Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 324, 2005 г.

М. И. Белишев, С. А. Иванов

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ БАЛОК ПО ДИНАМИЧЕСКИМ ГРАНИЧНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ

0. Введение

В работе решается динамическая обратная задача для двускоростной системы специального вида. Система описывает двухмодовые колебания композитной балки, состоящей из двух связанных балок, см. [1]; восстановлению подлежит переменный коэффициент сдвиговой жесткости (shearing stifness coefficient). Колебания балки возбуждаются импульсным воздействием на один из ее концов. В качестве данных обратной задачи используются амплитуды обеих мод, измеряемые на том же конце и силы, отвечающие быстрой (продольной) моде и измеряемые на противоположном закрепленном конце.

Прямые и обратные задачи для для двускоростной системы достаточно подробно изучены в работах [2–4], методами и результатами которых мы пользуемся. Поводом для написания данной статьи является "заказ", идущий от вполне конкретных приложений, ориентированных, в конечном счете, на реальный физический эксперимент [5].

Наш подход является адекватной версией метода граничного управления (BC-метод, [2, 3]). Ее особенность состоит в использовании уравнений Гельфанда–Левитана–Крейна [7, 8], ранее в задачах для таких систем не применявшихся. Примечательно, что возможность привлечь эти уравнения открывается благодаря весьма специальному виду матричного потенциала, описывающего взаимодействие между колебательными модами композитной балки. Выгода от использования уравнений Гельфанда–Левитана–Крейна состоит в том, что схема BC-метода упрощается и доводится до алгоритма, имеющего хорошие шансы на (по

Работа поддержана РФФИ, грант No. 05-01-00936, НШ–2261.2003.1, и Министерством образования грант E02 1.0 172.

крайней мере) численную реализацию.

Наш интерес к рассматриваемой задаче во многом стимулирован работой [9], рукопись которой была любезно предоставлена нам ее авторами. Сравнивая результаты, отметим следующее. В [9] в качестве данных используются наблюдения на одном конце, но процедура восстановления весьма сложна и громоздка: используются нелинейные системы уравнений типа Вольтерра, продолжение данных с конечного интервала на все времена и др. В нашей работе, за счет привлечения дополнительных данных, отвечающих измерениям на правом конце балки, восстановление сводится к решению *линейных* интегральных уравнений Фредгольма второго рода с положительным оператором.

1. Прямая задача

1.1. Начально-краевая задача.

Согласно [1, 9], динамическая система, описывающая колебания композитной двухкомпонентной балки имеет вид

$$\rho u_{tt} - A u_{xx} + K u = 0; \quad (x,t) \in (0,h) \times (0,T), \tag{1.1}$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad \text{в} \quad [0,h], \tag{1.2}$$

$$A u|_{x=0} = f(t), \qquad u|_{x=h} = 0. \tag{1.3}$$

где

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2, \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

суть диагональные матрицы с положительными и постоянными элементами ρ_1, ρ_2, a_1, a_2; K – матрица-функция (потенциал) вида

$$K(x) = k(x) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

с гладкой[1] положительной функцией $k(\cdot)$, имеющей смысл коэффициента сдвиговой жесткости; h – длина балки. Колебания генерируются граничным источником (управлением) $f = f(t) =$

[1]для дальнейших рассмотрений достаточно C^2 – гладкости.

$\begin{pmatrix} f^1(t) \\ f^2(t) \end{pmatrix}$, $t \in [0,T]$; решение задачи $u^f(x,t) = \begin{pmatrix} \left(u^f(x,t)\right)^1 \\ \left(u^f(x,t)\right)^2 \end{pmatrix}$ описывает волну, распространяющуюся вдоль балки от ее конца $x=0$.

Постоянные $c_i := \sqrt{a_i/\rho_i}$ имеют смысл скоростей распространения мод; в данной модели предполагается $c_1 > c_2$. Первую моду мы назовем быстрой, вторую – медленной. Эти моды описывают продольные смещения частей композитной балки.

