|_\gamma = \sin\varphi^-\frac{b_-}{|b_-|_{g^-}} = \frac{\partial\Theta^{\rm tr}}{\partial q^\alpha}|_\gamma = \sin\varphi^+\frac{b_+}{|b_+|_{g^+}}$$

Из последнего следует формула для косинуса преломленной волны $\cos\varphi^{\rm tr}$, выраженной через известные функции падающего поля. Для того, чтобы гауссов пучок $U^{\rm tr}$ бежал внутрь Ω_+, мы должны взять квадратный корень с положительным знаком

$$\begin{cases} \cos\varphi^{\rm tr} = +\sqrt{1-\sin^2\varphi^{\rm in}\frac{g_+^{\alpha\beta}b_\alpha b_\beta}{g_-^{\alpha\beta}b_\alpha b_\beta}} > 0, \\ \sin\varphi^{\rm tr} = \sin\varphi^{\rm in}\sqrt{\frac{g_+^{\alpha\beta}b_\alpha b_\beta}{g_-^{\alpha\beta}b_\alpha b_\beta}}. \end{cases} \tag{67}$$

Мы нашли величины отраженного и преломленного углов, определенных косинусами (66) и (67) через падающее поле.

Формула (67), переписанная в виде отношения синусов, обобщает закон Снеллиуса для анизотропных сред. Можно увидеть, что в случае, когда $\varphi^{\rm tr} = \frac{\pi}{2}$, угол $\varphi^{\rm in}$ является критическим, преломленная волна бежит в касательном направлении по отношению к границе раздела. В таком случае лучевые разложения не могут быть использованы, но такое распространение лежит за границами данной работы.

3. Амплитуды

3.1. Значения амплитуды на границе раздела. Преобразим условия на границе раздела так, чтобы выразить граничные данные отраженного и преломленного поля через поле падающее, как мы делали раньше для фазовой функции.

Лемма 2. *Пусть $u_N^{\rm in}(t, \mathbf{q}, 0)$ – известный след падающей амплитудной функции на границе раздела. Мы можем найти следы отраженной и преломленной амплитуд $u_N^{\rm ref}(t, \mathbf{q}, 0)$ и $u_N^{\rm tr}(t, \mathbf{q}, 0)$ на границе раздела для любого $N > 0$.*

Доказательство представим в виде процедуры построения.

3.1.1. Доказательство Леммы 2. Рассмотрим условия непрерывности (21) на границе раздела и подставим в них формальное разложение гауссова пучка. Первое условие даст следующие уравнения

$$\begin{cases} \Theta^{\rm in}(\mathbf{x}, t)|_\gamma \asymp \Theta^{\rm ref}(\mathbf{x}, t)|_\gamma \asymp \Theta^{\rm tr}(\mathbf{x}, t)|_\gamma, \\ u_k^{\rm in}(\mathbf{x}, t)|_\gamma + u_k^{\rm ref}(\mathbf{x}, t)|_\gamma = u_k^{tr}(\mathbf{x}, t)|_\gamma, \ \forall k. \end{cases} \tag{68}$$

Условие непрерывности нормальных производных даст уравнения

$$\begin{aligned} (i\varepsilon)^{-1} \sum_{l=0}^{N} (i\varepsilon)^l \left(S^{\rm in} u_l^{\rm in} + S^{\rm ref} u_l^{\rm ref}\right)|_\gamma + \sqrt{g_-|_\gamma} \sum_{l=0}^{N} (i\varepsilon)^l \\ + \left(\frac{\partial u_l^{\rm in}}{\partial \sigma_-} + \frac{\partial u_l^{\rm ref}}{\partial \sigma_-}\right)|_\gamma = (i\varepsilon)^{-1} \sum_{l=0}^{N} (i\varepsilon)^l \left(S^{\rm tr} u_l^{\rm tr}\right)|_\gamma \\ + \sqrt{g_+|_\gamma} \sum_{l=0}^{N} (i\varepsilon)^l \left(\frac{\partial u_l^{\rm tr}}{\partial \sigma_+}\right)|_\gamma, \end{aligned} \tag{69}$$

где мы использовали следующие удобные обозначения:

$$S^{\rm in,ref} := \left(\sqrt{g_-(q,0)} \frac{\partial \Theta_N^{\rm in,ref}}{\partial \sigma_-}(t, q, 0)\right), \ S^{\rm tr} := \left(\sqrt{g_+(q,0)} \frac{\partial \Theta_N^{\rm tr}}{\partial \sigma_+}(t, q, 0)\right).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $(i\varepsilon)$, предполагая, что

$$u_0^{\mathrm{in,ref,tr}} \not\equiv 0, \quad u_k^{\mathrm{in,ref,tr}} \equiv 0, \, \forall k < 0,$$

