Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 324, 2005 г.

О. В. Изотова, С. А. Назаров

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СИНЬОРИНИ О БАЛКЕ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ЖЕСТКИХ ОПОРАХ

1. Задача Синьорини для тонкой балки. Пусть Ω_h – двумерная балка $\big\{x \in \mathbb{R} : |x_1| < L,\, 0 < x_2 < h\big\}$, где L – полудлина балки, а h – ее толщина. Отношение h/L считаем малым, так что после масштабирования $L = 1$, а $h \in (0,1]$ – малый безразмерный параметр. Уравнения равновесия балки имеют вид

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{j1}(u;h,x)-\frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{j2}(u;h,x) = f_j(h,x), \quad x \in \Omega_h, \quad j = 1,2, \tag{1}$$

где $f = (f_1, f_2)$ – вектор массовых сил, σ_{jk} – декартовы компоненты тензора напряжений,

$$\sigma_{jk}(u) = \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) + \lambda\delta_{j,k}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right).$$

При этом $\lambda \geqslant 0$ и $\mu > 0$ – коэффициенты Ламе, а $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера. Торцы балки $\Gamma_h^{\pm} = \{x : x_1 = \pm 1,\ x_2 \in (0,h)\}$ жестко защемлены, а к верхнему основанию $\Sigma^+ = \big\{x : x_2 = h, |x_1| < 1\big\}$ приложена нагрузка $g = (g_1, g_2)$, т.е. выполнены краевые условия

$$\begin{aligned} &u(h,x) = \big(u_1(h,x), u_2(h,x)\big) = 0, \qquad x \in \Gamma_h^{\pm};\\ &\sigma_{j2}(u;h,x) = g_j(h,x_1), \qquad x \in \Sigma^+, \quad j = 1,2. \end{aligned} \tag{2}$$

Нижнее основание может контактировать без трения с жестким профилем $\big\{x : x_2 = -h^{-2}\varphi(x_1)\big\}$, где φ – неотрицательная функция. Таким образом, на сегменте $\Sigma^- = \{x : x_1 = 0, |x_2| < 1\}$ ста-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03–01–00835).

вятся односторонние связи (условия Синьорини)

$$\begin{gathered}\sigma_{12}(u;h,x)=0,\quad x\in\Sigma^-,\\ u_2(h,x_1,0)\geqslant -h^{-2}\varphi(x_1),\\ \sigma_{22}(u;h,x_1,0)\leqslant 0,\\ \sigma_{22}(u;h,x_1,0)\Big(u_2(h,x_1,0)+h^{-2}\varphi(x_1)\Big)=0,\quad x_1\in(-1,1).\end{gathered}\tag{3}$$

Будем считать, что φ – кусочно гладкая функция, непрерывная вместе со своей производной. Кроме того,

$$\varphi(x_1)>0,\ x_1\in\big(l_-,l_+\big),\quad \varphi(x_1)=0,\ x_1\in[-1,l_-]\cup[l_+,1],\tag{4}$$

а односторонние вторые производные удовлетворяют неравенству

$$\varphi''(l_\pm\mp 0)=k_\pm>0.\tag{5}$$

Множитель h^{-2} в неравенстве $(3)_2$ согласован с нормировками правых частей уравнений (1) и краевых условий $(2)_2$, удобными и поэтому принятыми в теории тонких пластин и стержней (см. например [1]):

$$\begin{gathered}f_1(h,x)=h^{-1}f_1^0(x_1,\zeta),\quad f_2^0(h,x)=f_2^0(x_1,\zeta),\\ g_1(h,x_1)=g_1^0(x_1),\quad g_2(h,x_1)=hg_2^0(x_1).\end{gathered}\tag{6}$$

Здесь f_i^0 и g_i^0 – непрерывные функции на прямоугольнике $[-1,1]\times[0,1]$ и отрезке $[-1,1]$ соответственно, $i=1,2$, а $\xi=h^{-1}x_2$ – быстрая переменная, изменяющаяся в пределах от 0 до 1.

Поскольку сформулированная задача Синьорини положительно линейна, умножение правых частей соотношений (1)–(3) и (4) на общую степень h^N малого параметра не сказывается на структуре зоны контакта – решением преобразованной задачи служит произведение $h^N u(h,x)$. Это обстоятельство позволяет производить перенормировку данных задачи при сохранении строения асимптотического анзаца для ее решения.

В силу формул (6) и $(3)_2$, (4) усилия, приложенные к балке в продольном направлении, имеют единичный порядок и в поперечном – порядок h, а жесткий профиль очень круто уходит вниз от линии уровня $\{x:x_2=0\}$. Различие нормирующих коэффициентов в выражениях (6) отражает известный факт: балку легче изогнуть, чем растянуть.

2. Асимптотический анализ задачи Синьорини. Известно (см., например, [2–4] и др.), что задача Синьорини (1)–(3) формулируется как вариационное неравенство на выпуклом конусе $\mathbb{K}$ в пространстве Соболева $H^1(\Omega_h)^2$;

$$\mathbb{K} = \left\{ u = (u_1, u_2) \in H^1(\Omega_h)^2 : \, u = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_h^{\pm}, \quad u_2 \geqslant -\varphi_1 \ \text{ на } \ \Sigma^- \right\}.$$

Такая формулировка позволяет доказать однозначную разрешимость задачи при любых правых частях

$$f = (f_1, f_2) \in L_2(\Omega_h)^2, \quad g = (g_1, g_2) \in L_2(\Sigma^+)^2.$$

Целью данной работы является асимптотический анализ решения задачи (1)–(3). Асимптотика решений вариационных неравенств, в частности, контактных задач линейной теории упругости, проводилась в статьях [5–9] и др. Наиболее трудоемким обычно оказывается определение зоны контакта – она неизвестна заранее и находится лишь в результате решения всей задачи. Далее будет получена формальная асимптотика положения точек $P^{\pm}(h)$ отрыва балки Ω_h от жесткого основания.