Обычный подход к исследованию разрешимости задачи (1.1) состоит в ее сведении к системе интегральных уравнений. Опуская стандартные технические детали (см., например, [10]), приведем известные результаты. Подчеркнем, что все они справедливы в общем случае произвольного гладкого симметричного потенциала K; конкретный вид (1.4) последнего будет использован только при решении обратной задачи. Сказанное относится ко всем результатам, приводимым в разделах 1.2–1.4.

(i) При любом $f \in L^2([0,T];\mathbb{R}^2)$ система (1.1)–(1.3) имеет единственное обобщенное решение $u^f \in C\left([0,T]; H^1([0,h];\mathrm{Re}^2)\right)$ (H^s – Соболевские классы).

(ii) Справедливо соотношение

$$\operatorname{supp} u^f \subset \left\{(x,t) \,\middle|\, 0 \leqslant \frac{x}{c_1} \leqslant t\right\}.$$

Оно является следствием гиперболичности системы (1.1)–(1.3) и интерпретируется как конечность скорости распространения волн вдоль балки.

(iii) При $f \in C_0^\infty(0,T)$ решение является классическим.

В качестве примера системы (1.1)–(1.3) рассмотрим случай нулевого потенциала. Он не лишен физического содержания и отвечает балке с невзаимодействующими модами. Кроме того, главные особенности (сингулярности) решений в случае $K=0$ и ненулевого потенциала оказываются одинаковыми.

Пример. При $K=0$ задача (1.1)–(1.3) решается явно и при временах $t < \frac{h}{c_1}$ несложно найти

$$\left(u^f(x,t)\right)^i = -\frac{c_i}{a_i} \int\limits_0^{(t-\frac{x}{c_i})_+} f^i(s)\,ds, \quad i=1,2, \tag{1.5}$$

где $\tau_+ := \max\{0, \tau\}$. При $t > \frac{h}{c_1}$ это представление усложняется, что связано с отражением от конца $x = h$: см. рис. 1, на котором указаны характеристики $t = x/c_i$ (характеристики быстрой моды отмечены двойными стрелками.)

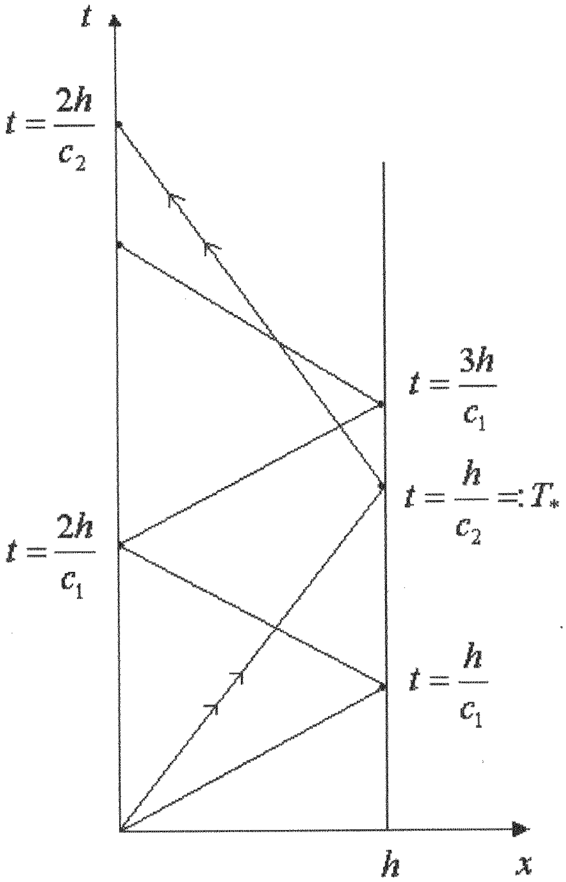

Рис. 1.

1.2. Динамическая система.