мы получаем систему уравнений для $k = -1, 0, 1, \dots$:

$$\mathbf{P}\begin{pmatrix} u_{k+1}^{\mathrm{tr}}(t,q,0) \\ u_{k+1}^{\mathrm{ref}}(t,q,0) \end{pmatrix} = \mathbf{Q}u_{k+1}^{\mathrm{in}}(t,q,0) + \mathbf{R}_k,$$

где

$$\mathbf{P} := \begin{pmatrix} S^{\mathrm{tr}} & -S^{\mathrm{ref}} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} := \begin{pmatrix} S^{\mathrm{in}} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_k := \begin{pmatrix} \mathcal{R}(u_k) \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{70}$$

$$\mathcal{R}(u_k) := -\sqrt{g_-(q,0)}\Big(\frac{\partial u_k^{\mathrm{in}}}{\partial\sigma}(t,q,0) + \frac{\partial u_k^{\mathrm{ref}}}{\partial\sigma}(t,q,0)\Big) + \sqrt{g_+(q,0)}\frac{\partial u_k^{\mathrm{tr}}}{\partial\sigma}(t,q,0). \tag{71}$$

Детерминант полученной системы обозначим через

$$\mathcal{D} := (-S^{\mathrm{tr}} + S^{\mathrm{ref}}). \tag{72}$$

Полученная система уравнений для полиномов на γ (70) имеет единственное решение для любой правой части, когда детерминант (72) $\mathcal{D} \neq 0$. Решая эту систему уравнений, получим

$$\begin{pmatrix} u_{k+1}^{\mathrm{tr}}(t,q,0) \\ u_{k+1}^{\mathrm{ref}}(t,q,0) \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}u_{k+1}^{\mathrm{in}}(t,q,0) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{R}_k, \tag{73}$$

где

$$\mathbf{P}^{-1} := \frac{1}{\mathcal{D}}\begin{pmatrix} 1 & S^{\mathrm{ref}} \\ 1 & S^{\mathrm{tr}} \end{pmatrix}. \tag{74}$$

Таким образом, мы нашли рекуррентные формулы для любого конечного числа граничных значений на γ отраженной и преломленной амплитуд в терминах известного падающего поля. Итак, Лемма 2 доказана.

Дополнительно представим главные члены u_0^{ref} $(t,q,0)$ и u_0^{tr} $(t,q,0)$:

$$\begin{pmatrix} u_0^{\mathrm{tr}}(t,q,0) \\ u_0^{\mathrm{ref}}(t,q,0) \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}u_0^{\mathrm{in}}(t,q,0) = \begin{pmatrix} \mathcal{T} \\ \mathcal{R} \end{pmatrix} u_0^{\mathrm{in}}(t,q,0), \tag{75}$$

где $\mathcal{R}$, $\mathcal{T}$ – коэффициенты отражения и преломления соответственно, такие что $1 + \mathcal{R} = \mathcal{T}$. Аналогично,

$$\begin{pmatrix} u_1^{\mathrm{tr}}(t,q,0) \\ u_1^{\mathrm{ref}}(t,q,0) \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}u_1^{\mathrm{in}}(t,q,0) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{R}_0. \tag{76}$$

3.2. Уравнения для амплитуд.

Выпишем ОДУ для амплитудных функций u^{ref} (t,q,σ) и u^{tr} (t,q,σ). Для того, чтобы их решить единственным образом, необходимо будет дополнить их начальными данными. Эти начальные данные мы получим позже. Анализ уравнений переноса (27) на геодезической $\mu(t)$ основан опять же на разложении в ряды Тейлора. Для любого l разложение

$$u_l(t,\mathbf{q},\sigma) \asymp \sum_{m\geqslant 0} u_{l(m)}(t,q-q(t),\sigma-\sigma(t)) \asymp \sum_{m\geqslant 0} \hat{u}_{l(m)}(\hat{t},\hat{\xi}), \tag{77}$$

здесь $u_{l(m)}$, $\hat{u}_{l(m)}$ – однородные полиномы степени m, $m=0,1,\ldots$ по переменным t,q,σ и $\hat{t},\hat{\xi}$ (см. (63)) соответственно.