Поскольку балка тонкая, главный член асимптотики решения $u(h, x)$ описывается при помощи одномерных уравнений Кирхгофа на интервалах $T^+(h) = (-1, l_-(h))$, $T^-(h) = (l_+(h), 1)$ и $T^0(h) = (l_-(h), l_+(h))$, где $l_{\pm}(h)$ – абсцисса точки $P^{\pm}(h)$. На интервалах $T^{\pm}(h)$ подразумевается контакт балки с основанием, означающий отсутствие изгиба балки, и поэтому модели Кирхгофа отвечает одно уравнение второго порядка. На интервале $T^0(h)$ изгиб балки возможен, а значит, модель Кирхгофа состоит из двух уравнений второго и четвертого порядков. Вывод этих уравнений следует известной схеме (см., например, [1, гл. 1]) и кратко изложен в разделе 2.

В соответствии с условиями защемления $(2)_1$ упомянутые уравнения снабжаются граничными условиями Дирихле в точках $x_1 = \pm 1$. Основная часть статьи посвящена определению условий сопряжения, которые требуются в точках $x_1 = l_{\pm}(h)$. С этой целью вводятся новые переменные (20) и исследуется явление пограничного слоя, который описывается при помощи решений смешанной краевой задачи (21) в полосе. Исследование всевозможных решений с полиномиальным ростом на бесконечности составляет предмет четвертого раздела. Неожиданным оказалось то, что при помощи дифференцирования вдоль разреза и интегрирования по частям в специальных областях удалось обнаружить априорные связи между коэффициентами в разложениях решений на бесконечности и коэффициентами интенсивности напряжений (множителями при сингулярных составляющих упругих полей в точке смены типа краевого условия; см. раздел 5). В результате оказывается, что все искомые коэффициенты выражаются через два, но последние могут быть найдены только после полного решения модельной задачи.

Заключительные два раздела посвящены собственно асимптотическому анализу. Именно, проводится сращивание асимптотических разложений решения, полученных для различных зон, и вычисляются значения коэффициентов интенсивности напряжений в зависимости от положения точек отрыва пластины от основания. Последнее как раз и позволяет определить положение точек отрыва балки от жесткого основания: согласно известному принципу в механике контактирующих тел, предложенному в [10] и математически обоснованному в [11, 7, 12], коэффициенты интенсивности должны обратится в нуль.

3. Основные члены асимптотики. Пусть $l_\pm = l_\pm(0)$. На интервалах $T_- = (-1, l_-), T_+ = (l_+, 1)$ и $T_0 = (l_-, l_+)$ изменения координаты x_1 принимаем следующие анзацы:

$$u(h,x) = h^{-2}U^{-2}(x_1) + h^{-1}U^{-1}(x_1,\zeta) + h^0U^0(x_1,\zeta) + \dots, \quad x_1 \in T_0,$$

$$u(h,x) = h^{-1}U^{-1}(x_1) + h^0U^0(x_1,\zeta) + h^1U^1(x_1,\zeta) + \dots, \quad x_1 \in T_\pm. \tag{7}$$

Как уже пояснялось в разделе 2, анзацы $(7)_1$ и $(7)_2$ различаются потому, что почти на всем участке $T_\pm$ предполагается контакт и балка не прогибается, а на участке T_0, кроме малых окрестностей концов, контакта с жестким профилем нет и прогиб балки допустим.

Подставим анзацы (7) в уравнение (1), а также в краевые условия $(2)_2$ и

$$\sigma_{22}(u; h, x_1, 0) = 0, \quad x_1 \in T_0. \tag{8}$$

Соберем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра h и получим рекуррентную последовательность краевых задач на сечении балки. Поскольку балка не соприкасается с жестким профилем внутри интервала T_0 (именно поэтому возникло краевое условие (8), унаследованное от $(3)_4$), результаты решения этой последовательности задач такие же, как и в случае свободной балки (ср. [1, гл. 1]). Ненулевые компоненты членов анзаца $(7)_1$ имеют вид

$$
\begin{gathered}
U_2^{-2}(x_1) = w_2(x_1), \quad U_1^{-1}(x_1) = w_1(x_1) - \left[\zeta - \frac{1}{2}\right] \partial_1 w_2(x_1), \\
U_2^0(x_1,\zeta) = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left[\zeta - \frac{1}{2}\right]\partial_1 w_1(x_1) + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\zeta^2}{2} - \frac{\zeta}{2} - \frac{1}{12}\right]\partial_1^2 w_2(x_1), \\
U_1^1(x_1,\zeta) = \mathbf{U}_1(x_1,\zeta) + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\zeta^2}{2} - \frac{\zeta}{2} - \frac{1}{12}\right]\partial_1^2 w_1^0(x_1) + \\
+\frac{1}{6}\left\{\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}\left[\zeta - \frac{1}{2}\right]^3 - \frac{1}{4}\frac{11\lambda+12\mu}{\lambda+2\mu}\left[\zeta - \frac{1}{2}\right]\right\}\partial_1^3 w_3^0(x_1),
\end{gathered} \tag{9}
$$

где $\partial_i = \partial/\partial x_i$, а $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, 0)^\top$ – решение предельной задачи на сечении балки

$$
\begin{gathered}
L^0\mathbf{U} = f_1^0 e_1 + \mu\,\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}\partial_1^2 w_1 \quad \text{при} \quad \zeta \in (0,1), \\
B^0\mathbf{U} = g_1^0 e_1 + \frac{\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\partial_1^2 w_1 \quad \text{при} \quad \zeta = 1, \\
B^0\mathbf{U} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 0,
\end{gathered} \tag{10}
$$

существующее при условии

$$
\begin{gathered}
-4\mu\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\partial_1^2 w_1(x_1) = F_1(x_1), \quad x_1 \in T_0; \\
F_1(x_1) = \int_0^1 f_1^0(x_1,\zeta)d\zeta + g_1^0(x_1).
\end{gathered} \tag{11}
$$

В левых частях (10) $L^0(\partial_\zeta)$ и $B^0(\partial_\zeta)$ – 2×2-матрицы дифференциальных операторов

$$
\begin{gathered}
L^0(\partial_\zeta) = -\operatorname{diag}\{\mu\partial_\zeta^2, (\lambda+2\mu)\partial_\zeta^2\}, \\
B^0(\partial_\zeta) = \operatorname{diag}\{\mu\partial_\zeta, (\lambda+2\mu)\partial_\zeta\},
\end{gathered}
$$

а e_i – орт оси x_i.