Рассмотрим задачу (1.1)–(1.3) как динамическую систему и сопоставим ей стандартные атрибуты теории управления – пространства и операторы.

Внешним пространством называется пространство[2] управлений

$$\mathcal{F}^T := L^2([0,T];\mathbb{R}^2)$$

со скалярным произведением

$$(f,g)_{\mathcal{F}^T} = \int_0^T \langle f(t), g(t)\rangle \, dt.$$

Здесь $\langle f(t), g(t)\rangle$ есть скалярное произведение в Re^2.

Пространство

$$\mathcal{H} := L^2([0,h];\mathrm{Re}^2)$$

со скалярным произведением

$$(u,v)_{\mathcal{H}} = \int_0^T dx \, \langle \rho u(x), v(x)\rangle$$

есть внутреннее пространство системы.

Соответствие "вход $\to$ состояние" описывается оператором управления

$$W^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{H}, \quad W^T f := u^f(\cdot, T).$$

Можно показать, что оператор W^T компактен и действует непрерывно из $L^2([0,T];\mathbb{R}^2)$ в $H^1([0,h];\mathrm{Re}^2)$. Отметим, что компактность – специфическое свойство задачи с управлением Неймана: в случае уравнения Дирихле $u|_{x=0} = f$ оператор W^T непрерывен, но не компактен [4].

Пример. В случае $K = 0$, при дополнительном условии $T < \frac{h}{c_1}$ из (1.5) легко имеем

$$\left(W^T f\right)(x) = -\int_0^T \begin{pmatrix} \frac{c_1}{a_1}\theta(T - \frac{x}{c_1} - s) & 0 \\ 0 & \frac{c_2}{a_2}\theta(T - \frac{x}{c_2} - s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1(s) \\ f^2(s) \end{pmatrix} ds,$$

где $\theta(t)$ – функция Хевисайда.

Соответствие "вход $\to$ выход" реализуется оператором реакции

$$R^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T, \quad R^T f = u^f(0, \cdot).$$

[2]все пространств а в работе являются вещественными.

Как нетрудно показать, R^T есть компактный интегральный оператор вида

$$\left(R^T f\right)(t) = \int\limits_0^t r(t-s) f(s)\, ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

с ядром (функцией отклика) $r(t) = \{r_{ij}(t)\}_{i,j=1}^2$, являющимся гладкой симметрической матрицей-функцией: $r_{12}(\cdot) = r_{21}(\cdot)$. При временах $t < 2\frac{h}{c_1}$ функция отклика является гладкой. То, что R^T есть оператор типа свертки следует из инвариантности системы относительно сдвигов по времени (независимости коэффициентов уравнения (1.1) от t). Симметричность матрицы r выводится из самосопряженности по Даламберу дифференциального оператора $-\frac{d}{dx}A\frac{d}{dx} + K$, входящего в (1.1).

Пример. В случае $K = 0$, для функции отклика получается представление

$$r(t) = -\begin{pmatrix} \frac{c_1}{a_1} & 0 \\ 0 & \frac{c_2}{a_2} \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant t < 2\frac{h}{c_1}.$$

При временах $t > 2\frac{h}{c_1}$ оно усложняется, что связано с приходом в $x = 0$ быстрой моды, прошедшей балку, отраженной от конца $x = h$ и вернувшийся в $x = 0$; см. рис. 1.

1.3. Медленные волны.

С физической точки зрения, волна u^f является смесью быстрой и медленной мод. Интересной особенностью двускоростной системы является существование волн, которые, несмотря на взаимодействие между модами, распространятся со скоростью *медленной* моды. Такие волны генерируются управлениями, компоненты которых связаны специальным соотношением.