Оператор $\mathcal{L}_{\Theta_N}$ – линейный дифференциальный оператор первой степени, в уравнении (27) зависит только от коэффициентов $\hat{u}_{l(m)}$ таких, что $m\leqslant l+1$. Те члены, в которые входят $u_{l(m+1)}$ равны нулю вдоль би-характеристик в силу системы Гамильтона (36). Также $\hat{u}_{l(m)}$ как функция времени t со значениями в пространстве однородных полиномов степени m по переменным $\hat{\xi}$. Тогда ОДУ для $\hat{u}_{l(m)}$ имеет вид

$$\frac{d}{dt}\hat{u}_{l(m)}(t)+r(t)\hat{u}_{l(m)}(t)=\hat{\mathcal{F}}_{l(m)}(t),\ l=0,1,\ldots, \tag{78}$$

$\hat{\mathcal{F}}_{l(m)}(t)$ – однородные полиномы степени m, которые зависят только от $\hat{u}_{s(p)}(t)$ и $\hat{\theta}_{N,p}$ когда $p\leqslant m+2$, $s<l$. Так как

$$r(t)=-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(B^t+CH)+\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\ln g(t),\ H(t)=Z(t)Y^{-1}(t),$$

то есть,

$$r(t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln[\det Y(t)]+\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\ln g(t),$$

то мы можем решить эти уравнения, дополнив их начальными данными:

$$\hat{u}_{m,l}(\hat{t})=\varrho(t)\big(\hat{u}_{m,l}(0)+\int\limits_0^t \varrho^{-1}(t')\hat{\mathcal{F}}_{m,l}(t')dt',\big) \tag{79}$$

$$\varrho(t)=\sqrt{\frac{\det Y(0)}{\det Y(t)}}\sqrt[4]{\frac{g(0)}{g(t)}}. \tag{80}$$

Заметим, что $\det Y^{-1}(t)$ соответствует геометрической расходимости поля лучей. В данной главе мы пользовались известной процедурой из, например, [1], см. также [5] п. 173.

3.3. Начальные значения.

Сначала рассмотрим ранее полученные представления для амплитуд (опустим значки ref, tr, так как следующее верно для обеих амплитуд):

$$\begin{cases} u(t,q,\sigma) \asymp^N \sum\limits_{l=0}^{N} u_l(i\varepsilon)^l \ \text{ см. (13)}, \\ u_l(t,q,\sigma) = u_{l(0)} + \ldots + u_{l(L(N))}, \ L(N) = \frac{2(N+1-l)}{1-2\eta}, \ \text{ см. (77)}, \\ u_l^{ref,tr}(t,q,0) \ \text{найдены, см. (73)}, \\ u_l^{\mathrm{ref,tr}}(0,q,\sigma) \ \text{хотим найти сейчас.} \end{cases} \tag{81}$$

Как и прежде, будем использовать разложения в ряд Тейлора. Перепишем (13) аналогично тому, как мы переписывали разложения для фазовой функции (29). Параллельно будем давать специальные обозначения для однородных полиномов в рядах (13) для того, чтобы уменьшить число индексов. Построим только несколько первых членов, остальные могут быть получены аналогичным способом. Избавимся также от индекса l, предполагая, что следующее верно для любого $l > 0$:

$$u_l(t,\mathbf{q},\sigma) = \mathrm{A}(t) + \mathrm{B}(t)Y(t) + \frac{1}{2}\big(\mathrm{C}(t)Y(t), Y(t)\big) + \ldots, \tag{82}$$

где $\mathrm{A}(t) := u_{l(0)}(t)$, $\mathrm{B}(t) = (\mathrm{B}_\alpha(t) \ \ \mathrm{B}_n(t)) := u_{l(1)}(t)$,

$$\mathrm{C}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{C}_{\alpha\beta}(t) & \mathrm{C}_{n\beta}(t) \\ \mathrm{C}_{\alpha n}(t) & \mathrm{C}_{nn}(t) \end{pmatrix} := u_{l(2)}(t), \ldots$$

и так далее. Так как мы хотим получить $u_l(0,q,\sigma)$, или, точнее, $u_{l(m)}^{\mathrm{ref,tr}}(0,q,\sigma)$, то это значит в наших обозначениях, что для любого $l > 0$ нам нужны значения $A^{\mathrm{ref,tr}}(0)$, $B^{\mathrm{ref,tr}}(0)$, $C^{\mathrm{ref,tr}}(0), \ldots$. Будем действовать методом, аналогичным тому, которым мы пользовались в подсекции 2.4.1 для того, чтобы получить (45):

$$u_l(t,\mathbf{q},\sigma) \asymp \widetilde{\mathrm{A}} + \widetilde{\mathrm{B}}_0 t + \widetilde{\mathrm{B}}_\alpha q^\alpha + \widetilde{\mathrm{B}}_n \sigma +$$