Равенство (11) является дифференциальным уравнением для определения неизвестной функции w_1. Еще одно такое уравнение для другой неизвестной функции w_2 возникает при определении следующего члена U^2 анзаца $(9)_1$ и выглядит так:

$$
\begin{gathered}
m_2 \partial_1^4 w_2(x_1) = F_2(x_1) \quad \text{при} \quad x_1 \in T_0; \\
F_2(x_1) = \int\limits_0^1 f_2(x_1,\zeta)\, d\zeta + g_2^0(x_1) + \\
+ \frac{\partial}{\partial x_1}\left\{ \int\limits_0^1 \left(\zeta - \frac{1}{2}\right) f_1(x_1,\zeta)\, d\zeta + \frac{1}{2}\, g_1^0(x_1)\right\}.
\end{gathered} \tag{12}
$$

Множитель m_2 вычисляется по формуле

$$
m_2 = \frac{\mu}{2}\int\limits_0^1 \left(\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}\left[\zeta - \frac{1}{2}\right]^2 - \frac{1}{12}\frac{11\lambda+12\mu}{\lambda+2\mu}\right) d\zeta = \frac{1}{3}\,\mu\,\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}.
$$

По той же схеме определяются члены анзаца $(7)_2$ на участках контакта $T^{\pm}$. На соответствующих частях верхнего и нижнего оснований балки выполняются краевые условия $(2)_2$ и $(3)_1$, а также условие

$$
u_2(h, x_1, 0) = 0, \tag{13}
$$

вытекающее из соотношений $(3)_2$ и (4). Ввиду условия Дирихле (13) положим $w_2 = 0$ и тем самым упростим формулы (9):

$$
\begin{gathered}
U_1^{-1}(x_1) = w_1(x_1), \quad U_2^0(x_1,\zeta) = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\,\zeta\partial_1 w_1(x_1), \\
U_1^1(x_1,\zeta) = \mathbf{U}_1(x_1,\zeta) + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\zeta^2}{2} - \frac{1}{6}\right]\partial_1^2 w_1^0(x_1).
\end{gathered} \tag{14}
$$

Здесь $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, 0)^\top$ – решение задачи на сечении балки

$$
\begin{gathered}
L^0\mathbf{U} = f_1^0 e_1 + \mu\,\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}\partial_1^2 w_1 \quad \text{при} \quad \zeta \in (0,1), \\
B^0\mathbf{U} = g_1^0 e_1 + \frac{\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\partial_1^2 w_1 \quad \text{при} \quad \zeta = 1, \\
\mathbf{U}_2 = 0, \quad \mu\partial_\zeta \mathbf{U}_1 = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 0,
\end{gathered} \tag{15}
$$

которая разрешима при условии

$$
-4\mu\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\partial_1^2 w_1(x_1) = F_1(x_1), \quad x_1 \in T_{\pm}. \tag{16}
$$

Справа в (16) стоит функция, определенная равенством $(11)_2$, а в (15) использованы те же обозначения, что и в (10).

При построении асимптотики $(7)_2$ были приняты во внимание уравнения (1), краевые условия $(2)_2$, $(3)_1$ и соотношения $(3)_2$, (4), приведшие к условиям Дирихле (13) в зоне контакта. Не было учтено неравенство $(3)_3$, означающее, что реакция опоры направлена в сторону балки. Следующее утверждение показывает, что это неравенство можно обеспечить за счет требований, предъявленных непосредственно к правым частям задачи (1)–(3).

Лемма. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\sigma_{22}(\, h^{-1}U^{-1} + U^0 + h^1U^1 + h^2U^2\,; x_1, 0) \approx h\, F_2(x_1), \quad x_1 \in T_\pm. \quad (17)$$

где F_2 – *функция* $(12)_2$.

Доказательство. Несмотря на то, что в левой части (17) фигурирует член h^2U^2, не понадобившийся в $(7)_1$, можно обойтись без его построения. Используя уравнения равновесия (1), краевые условия $(2)_2$ и представления (6), получаем при $x_1 \in T_\pm$ цепочку равенств

$$\sigma_{22}(u;h,x_1,0) = \sigma_{22}(u;h,x_1,h) - \int\limits_0^h \frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{22}(u;h,x)\,dx_2 =$$

$$= g_2(h,x_1) \;+ \int\limits_0^h \Big(f_2(h,x) + \frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{21}(u;h,x)\Big)\,dx_2 =$$

$$= h\Big\{ \int\limits_0^1 f_2^0(x_1,\zeta)\,d\zeta + g_2^0(x_1) \Big\} + \frac{\partial}{\partial x_1} \int\limits_0^h \sigma_{21}(u;h,x)\,dx_2 =$$

$$= h\Big\{ \int\limits_0^1 f_2^0(x_1,\zeta)\,d\zeta + g_2^0(x_1) \Big\} - \frac{\partial}{\partial x_1} \int\limits_0^h x_2\,\frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{21}(u;h,x)\,dx_2 +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_1}\,\sigma_{21}(u;h,x_1,h) =$$

$$= h\Big\{ \int\limits_0^1 f_2^0(x_1,\zeta)\,d\zeta + g_2^0(x_1) + \frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_0^1 \zeta\, f_1^0(x_1,\zeta)\,d\zeta + \frac{\partial}{\partial x_1}\,g_1^0(x_1) \Big\} +$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\int\limits_0^h x_2\,\sigma_{11}(u;h,x)\,dx_2.$$

Асимптотика последнего интеграла вычисляется при помощи формул $(7)_2$, $(14)_1$, согласно которым подынтегральное выражение имеет вид

$$x_2\left(h^{-1}(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial\zeta}u_2(h,x)+\lambda\frac{\partial}{\partial x_1}u_1(h,x)\right)\approx\zeta\,4\mu\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial}{\partial x_1}w_1(x_1).$$

Теперь формула (17) вытекает из уравнения (16) и определений $(11)_2$, $(12)_2$. ⊠

Далее всегда предполагаем, что верны неравенства

$$F_2(x_1)>0,\quad x_1\in T_\pm, \tag{18}$$

которые в согласии с леммой обеспечивают выполнение условия Синьорини $(3)_3$ конгломератом $(7)_2$ асимптотических членов.