Предположим, для простоты, что балка полубесконечная и потенциал K определен при всех $x \geqslant 0$; в задаче (1.1)–(1.3) положим $T = \infty$. Условимся называть медленным волнами решения задачи (1.1)–(1.3), удовлетворяющие соотношению

$$u^f(x,t) = 0, \quad \text{при} \quad t < \frac{x}{c_2}. \tag{1.6}$$

Как показано в [4], существует единственная функция $l = l(t)$, $t \geqslant 0$, такая, что управление $f \in L^2([0,T];\mathbb{R}^2)$ порождает медленную волну u^f тогда и только тогда, когда его компоненты связаны соотношениями

$$f^1(t) = (l * f^2)(t) = \int_0^t l(t-s) f^2(s)\, ds, \quad t \geqslant 0.$$

Функция l зависит от потенциала локально: для каждого $T > 0$ значения $l(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant (1 - \frac{c_2}{c_1})T$ определяются значениями $K(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant c_2 T$.

Добавим, что этот результат справедлив и для систем более общего вида, описываемых уравнениями $\rho u_{tt} - A u_{xx} + B(x) u_x + K(x) u = 0$, с переменными ρ_i, a_i, B, K при условии, что скорости мод отделены: $0 < c \leqslant c_2(x) \leqslant c_1(x) - \varepsilon$, с положительными постоянными c, ε; см. [10].

Пример. В случае $K \equiv 0$ имеем $l \equiv 0$.

1.4. Управляемость.

Вернемся к случаю конечного T и поставим задачу граничного управления: для системы (1.1)–(1.3): по данному $y \in \mathcal{H}$ найти управление $f \in \mathcal{F}^T$ такое, что

$$u^f(\cdot, T) = y. \tag{1.7}$$

В соответствии с принятыми в п. 1.2 определениями, задача граничного управления равносильна уравнению $W^T f = y$, а вопрос о ее разрешимости сводится к исследованию линеала $\operatorname{Ran} W^T \subset \mathcal{H}$, называемого в теории управления достижимым множеством. Структура $\operatorname{Ran} W^T$ весьма сложна (см. [11]), но становится более простой, если сузить W^T на управления, порождающие медленные волны. Опишем соответствующие результаты.

Введем $T_* := \frac{h}{c_2}$ – время прохождения балки медленной модой, и рассмотрим задачу (1.1)–(1.3) с $T = T_*$. Во внутреннем пространстве $\mathcal{H}$ выделим плотный линеал состояний

$$\mathcal{H}_1 := \{y \in \mathcal{H} \,|\, y \in H^1([0, T_*]; \mathrm{Re}^2),\ y(h) = 0\},$$

снабженный соболевской H^1-нормой. В нем содержится расширяющаяся цепочка линеалов

$$\mathcal{H}_1^{c_2\xi} := \{y \in \mathcal{H}_1 \,|\, \operatorname{supp} y \subset [0, c_2\xi]\},\ 0 \leqslant \xi < T_*; \quad \mathcal{H}_1^{c_2 T_*} := \mathcal{H}_1.$$

Каждый из линеалов плотен в соответствующем подпространстве

$$\mathcal{H}^{c_2\xi} := \{y \in \mathcal{H} |\ \mathrm{supp}\, y \subset [0, c_2\xi]\},$$

образованном состояниями, локализованными на участке балки $[0, c_2\xi]$, захваченном медленной модой к моменту $t = \xi$.

Во внешнем пространстве $\mathcal{F}^{T_*}$ содержится подпространство

$$\mathcal{F}_l^{T_*} := \Big\{ f = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} \Big|\ f^1(t) = (l * f^2)(t) \quad \text{при} \quad 0 < t < \Big(1 - \frac{c_2}{c_1}\Big) T_* \Big\},$$

состоящее из управлений, порождающих медленные волны. Оно, в свою очередь, содержит расширяющуюся цепочку подпространств.

$$\mathcal{F}_l^{T_*,\xi} := \{ f \in \mathcal{F}_l^{T_*} |\ f = 0 \quad \text{на} \quad [0, T - \xi);$$

$$f^1 = (l * f^2)(t) \quad \text{на}\ [T_* - \xi, T - \frac{c_2}{c_1}\xi]\}.$$

Как легко видеть, при $f \in \mathcal{F}_l^{T_*,\xi}$ выполнено соотношение

$$u^f(x,t) = 0, \quad \text{при} \quad t < \frac{x}{c_1} + T_* - \xi,$$

то есть, управления из этих подпространств порождают волны, передний фронт которых распространяется со скоростью медленной моды c_2.