$$+\frac{1}{2}\widetilde{\mathrm{C}}_{00}t^2 + \frac{1}{2}\widetilde{\mathrm{C}}_{\alpha\beta}q^\alpha q^\beta + \frac{1}{2}\widetilde{\mathrm{C}}_{nn}\sigma^2 + \widetilde{\mathrm{C}}_{0\alpha}tq^\alpha + \widetilde{\mathrm{C}}_{0n}t\sigma + \widetilde{\mathrm{C}}_{\alpha n}q^\alpha\sigma + \ldots =$$

$$= \widetilde{\mathrm{A}} + (\widetilde{\mathrm{B}})^t \begin{pmatrix} t \\ q^\alpha \\ \sigma \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\widetilde{\mathrm{C}} \begin{pmatrix} t \\ q^\alpha \\ \sigma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ q^\alpha \\ \sigma \end{pmatrix}\right) + \ldots, \qquad (83)$$

где

$$\widetilde{\mathrm{A}} = \widetilde{\mathrm{A}}_0,\ \widetilde{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathrm{B}}_0 \\ \widetilde{\mathrm{B}}_\alpha \\ \widetilde{\mathrm{B}}_n \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathrm{C}}_{00} & \widetilde{\mathrm{C}}_{0\beta} & \widetilde{\mathrm{C}}_{0n} \\ \widetilde{\mathrm{C}}_{\alpha 0} & \widetilde{\mathrm{C}}_{\alpha\beta} & \widetilde{\mathrm{C}}_{\alpha n} \\ \widetilde{\mathrm{C}}_{n0} & \widetilde{\mathrm{C}}_{n\beta} & \widetilde{\mathrm{C}}_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (84)$$

Рассмотрим далее следующее выражение на границе раздела γ :

$$u_N(t, \mathbf{q}, 0) \asymp \widetilde{\mathrm{B}}_0 t + \widetilde{\mathrm{B}}_\alpha q^\alpha + \frac{1}{2}\widetilde{\mathrm{C}}_{00} t^2 + \frac{1}{2}\widetilde{\mathrm{C}}_{\alpha\beta} q^\alpha q^\beta + \widetilde{\mathrm{C}}_{0\alpha} t q^\alpha + \ldots =$$

$$= (\widetilde{\widetilde{\mathrm{B}}})^t \begin{pmatrix} t \\ q^\alpha \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\widetilde{\widetilde{\mathrm{C}}} \begin{pmatrix} t \\ q^\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ q^\alpha \end{pmatrix}\right) + \ldots, \qquad (85)$$

и

$$\widetilde{\widetilde{\mathrm{A}}} = \widetilde{\mathrm{A}}_0,\ \widetilde{\widetilde{\mathrm{B}}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathrm{B}}_0 \\ \widetilde{\mathrm{B}}_\alpha \end{pmatrix},\ \widetilde{\widetilde{\mathrm{C}}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathrm{C}}_{00} & \widetilde{\mathrm{C}}_{0\beta} \\ \widetilde{\mathrm{C}}_{\alpha 0} & \widetilde{\mathrm{C}}_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \ldots \text{-известные матрицы.} \qquad (86)$$

Теперь, полагая что мы знаем последнее, найдем $\widetilde{\mathrm{B}}_n$, $\widetilde{\mathrm{C}}_{0n}$, $\widetilde{\mathrm{C}}_{\alpha n} = \mathrm{C}_{\alpha n}(0)$, $\widetilde{\mathrm{C}}_{nn}, \ldots$, то есть можем построить $\mathrm{B}(0)$, $\mathrm{C}(0), \ldots$. Процедура такая: сначала найдем начальное значение для u_0, то есть

$$\widetilde{\mathrm{A}}_0 = \mathrm{A}(0), \qquad (87)$$

затем решаем ОДУ (13) для $u_{l(0)}(t)$. Теперь, раз мы нашли $A(t)$, можем построить $\dot{A}(0)$, и тогда можем найти начальные данные для второго члена:

$$\begin{cases} \widetilde{\mathrm{B}}_0 = \dot{\mathrm{A}}(0) - \mathrm{B}_\alpha(0)\dot{q}^\alpha(0) - \mathrm{B}_n(0)\dot{\sigma}(0), \\ \widetilde{\mathrm{B}}_\alpha = \mathrm{B}_\alpha(0), \quad \widetilde{\mathrm{B}}_n = \mathrm{B}_n(0). \end{cases} \qquad (88)$$