Замечание. Обращаем внимание на то, что в (9) все слагаемые, за исключением "постоянных" $w_1(x_1)$ и $w_2(x_1)$, обладают нулевым средним по переменной $\zeta\in(0,1)$. Именно этим объясняется появление множителей $\zeta-1/2$ и $1/2$ в фигурных скобках из правой части (11). В (14) указанная нормировка не применялась. Тем не менее, формулы (9) и (11) имеют одинаковое происхождение, так как в соответствии с краевыми условиями $(15)_3$ можно перейти к рассмотрению симметрично загруженной пластины толщиной $2h$ и распространить задачу $(9)_{1,2}$ на интервал $(-1,1)\ni\zeta$, продолжив f_1^0, $\mathbf{U}_1$ по четности, а $\mathbf{U}_2$ – по нечетности. После таких продолжений все слагаемые из (14), кроме $w_1(x_1)$, приобретают нулевое среднее относительно $\zeta\in(-1,1)$. ⊠

Уравнения $(11)_1$, $(12)_1$ и (16) нуждаются в граничных условиях и условиях сопряжения, связывающих их в единую задачу. Граничные условия

$$w_1(\pm1)=0 \tag{19}$$

получаются в результате подстановки анзаца $(7)_2$, уточненного формулами (14), в условия Дирихле (2) на защемленных торцах балки. Посредством условия (19) уничтожается главный член невязки в упомянутых краевых условиях, а остальные члены компенсируются при помощи решений типа пограничного слоя, экспоненциально затухающего при удалении от точек $x_1=\pm1$ (подробности см. в [1, §1.3]). Условия сопряжения в точках $x_1=l_\pm$

также находятся при помощи построения пограничного слоя, который изучается в очередном разделе.

4. Предельная задача в полосе и асимптотика ее решений на бесконечности. Вблизи концов интервала T_0 возникает явление пограничного слоя, позволяющее, в частности, найти асимптотически положение точек $P^{\pm}(h) = (P_1^{\pm}(h), 0)$, в которых происходит отрыв пластины от основания. Произведем растяжение координат

$$x \mapsto \xi^{\pm} = (\xi_1^{\pm}, \xi_2^{\pm}) = h^{-1}(x_1 - P_1^{\pm}(h), x_2), \tag{20}$$

считая координату $P_1^{\pm}(h)$ известной. Поскольку левая и правая точки обрабатываются одинаково, рассматриваем только $P^{+}(h)$ и далее не пишем индекс $+$ в обозначениях.

После замены (20) и формального перехода к $h = 0$, получаем следующую задачу в полосе $\Pi = \{\xi : \xi_1 \in \mathbb{R}, \xi_2 \in (0,1)\}$:

$$\begin{gathered} -\partial_1 \sigma_{j1}(v;\xi) - \partial_2 \sigma_{j2}(v;\xi) = 0, \quad \xi \in \Pi; \quad j = 1,2, \\ \sigma_{j2}(v;\xi_1,1) = 0, \quad \sigma_{12}(v;\xi_1,0) = 0, \quad \xi_1 \in \mathbb{R}, \\ \sigma_{22}(v;\xi_1,0) = 0, \quad \xi_1 < 0, \quad v_2(\xi_1,0) = \psi(\xi_1), \quad \xi_1 > 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Здесь ψ – некоторая функция с компактным носителем (см. далее формулу (43)).

Помимо частного решения v_0 задачи (21) далее понадобятся решения однородной задачи с полиномиальным поведением на бесконечности. Известно (см., например, [13]), что для упомянутых решений справедливы асимптотические представления на бесконечности

$$\begin{aligned} v(\xi) &= \sum_{j=0}^{2} \sum_{k=0}^{2j-1} c_{jk} V^{jk}(\xi) + \dots, \quad \xi_1 \to -\infty, \\ v(\xi) &= c_0 V^{10} + c_1 V^{11}(\xi) + \dots, \quad \xi_1 \to +\infty. \end{aligned} \tag{22}$$

При этом c_{jk} и c_m – постоянные, многоточием обозначены экспоненциально затухающие составляющие, а список специальных решений V^{jk} выглядит так:

$$V^{1,0}(\xi) = (1,0), \quad V^{1,1}(\xi) = \left(\xi_1, -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\xi_2\right),$$

$$V^{2,0}(\xi) = (0,1), \quad V^{2,1}(\xi) = \left(-\left[\xi_2 - \frac{1}{2}\right], \xi_1\right),$$

$$V^{2,2}(\xi) = \Big(- \Big[\xi_2 - \frac{1}{2}\Big]\, \xi_1, \frac{1}{2}\,\xi_1^2 + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\Big[\frac{\xi_2^2}{2} - \frac{\xi_2}{2} - \frac{1}{12}\Big]\Big),$$

$$V^{2,3}(\xi) = \Big(- \frac{1}{2}\Big[\xi_2 - \frac{1}{2}\Big]\,\xi_1^2 + \frac{1}{6}\Big\{\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}\Big[\xi_2 - \frac{1}{2}\Big]^3 - $$

$$ - \frac{1}{4}\frac{11\lambda+12\mu}{\lambda+2\mu}\Big[\xi_2 - \frac{1}{2}\Big]\Big\},$$

$$\frac{1}{6}\xi_1^3 + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\xi_1\Big[\frac{\xi_2^2}{2} - \frac{\xi_2}{2} - \frac{1}{6}\Big]\Big). \tag{23}$$

Подчеркнем, что поля $(23)_1$ получены подстановкой величин $w_1(\xi_1) = 1$ и $w_1(\xi_1) = \xi_1$ в анзац $(7)_2$, где $h = 1$, вместо переменных (x_1, ζ) взяты (ξ_1, ξ_2), а выражения U^p определены согласно $(14)_1$. Аналогично формулы $(7)_1$ и (9) с одночленами $w_2(\xi_1) = (q!)^{-1}\xi_1^q$ и $w_1 = 0$ доставляют поля $(23)_{2,3,4}$.