Теперь, зная начальные данные для второго члена, снова решаем ОДУ (13) и найдем $B(t)$ и $\dot{B}(0)$, затем можно найти

$$\begin{cases} \mathrm{C}_{\alpha n}(0)\dot{\sigma}(0) = -\widetilde{\mathrm{C}}_{0\alpha} - \dot{\mathrm{B}}_\alpha(0) + \mathrm{C}_{\alpha\beta}(0)\dot{q}^\beta(0), \\ \frac{1}{2}\widetilde{\mathrm{C}}_{00} = \frac{1}{2}\ddot{\mathrm{A}}(0) - \dot{\mathrm{B}}_\alpha(0)\dot{q}^\alpha(0) - \dot{\mathrm{B}}_n(0)\dot{\sigma}(0) - \frac{1}{2}(\mathrm{B}_\alpha(0)\ddot{q}^\alpha(0) \\ + \mathrm{B}_n(0)\ddot{\sigma}(0)) + \frac{1}{2}\mathrm{C}_{nn}(0)(\dot{\sigma}(0))^2 + \frac{1}{2}\mathrm{C}_{\alpha\beta}(0)\dot{q}^\alpha(0)\dot{q}^\beta(0) \\ + \mathrm{C}_{n\alpha}(0)\dot{q}^\alpha(0)\dot{\sigma}(0), \widetilde{\mathrm{C}}_{\alpha\beta} = \mathrm{C}_{\alpha\beta}(0). \end{cases} \qquad (89)$$

Последние три уравнения дают начальные данные C(0). Указанную процедуру можно продолжать $u_{l(m)}$, $l = 0, 1, \dots$ $m = 0, 1, \dots, L(l)$. Так как данные для отраженной и преломленной амплитуд на границе раздела мы выразили через падающее поле (см. (85)), то мы можем выразить необходимые начальные данные через падающее поле. Например, можно показать, что

$$\begin{cases} u^{\mathrm{ref}}_{0(0)}(t) = \varrho(t)\mathcal{R}u^{\mathrm{in}}_{0(0)}(0), \\ u^{\mathrm{tr}}_{0(0)}(t) = \varrho(t)\mathcal{T}u^{\mathrm{in}}_{0(0)}(0). \end{cases}$$

4. Точное решение

Мы построили все члены КГП. Теперь покажем, что для любого N существует точное решение – гауссов пучок, соответствующее КГП порядка N. Итак, построили $U(\varepsilon; t, q, \sigma)$ – ФГП, $U_N(\varepsilon; t, q, \sigma)$ – КГП, соответствующий $U(\varepsilon; t, q, \sigma)$ и $\mathcal{U}_N(t, q, \sigma)$ – искомое точное решение задачи

$$\begin{cases} \square \mathcal{U}_N = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_- \bigcup \Omega_+, \\ \mathcal{U}^-_N|_\gamma = \mathcal{U}^+_N|_\gamma, \\ \sqrt{g^-}\frac{\partial}{\partial\sigma_-}\mathcal{U}^-_N|_\gamma = \sqrt{g^+}\frac{\partial}{\partial\sigma_+}\mathcal{U}^+_N|_\gamma. \end{cases} \tag{90}$$

Так как мы знаем только приближение U_N к искомому решению $\mathcal{U}_N$, рассмотрим χU_N – приближение к решению задачи (90):

$$\begin{cases} \square_{g_-}\chi(U^{\mathrm{in}}_N + U^{\mathrm{ref}}_N) = R^-_0 \quad \text{в} \quad \Omega_-, \\ \square_{g_+}(\chi U^{\mathrm{tr}}_N) = R^+_0 \quad \text{в} \quad \Omega_+, \\ \chi(U^{\mathrm{in}}_N + U^{\mathrm{ref}}_N)|_\gamma = \chi U^{\mathrm{tr}}_N|_\gamma + R_1, \\ \sqrt{g^-}\frac{\partial}{\partial\sigma_-}\chi(U^{\mathrm{in}}_N + U^{\mathrm{ref}}_N)|_\gamma = \sqrt{g^+}\frac{\partial}{\partial\sigma_+}\chi U^{\mathrm{tr}}_N|_\gamma + R_2. \end{cases} \tag{91}$$

Можно показать, что

$$R^-_0 < C^-_0(2t_0)\varepsilon^N M_\varepsilon, \quad R^+_0 < C^+_0(t_0)\varepsilon^N M_\varepsilon,$$

$$R_1 < C_1\varepsilon^{N+1} M_\varepsilon, \quad R_2 < C_2\varepsilon^N M_\varepsilon.$$

Полезное обозначение 3: Будем говорить, что функция ψ **полиномиально мала порядка** k, если $\|\psi\|_{C^k} \leqslant \varepsilon^k$.