В [13] установлено следующее утверждение.

Предложение. *Однородная* ($\psi = 0$) *задача* (21) *имеет в точности* $4 = \dfrac{1}{2}(4+2+2)$ *линейно независимых решений. Числа* 4, 2 *и* 2 *в последней формуле связываются с количеством полиномов* V^{jk} *и* V^{1k}, *фигурирующих в разложениях* $(22)_1$ *и* $(22)_2$.

Два решения $Z^{p,q}$ однородной задачи (21) очевидны:

$$Z^{1,0}(\xi) = e_1, \quad Z^{1,1}(\xi) = V^{1,1}(\xi). \tag{24}$$

Еще два решения $Z^{2,0}$ и $Z^{2,1}$, упомянутые в предложении, не заданы явными формулами, но их поведением на бесконечности:

$$\begin{gathered} Z^{2,j}(\xi) = V^{2,2+j}(\xi_1) + b_{j0}V^{2,0} + b_{j1}V^{2,1}(\xi_1) + \dots, \quad \xi_1 \to -\infty, \\ Z^{2,j}(\xi) = \dots, \quad \xi_1 \to +\infty. \end{gathered} \tag{25}$$

Здесь $j = 0, 1$, а b_{j0} – постоянные, зависящие от коэффициентов Ламе λ и μ.

Кроме того, далее понадобятся коэффициенты интенсивности напряжений K_j для полей $Z^{2,j}$ в точке смены типа краевого условия $\mathcal{O} = (0,0)$ (см. $(21)_2$ и $(22)_3$). Именно, справедливы разложения

$$Z^{2,j}(\xi) = c_j e_1 + K_j \rho^{1/2}\Phi(\varphi) + O(\rho), \quad \rho \to 0, \tag{26}$$

где (ρ, φ) – полярные координаты с центром $\mathcal{O}$, $\rho = |\xi|$, $\varphi \in (0, \pi)$, а Φ – угловая часть с полярными компонентами:

$$\Phi_r(\varphi) = a\Big(3\sin\frac{3}{2}\varphi - (2\varkappa - 1)\sin\frac{1}{2}\varphi\Big),$$

$$\Phi_\varphi(\varphi) = a\Big(3\cos\frac{3}{2}\varphi - (2\varkappa + 1)\cos\frac{1}{2}\varphi\Big);$$

$$\varkappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{4\mu}.$$

5. Связи между коэффициентами b_{jk} и K_j. Подставим решения $Z^{2,0}$ и $Z^{2,1}$ в формулу Грина для "длинного" прямоугольника $\Pi_R = (0,1) \times (-R, R)$. Учитывая уравнения $(21)_1$ и однородные краевые условия $(21)_{2,3}$, получаем равенство

$$Q(Z^{2,0}, Z^{2,1}; -R) = Q(Z^{2,0}, Z^{2,1}; R), \tag{27}$$

где через $Q(\dots)$ обозначен интеграл по сечению полосы

$$Q(Z, Y; \xi_1) = \sum_{p=1}^{2} \int\limits_0^1 \Big(\sigma_{p1}(Z;\xi)Y_p(\xi) - \sigma_{p1}(Y;\xi)Z_p(\xi)\Big)\, d\xi_2. \tag{28}$$

В силу соотношения $(25)_2$ левая часть (27) экспоненциально мала при $R \to +\infty$ и поэтому равна нулю, так как не зависит от R в силу формулы Грина. Следовательно,

$$Q(Z^{2,0}, Z^{2,1}; \xi_1) = 0 \qquad \forall \quad \xi_1 \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что при дифференцировании по переменной ξ_1 степенное решение $X(\xi) = \rho^{1/2}\Phi(\varphi)$ модельной задачи в полуплоскости остается степенным решением, но приобретает сингулярность $O(\rho^{-1/2})$ в смещениях. Именно, выполняется соотношение (см., например, [13, гл. 7])

$$\partial_1 X(\xi) = -\alpha Y(\xi_1), \tag{29}$$

где $\partial_1 = \partial/\partial\xi_1$, $\alpha = 2\mu(\lambda + \mu)(l + \mu)^{-1}$, а $Y(\xi_1) = \rho^{-1/2}\Psi(\varphi)$ – степенное решение с угловыми частями

$$\Psi_r(\varphi) = b\Big(\sin\frac{1}{2}\varphi - (2\varkappa + 1)\sin\frac{3}{2}\varphi\Big),$$

$$\Psi_\varphi(\varphi) = b\Big(\cos\frac{1}{2}\varphi - (2\varkappa - 1)\cos\frac{3}{2}\varphi\Big);$$

$$b = -\frac{1}{\sqrt{8\pi}} \frac{1}{1+\varkappa}.$$

Кроме того, нетрудно убедится в справедливости равенства

$$q(X, Y; \delta) := \sum_{j,k=1}^{2} \int_0^{\pi} \xi_j \Big(\sigma_{jk}(X) Y_k - \sigma_{jk}(Y) X_k \Big) \Big|_{r=\delta} \, d\varphi = \frac{1}{2}. \tag{30}$$

Благодаря соотношениям (26) и (29) производные специальных решений приобретают такие представления около точки $\mathcal{O}$:

$$\partial_1 Z^{2,j}(\xi) = -\alpha K_j \rho^{-1/2} \Psi(\varphi) + O(1), \quad \rho \to 0. \tag{31}$$