Теперь последняя формула говорит, что R^-_0, R^+_0 полиномиально малы порядка $N - \frac{n}{4}$, R_1, R_2 полиномиально малы порядка $N + 1 - \frac{n}{4}$. Неоднородные граничные условия на γ заменим на однородные, введя новую функцию F в $\Omega_- \bigcup \Omega_+$. Для F получим следующую задачу

$$\begin{cases} \Box F = s \quad \text{в} \quad \Omega_+, \\ F|_\gamma = R_1, \\ \sqrt{g^+}\frac{\partial}{\partial\sigma_+}F|_\gamma = R_2. \end{cases} \tag{92}$$

Заметим, что F полиномиально мала порядка $N+1-\frac{n}{4}$ в $\Omega_- \bigcup \Omega_+$. Правая часть (92), то есть s тоже полиномиально мала порядка $N+1$. Функцию F можно выбрать такой

$$F = R_1(t,q)\big|_{\sigma=0}\widetilde{\chi}(\sigma) + \frac{R_2}{\sqrt{g_+}}\big|_{\sigma=0}\widetilde{\chi}(\sigma)\sigma.$$

Затем введем новую функцию

$$W_N = \begin{cases} W_N^- = \chi(U_N^{in} + U_N^{\text{ref}}) \ \text{ в } \ \Omega_-, \\ W_N^+ = F + \chi U_N^{tr} \ \text{ в } \ \Omega_+. \end{cases}$$

Получим задачу для W_N, а соответствующие условия непрерывности на границе раздела и тогда условия непрерывности на границе раздела выполнены:

$$\begin{cases} \Box W_N = \mathcal{E} = \begin{cases} \mathcal{E}^- \ \text{в} \ \Omega_-, \\ \mathcal{E}^+ \ \text{в} \ \Omega_+, \end{cases} \\ W_N^-|_\gamma = W_N^+|_\gamma, \\ \sqrt{g^-}\frac{\partial}{\partial\sigma}W_N^-|_\gamma = \sqrt{g^+}\frac{\partial}{\partial\sigma}W_N^+|_\gamma. \end{cases} \tag{93}$$

Здесь $\mathcal{E}^- < C_0^-(2t_0)\varepsilon^{(N-\frac{n}{4})}$, $\mathcal{E}^+ < C_0^+(t_0)\varepsilon^{(N-\frac{n}{4})}$, то есть $\mathcal{E}^-$ и $\mathcal{E}^+$ полиномиально малы порядка $N-\frac{n}{4}$. Решение задачи (93) W_N точно удовлетворяет условиям непрерывности (20). Заметим, что $\mathcal{E} \in C^{\alpha(N)}(t; L^2(\Omega_- \bigcup \Omega_+))$, то есть у $\mathcal{E}$ существует большое количество производных по времени со значениями класса L^2 во всей области ($\alpha(N) \to \infty$ при $N \to \infty$). Сравним теперь W_N с точным решением $\mathcal{U}_N$, выписанным формально, так как $\Box\mathcal{U}_N$ определен в смысле существования формы Дирихле (туда входят условия непрерывности)

$$\begin{cases} \Box\mathcal{U}_N = 0, \\ \mathcal{U}_N^-|_\gamma = \mathcal{U}_N^+|_\gamma, \\ \sqrt{g_-}\frac{\partial}{\partial\sigma_-}\mathcal{U}_N^-|_\gamma = \sqrt{g_+}\frac{\partial}{\partial\sigma_+}\mathcal{U}_N^+|_\gamma, \\ \mathcal{U}_N|_{-t_0} = U_N^{\text{in}}|_{-t_0}, \\ \partial_t\mathcal{U}_N|_{-t_0} = \partial_t U_N^{\text{in}}|_{-t_0}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \Box W_N = \mathcal{E}, \\ W_N^-|_\gamma = W_N^+|_\gamma, \\ \sqrt{g_-}\frac{\partial}{\partial\sigma_-}W_N^-|_\gamma = \sqrt{g_+}\frac{\partial}{\partial\sigma_+}W_N^+|_\gamma, \\ W_N|_{-t_0} = \chi U_N^{in}|_{-t_0}, \\ \partial_t W_N|_{-t_0} = \partial_t(\chi U_N^{\text{in}})|_{-t_0}. \end{cases}$$

Очевидно, что $\Box(\mathcal{U}_N - W_N) = -\mathcal{E}$. Обозначим разницу решений, пусть $-\mathcal{E} = \Box V$. Начальные данные совпадают (в области определения оператора Лапласа–Бельтрами $\mathcal{D}\big((\Delta_g)^q\big)$, $q > 2$. Наша задача линейна, рассмотрим решение:

$$V_N = \mathcal{U}_N - W_N : \quad \begin{cases} \Box V_N = \Box(\mathcal{U}_N - W_N) = -\mathcal{E}, \\ V_N|_{-t_0} = \partial_t V_N|_{-t_0} = 0, \\ V_N|_{(\partial\Omega_- \bigcup \partial\Omega_+)\bigcup[-t_0,t_0]} = 0. \end{cases} \tag{94}$$

Причем предполагаем, что в момент $t_0 > 0$ пучок еще не сталкивается с границей $\partial\Omega_- \bigcup \partial\Omega_+$.