Из соотношений (23) и (25) выводим, что

$$\partial_1 Z^{2,0}(\xi) = V^{2,1}(\xi) + b_{01} V^{2,0} + \dots, \quad \xi_1 \to -\infty,$$

$$\partial_1 Z^{2,1}(\xi) = V^{2,2}(\xi) + b_{11} V^{2,0} + \dots, \quad \xi_1 \to -\infty,$$

$$\partial_1 Z^{2,j}(\xi) = \dots, \quad \xi_1 \to +\infty.$$

Теперь подставим поля $Z^{2,0}$ и $\partial_1 Z^{2,0}$ в формулу Грина для прямоугольника Π_R с вырезанным полукругом, имеющим радиус $\delta > 0$ и центр $\mathcal{O}$. Благодаря тому, что обе функции удовлетворяют системе уравнений $(21)_1$ и однородным краевым условиям $(21)_{2,3}$, исчезают все интегралы, кроме интегралов по сечениям $\{\xi \in \Pi : \xi_1 = \pm R\}$ и по полуокружности. В итоге приходим к тождеству

$$Q(Z^{2,0}, \partial_1 Z^{2,0}; -R) + q(Z^{2,0}, \partial_1 Z^{2,0}; \delta) = Q(Z^{2,0}, \partial_1 Z^{2,0}; R). \tag{32}$$

Используя соотношения (26), (31), (30) и (25), (23), обнаруживаем, что

$$\frac{\mu(\lambda+\mu)}{3(\lambda+2\mu)} + o(1) = Q(Z^{2,0}, \partial_1 Z^{2,0}; R)$$

$$= -q(Z^{2,0}, \partial_1 Z^{2,0}; \delta) + o(1) = \alpha K_0^2 q(X, Y; \delta) + o(1) = \frac{\alpha}{2} K_0^2 + o(1).$$

Переходя к пределу при $R \to +\infty$ и $\delta \to +0$, получаем равенство

$$K_0^2 = 1/3. \tag{33}$$

Еще два равенства

$$b_{11} = -\frac{1}{30}\frac{11\lambda + 12\mu}{\lambda + 2\mu} - b_{00},$$
$$K_1^2 = -\frac{2}{3}b_{11} - \frac{1}{90}\frac{11\lambda + 12\mu}{\lambda + 2\mu} \tag{34}$$

возникают при подстановке в формулу Грина пар полей Z^1, $\partial_1 Z^0$ и Z^1, $\partial_1 Z^1$, соответственно. Наконец, последняя связь коэффициентов

$$b_{01}^2 = -\frac{1}{30}\,\frac{11\lambda + 12\mu}{\lambda + 2\mu} - 2b_{11}, \tag{35}$$

выводится из соотношений (33), $(34)_2$ и тождества

$$\partial_1 Z^{2,1}(\xi) - K_0^{-1}K_1 Z^{2,0}(\xi) = Z^{2,0}(\xi),$$

обеспеченного сравнением поведения левой и правой частей при $\xi_1 \to -\infty$ или $\rho \to 0$.

Итак, согласно (33)–(35) все множители в разложениях (25) и (26), кроме b_{10}, выражены через величину b_{11}, а для коэффициента интенсивности напряжений K_0 получена явная формула, которая и будет использована далее.

6. Сращивание асимптотических разложений. Рассмотрим малую окрестность точки $P^+(h)$; точка $P^-(h)$ обрабатывается тем же способом. При $x_1 < P_1^+(h)$ был принят анзац $(7)_1$, а при $x_1 > P_1^+(h)$ – анзац $(7)_2$. В первом из них присутствует слагаемое $h^{-2}U^{-2}(x_1) = h^{-2}w_2(x_1)$, а во втором отсутствует. Следовательно, сращивание возможно лишь при условии

$$w_2(l_\pm) = 0. \tag{36}$$

При учете (36) получаем, что

$$h^{-2}U^{-2}(x_1) + h^{-1}U^{-1}(x_1, \zeta) =$$

$$= h^{-2}e_2(x_1 - l^+)\partial_1 w_2(l_+) + h^{-1}e_1\{w_1(l_+ - 0) - \zeta\,\partial_1 w_2(l_+)\} + O(h^0) =$$

$$= h^{-1}\{e_1 w_1(l_+ - 0) + (e_2\xi_1^+ - e_1\xi_2^+)\partial_1 w_2(l_+)\} + O(h^0) \text{ при } x_1 < P_1^+(h),$$

$$h^{-1}U^{-1}(x_1) = h^{-1}e_1 w_1(l_+ + 0) \quad \text{при} \quad x_1 > P_1^+(h). \tag{37}$$

Сравнивая эти разложения видим, что в качестве главного члена пограничного слоя (более грамотно говорить о *внутреннем разложении* вблизи точки $x_1 = l_+$) следует следует взять выражение

$$h^{-1}Z^{1,0}(\xi^+)w_1(l_+) = h^{-1}V^{1,0}(\xi^+)e_1 = h^{-1}e_1 w_1(l_+) \tag{38}$$

и дополнить уже назначенные условия (36) такими:

$$\begin{gathered} w_1(l_+ - 0) = w_1(l_+ + 0), \\ \partial_1 w_2(l_\pm) = 0. \end{gathered} \tag{39}$$

Подчеркнем, что соотношения (39) предопределены списком решений однородной задачи (21), приведенным в разделе 4. Именно, в формулу (38) привлечено первое решение из (24), а граничное условие (39) назначено в силу того, что в списках (24) и (25) нет решения с главным членом $e_2\xi_1 - e_1\xi_2$ асимптотики при $\xi_1 \to -\infty$.

Повторим выкладки (37) для трехчленной асимптотики:

$$\begin{gathered} h^{-2}U^{-2}(x_1) + h^{-1}U^{-1}(x_1,\zeta) + h^{-2}U^0(x_1,\zeta) - h^{-1}e_1 w_1(l_+) = \\ = h^{-2}e_2\frac{1}{2}(x_2 - l_\pm)^2\partial_1^2 w_2(l_+) + h^{-1}e_1(x_1 - l_+)\times \\ \times\left(\partial_1 w_1(l_+ - 0) - \left[\zeta - \frac{1}{2}\right]\partial_1^2 w_2(l_\pm)\right) + \\ + h^0 e_2\left(- \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\left[\zeta - \frac{1}{2}\right]\partial_1 w_1(l_+ - 0) + \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\left[\frac{\zeta^2}{2} - \frac{\zeta}{2} - \frac{1}{12}\right]\partial_1^2 w_2(l_+)\right) + O(h) = \end{gathered}$$

$$= V^{1,1}(\xi^+)\,\partial_1 w_1(l_+ - 0) + V^{2,2}(\xi^+)\partial_1^2 w_2(l_+) + O(h) \quad \text{при} \quad x_1 < P_1^+(h),$$

$$\begin{gathered} h^{-1}U^{-1}(x_1) + h^0 U^0(x_1,\xi) - h^{-1}e_1 w_1(l_+) = \\ = V^{1,1}(\xi^+)\,\partial_1 w_1(l_+ + 0) + O(h) \quad \text{при} \quad x_1 > P_1^+(h). \end{gathered}$$

Итак, следующий за (38) член пограничного слоя можно искать в виде линейной комбинации

$$Z^{1,1}(\xi^+)\partial_1 w_1(l_\pm - 0) + Z^{2,0}(\xi^+)\partial_1^2 w_2(l_\pm) \tag{40}$$

решений однородной задачи (21). Кроме того, необходимо дополнить условия сопряжения $(39)_1$ такими:

$$\partial_1 w_1(l_\pm - 0) = \partial_1 w_1(l_\pm + 0). \tag{41}$$

Благодаря соотношениям $(39)_1$ и (41) решение уравнений $(11)_1$ и (16) становятся гладкими в точках $x_1 = l_\pm$. Значит, для определения неизвестных w_1 и w_2 в анзацах (7) и (9), (14) требуется решить задачу Дирихле (граничные условия (19)) для уравнения $(11)_1$, (16) второго порядка на интервале $(-1, 1)$ с правой частью $(11)_2$ и задачу Дирихле (граничные условия (36) и $(39)_2$) для уравнения $(12)_1$ четвертого порядка на интервале $T_0 = (l_-, l_+)$ с правой частью $(12)_2$. Подчеркнем, что обе задачи однозначно разрешимы. Иными словами, размеры зоны контакта и положение точек отрыва $P^\pm(h)$ не влияют на главные члены разложений (7) гладкого типа. Разумеется, сказанное верно при выполнении условия (18).

7. Определение положения точек отрыва балки от жесткого профиля. Согласно асимптотическому анализу, проделанному в предыдущих разделах, точки $P^\pm(h)$ расположены на малом расстоянии от точек $p^\pm(0) = (l_\pm, 0)$. Найдем главные члены $p_\pm$ в асимптотических формулах

$$P^\pm(h) \approx l_\pm \mp p_\pm h. \tag{42}$$

В силу предположений (4) и (5) правая часть соотношения $(3)_2$ преобразуется так:

$$-h^{-2}\varphi(x_1) = -h^{-2}\frac{1}{2}\,k_+(x_1 - l_+)^2 + O(h) = -\frac{1}{2}\,k_+(\xi_1^+ - p_+)^2 + O(h).$$

Здесь учтено, что ввиду формул (20) и (42) $\xi_1^\pm \approx h^{-1}(x_1 - l_\pm) \pm p_\pm$. Таким образом, в последнем краевом условии из задачи (21) следует положить

$$\psi^+(\xi_1^+) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}k_+(\xi_1^+ - p_+)^2 & \text{при} \quad \xi_1 \in (0, p_+), \\ 0 & \text{при} \quad \xi_1 > p_+. \end{cases} \tag{43}$$

Кроме того, к линейной комбинации (40) необходимо добавить энергетическое решение v^+ задачи (21). Согласно общим результатам [13] такое решение существует, единственно и допускает представления

$$v^+(\xi^+) = c_{1,0}V^{1,0}(\xi^+) + c_{2,0}V^{2,0}(\xi^+) + c_{2,1}V^{2,1}(\xi^+) + \ldots, \quad \xi_1^+ \to -\infty,$$

$$v^+(\xi^+) = \dots, \quad \xi_1^+ \to +\infty, \tag{44}$$

$$v^+(\xi^+) = C_1 e_1 + C_2 e_2 + \mathcal{K}_+ \rho^{1/2}\Phi(\varphi) + O(\rho), \quad \rho \to 0.$$

Как и ранее в разделе 4, многоточием обозначаются экспоненциально затухающие составляющие, а $\mathcal{K}_+$ – коэффициент интенсивности напряжений. Отметим, что справа в $(44)_1$ фигурирует жесткое смещение $(c_{1,0} - c_{2,1}\xi_2^+, c_{2,0} + c_{2,1}\xi_1^+)$, не дающее вклада в энергетический функционал. Формула $(44)_3$ отличается от (26) присутствием слагаемого $c_2 e_2$, которое порождено неоднородностью условий Дирихле в задаче (21) для v^+; в соответствии с (43) постоянная c_2 равна $\psi^+(0) = -k_+ p_+^2/2$.