4.0.1. Сходимость. Из построения следует, что правая часть уравнения (94) $\mathcal{E}$ мала на отрезке времени $[-t_0, t_0]$ со значениями из L^2. Все временные производные (большое количество) тоже из L^2 и малы.

Основная идея – оценить разницу V_N между точным решением и соответствующим ему найденным КГП. Выпишем ряд Фурье от V_N и $\mathcal{E}$ по собственным функциям $\Delta_g \varphi_k = \lambda_k \varphi_k$:

$$V_N(t, \mathbf{x}) = \sum v_k(t)\varphi_k(\mathbf{x}), \;\; v_k(-t_0) = \dot{v}_k(-t_0) = 0, \tag{95}$$

$$\mathcal{E}(t, \mathbf{x}) = \sum e_k(t)\varphi_k(\mathbf{x}). \tag{96}$$

Тогда

$$\Box V_N(t, \mathbf{x}) = \sum[\ddot{v}_k(t) + \lambda_k v_k(t)]\varphi_k(\mathbf{x}) = \sum e_k(t)\varphi_k(\mathbf{x}),$$

где так как $e_k(t)$ и все его производные по времени полиномиально малы, $\sum |\frac{\partial^p}{\partial t^p} e_k(t)|^2 < C_p(t_0)\varepsilon^L < \infty$, где $p \leqslant L = (N - p - \frac{n}{4})^2$, тогда

$$\ddot{v}_k(t) + \lambda_k v_k(t) = e_k(t),$$

и тогда

$$v_k(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{sin\sqrt{\lambda_k}(t - t^{'})}{\sqrt{\lambda_k}} e_k(t')dt', \tag{97}$$

Берем интеграл по частям, тогда

$$\frac{-1}{\lambda_k} \cos\sqrt{\lambda_k}(t - t')e_k(t')|_{\infty}^{t} + \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{1}{\lambda_k} \cos\sqrt{\lambda_k}(t - t')e_k'(t')dt' =$$

где $e_k(-\infty) = 0$,

$$= \frac{1}{\lambda_k} e_k(t)|_{-\infty}^{t} + \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_{-\infty}^{t} \cos\sqrt{\lambda_k}(t-t')e_k'(t')dt'.$$

Сначала рассмотрим второе слагаемое - интеграл, вводя новое обозначение подынтегральной функции:

$$\frac{1}{\lambda_k} \int\limits_{-\infty}^{t} \cos\sqrt{\lambda_k}(t-t')e_k'(t')dt' = \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_{-\infty}^{t} r(t,t^{'})dt'.$$

Оценим новую функцию

$$\sum r_k(t)\varphi_k(\mathbf{x}) = r(t),$$

пользуясь равенством Парсеваля : $\|r_k(t)\|^2 = \sum |r_k(t)|^2$, а затем неравенством Коши–Шварца, получим

$$|r_k(t)|^2 \leqslant \int\limits_{-t_0}^{t} \cos^2\sqrt{\lambda_k}(t-t') \int\limits_{-t_0}^{t} |e_k'(t')|^2 dt' < (t-t_0) \int\limits_{-t_0}^{t} |e_k'(t')|^2 dt'.$$

Из последнего следует неравенство

$$\|r_k(t)\|^2 \leqslant (t+t_0) \int\limits_{-t_0}^{t} \sum |e_k'(t')|^2 dt' =$$

(здесь $\sum |e_k'(t')|^2$ положительное, а потому меняем знак, это все – L^2–норма на $\mathcal{E}$)

$$= (t+t_0) \int\limits_{-t_0}^{t} \|\mathcal{E}(t')\|' dt' \leqslant 2t_0 \int\limits_{t_0}^{t} \|\mathcal{E}(t')\|_{L^2}^2 dt' := E,$$