Вычислим коэффициент интенсивности $\mathcal{K}_+$ из $(44)_3$. С этой целью подставим в формулу Грина для прямоугольника Π_R с вырезанным полукругом $\{\xi \in \Pi : |\xi| < \delta\}$ вектор-функции $v^+ - C_2 e_2$ и $\partial_1 Z^{2,0}$. Аналогичное (32) соотношение выглядит следующим образом:

$$Q(v^+ - C_2 e_2, \partial_1 Z^{2,0}; -R) + q(v - C_2 e_2, \partial_1 Z^{2,0}; \delta) + \tag{45}$$
$$+ \int\limits_\delta^R \Big(\psi^+(\xi_1) - \psi^+(0)\Big)\sigma_{22}(\partial_1 Z^{2,0}; 0, \xi_1)\, d\xi_1 = Q(v^+ - C_2 e_2, \partial_1 Z^{2,0}; R).$$

В формуле Грина интегралы по отрезкам $\{\xi : \xi_2 = 1, |\xi_1| < R\}$ и $\{\xi : \xi_2 = 0, -R < \xi_1 < -\delta\}$ исчезли по причине однородных краевых условий в задачах для $Z^{2,0}$ и v, но интеграл по отрезку $\{\xi : \xi_2 = 0,\, \delta < \xi_1 < R\}$ остался. Предельный переход $R \to +\infty$ устраняет слагаемые $Q(\dots; \pm R)$ (хотя бы один из сомножителей в подынтегральном выражении из (28) экспоненциально затухает), а ввиду соотношений (29), (30) и (26), $(44)_3$ предельный переход $\delta \to 0$ преобразует величину $q(\dots; \delta)$ в произведение $-\frac{1}{2}\alpha\mathcal{K}_+ K_0$. Итак, после интегрирования по частям равенство (45) превращается в такое:

$$\frac{\alpha}{2}\mathcal{K}_+ K_0 = \int\limits_0^\infty \Big(\psi^+(\xi_1) - \psi^+(0)\Big)\sigma_{22}(\partial_1 Z^{2,0}; 0, \xi_1)\, d\xi_1 =$$
$$= \int\limits_0^{p_+} \sigma_{22}(Z^{2,0}; 0, \xi_1)\frac{\partial \psi^+}{\partial \xi_1}(\xi_1)\, d\xi_1. \tag{46}$$

Согласно критерию Баренблатта [10] (см. также [11, 7, 12]) коэффициент интенсивности напряжений в точке отрыва упругого тела от жесткого основания обращается в нуль. В задаче (1)–(3) этот коэффициент асимптотически равен

$$h^{1/2}\Big(\partial_1^2 w_2(l_+)K_0 + \mathcal{K}_+\Big) + O(h^{1/2}). \tag{47}$$

В выражении (47) учтено, что первое слагаемое линейной комбинации (40) гладкое, второе имеет коэффициент интенсивности $\partial_1^2 w_2(l_+)K_0$ (см. (26)), а последняя составляющая пограничного слоя обладает сингулярностью $(44)_3$.

Согласно формулам (46) и (33) главный член асимптотики (47) равен нулю при условии

$$\partial_1^2 w_2(l_+) = -\frac{6}{\alpha}\int\limits_0^{p_+} \sigma_{22}(Z^{2,0}; 0, \xi_1)\,\frac{\partial \psi^+}{\partial \xi_1}(\xi_1)\,d\xi_1. \tag{48}$$

В силу (43) правая часть является функцией величины p_+. Иными словами, положение точки отрыва, заданное формулой (42), находится из решения трансцендентного уравнения (48).

Если величины $\partial_1^2 w_2(l_\pm)$, определенные по решению задачи $(12)_1$–$(39)_2$, оказываются малыми, то возникшие трансцендентные уравнения для точек $P^\pm(h)$ нетрудно решить приближенно. Именно, интеграл справа в (48) равен $\dfrac{4}{3}k_+ p_+^{3/2}$, а значит,

$$p_\pm = \Big(-\frac{\alpha}{8k_\pm}\partial_1^2 w_2(l_\pm)\Big)^{2/3}.$$

Второй член асимптотики (42) положения точек отрыва балки вычислен. Напоминаем еще раз про требование (18), предъявленное к слагаемым в представлениях (6) правых частей задачи (1)–(3).

Литература

1. С. А. Назаров, *Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки.* — Научная книга, Новосибирск (2002).
2. Г. Фикера, *Теоремы существования в теории упругости.* Мир, М. (1974).
3. Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс, *Неравенства в механике и физике.* Мир, М. (1980).

4. И., Главачек, Я. Гаслингер, И. Нечас, Я. Ловишек, *Решение вариационных неравенств в механике.* Мир, М. (1986).
5. С. А. Назаров, *Асимптотическое решение вариационных неравенств для линейного оператора с малым параметром при старших производных.* — Изв. АН СССР. Серия матем. **54**, No. 4 (1990), 754–773.
6. С. А. Назаров, *Асимптотическое решение вариационного неравенства, моделирующего трение.* — Изв. АН СССР. Серия матем. **54**, No. 5 (1990), 990–1020.
7. С. А. Назаров, *Асимптотика решений задачи Синьорини без трения или с малым трением.* — Проблемы матем. анализа **12**, изд-во СПбГУ, СПб (1992), 82–109.
8. И. И. Аргатов, С. А. Назаров, *Асимптотическое решение задачи Синьорини с малыми участками свободной границы.* — Сиб. матем. ж. **35**, No. 2 (1994), 258–277.
9. И. И. Аргатов, С. А. Назаров, ,*Асимптотическое решение задачи Синьорини с препятствием на тонком продолговатом множестве.* — Матем. сб. **187**, No. 10 (1996), 3–32.
10. Г. И. Баренблатт, *Об условиях конечности в механике сплошных сред.* — Пприкладная математика и механика **24**, No. 2 (1960), 316–322.
11. R. Schumann, *Regularity for Signorini's problem in linear elasticity.* — Manuscripta Mat. **63** (1989), 255–291.
12. C. Eck, S. A. Nazarov, W. L. Wendland, *Asymptotic analysis for a mixed boundary-value contact problem.* — Arch. Rational Mech. Anal. **156** (2001), 275–316.
13. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей.* Наука, М. (1991).

Izotova O. V., Nazarov S. A. An asymptotic solution to the Signorini problem about a beam laying on two rigid bases.

An asymptoic solution is constructed to the Signorini problem for a two-dimensional thin beam under a possible contact with two rigid profiles. For the position of points where the beam leaves the base, the asymptotic formula is derived by an analysis of the boundary layer phenomenon near these points.

ИМОП СПбГПУ

Поступило 5 февраля 2005 г.

E-mail: ovizotova@mail.ru

ИПМаш РАН, СПб

E-mail: serna@snark.ipme.ru