где $\|\mathcal{E}(t')\|_{L^2}$ полиномиально мало, порядка $(N - \frac{n}{4})$. Оценим первое слагаемое: так как $\frac{-1}{\lambda_k} e_k(t)$ из $H^1 \bigcap \mathcal{D}(\Delta_g)$, для любых t

$$\sum \lambda_k^2 |v_k(t)|^2 = \sum |e_k|^2 + E < \infty. \qquad (98)$$

Показали, что $v_k(t)$ мало в норме H^1. Рассмотрим $\dot v_k(t)$:

$$\dot v_k = \int\limits_{-\infty}^{t} \cos\sqrt{\lambda_k}(t-t')e_k(t')dt' = -\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{-\infty}^{t} \sin\sqrt{\lambda_k}(t-t')e_k'(t')dt', \tag{99}$$

$$\sum |\dot v_k(t)|^2 \asymp \widetilde{C}(t)\int \frac{|e_k'(t')|^2dt'}{\lambda_k} < \infty. \tag{100}$$

Неравенство (98) говорит о том, что $\Delta V_N \in L^2$, и, соответственно, $V_N \in \mathcal{D}(\Delta_g)$. Функцию $\mathcal{E}$ можно дифференцировать по времени и, аналогично неравенству (100) можно оценить временные производные V_N. В частности, из (100) следует, что $V_t' \in L^2$. Полученный результат можно записать в следующем виде:

$$V_N \in C^{p(N)}([-t_0,t_0],\mathcal{D}(\Delta_g)),\ p(N) = \alpha(N)+1 \geqslant 1. \tag{101}$$

Мы доказали третье утверждение теоремы 1.

4.1. Заключение.

В разделах (2), (3) построены фазовые и амплитудные функции гауссовых пучков типа квазифотон для падающего, отраженного и преломленного волновых полей вблизи границы раздела γ.

Падающее поле считаем известным ($f^0, V^0, \Gamma_0, \Theta^0, M_0, -t_0$ (5), (6)). Используем его след на границе раздела и из условий непрерывности и уравнений Гамильтона–Якоби строим отраженное и преломленное поле в виде формального разложения, так, что однородные полиномы, входящие в это разложения, удовлетворяют всем условиям для того, чтобы построенный ряд был ФГП. Обрезаем полученные формальные ряды до порядка N и показываем, что для любого N существует точное решение волнового уравнения, асимптотически близкое к построенному КГП.

Можно выписать аналог результата теоремы 3.19 из [5] квазифотонов, распространяющихся от границы раздела по геодезическим, не являющихся нормальными к γ. Соответствующие им геодезические $\mu^{\mathrm{ref,tr}}(t)$ такие, что направляющий косинус в M_0

$$\cos\varphi^{ref,tr}|_{t=0} = \dot\sigma_{\mathrm{ref,tr}}(0) \geqslant 0.$$

Фазовая функция $\Theta_N^{\mathrm{ref,tr}}$ и амплитудная функция $\sum^{N} u_l^{\mathrm{ref,tr}}$ на γ удовлетворяют (68). Каждый член их, как однородный полином, является решением ОДУ (24), (27) по времени с учетом найденных нами начальных данных.

Автор выражает благодарность проф. Курылеву Я. В. за постановку задачи, за внимание и научное руководство в процессе работы над статьей и докт. физ.-матем. наук Качалову А. П. за ряд ценных замечаний.

Литература

1. В. Бабич, В. Улин, *Комплексный пространственно-временной метод и квазифотоны.* - Зап. науч. семин. ПОМИ, **117**, (1981), 5–12.
2. В. Бабич, В. Булдырев, И. Молотков, *The space-time Ray Method Linear and Nonlinear waves. (Russian), Leningrad Univ., Leningrad, 1985. 272 pp.*
3. А. Качалов, *Гауссовы пучки, уравнения Гамильтона–Якоби и финслерова геометрия.* — Зап. науч. семин. ПОМИ, **297**, (2003), 66–92.
4. А. Качалов, *Система координат при описании "квазифотона".* — Зап. науч. семин. ПОМИ, **140**, (1984), 73–76.
5. A. P. Katchalov, Ya. V. Kurylev, and M. Lassas, *Inverse Boundary Spectral Problems.* Chapman Hall / CRC **123** (2001).
6. M. M. Popov, *Ray Theory and Gaussian Beam Method for Geophysicists.* Edufba, Salvator-Bahia (2002).
7. J. Ralston, *Gaussian beams and propagation of singularities.* Studies in PDE, MAA Studies in Mathematics, **23**, Walter Littman ed. (1983).

Kirpichnikova A. S. The behaviour of the Gaussian beam in the anisotropic medium with an interface.

We consider a region which consists of two parts with anisotropic Riemannian metrics. The metric has a jump on the interface. The reflected and transmitted from the interface asymptotic solutions to the wave equation - Gaussian beams (quasiphotons) are constructed.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 3 июня 2005 г.