Введем сужение оператора управления

$$W_l^{T_*} :\ \mathcal{F}_l^{T_*} \ \to\ \mathcal{H}, \quad W_l^{T_*} := W^{T_*}|_{\mathcal{F}_l^{T_*}}.$$

Справедливо важное соотношение

$$W_l^{T_*} \mathcal{F}_l^{T_*,\xi} = \mathcal{H}_1^{c_1\xi}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T_*, \tag{1.8}$$

причем, оператор $W_l^{T_*}$, рассматриваемый как отображение из $\mathcal{F}_l^{T_*}$ в $\mathcal{H}_1$ является изоморфизмом (ограничен и ограниченно обратим). Аналог соотношения (1.8) для задачи с управлением Дирихле, установлен в [2]; в нашем случае он выводится по той же схеме. Не приводя подробного доказательства, укажем на общий факт, лежащий в его основе. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\rho v_{tt} - Av_{xx} + Kv = 0; \quad (x,t) \in (0,h) \times (0,T), \tag{1.9}$$

$$v|_{t=T_*} = y \in \mathcal{H}, \tag{1.10}$$

$$v_t|_{t<\frac{x}{c_2}} = 0, \tag{1.11}$$

в которой, по отношению к задаче (1.1)–(1.3), меняются ролями переменные: x играет роль времени, а t имеет смысл пространственной переменной. Она отличается от задачи (1.1)–(1.3) лишь тем, что потенциал теперь зависит от временной переменной. Последнее никак не осложняет разрешимости: задача (1.9)–(1.11) корректна, а отображение $V^{T_*}: y \to Av_x|_{x=0}$ оказывается изоморфизмом $\mathcal{H}^1$ на $\mathcal{F}_l^{T_*}$. В силу очевидного соотношения $W_l^{T_*}V^{T_*} = Id$ это отображение и решает задачу (1.7) для $y \in \mathcal{H}_1^{c_1T_*}$ в классе управлений $\mathcal{F}_l^{T_*}$.

Пример. В случае $K = 0$, имеем $l = 0$ и, соответственно,

$$\mathcal{F}_l^{T_*} := \left\{ f \in \mathcal{F}_l^{T_*} \mid f^1 = 0 \quad \text{на } [0, (1 - \frac{c_2}{c_1})T_*] \right\};$$

$$(W_l^{T_*}f)(x) = \begin{pmatrix} -\frac{c_1}{a_1} \int\limits_0^{(T_* - \frac{x}{c1})_+} \theta(s - (1 - \frac{c_2}{c_1})T_*) f^1(s)\, ds \\ -\frac{c_2}{a_2} \int\limits_0^{(T_* - \frac{x}{c2})_+} f^2(s)\, ds \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant x \leqslant h;$$

1.5. Распространение разрывов.

Рассмотрения этого раздела касаются известного факта: разрывные уравнения порождают разрывные волны. Разрывы последних распространяются вдоль характеристик, их амплитуды вычисляются по формулам геометрической оптики. Фундаментальным решением задачи (1.1)–(1.3) называется матрица-функция $U = U(x,t)$, удовлетворяющая системе

$$\rho U_{tt} - AU_{xx} + KU = 0; \quad (x,t) \in (0,h) \times \{t > 0\}),$$

$$U|_{t=0} = U_t|_{t=0} = 0, \quad \text{в } [0,h],$$

$$AU_x|_{x=0} = \begin{pmatrix} \delta(t) & 0 \\ 0 & \delta(t) \end{pmatrix}, \quad U|_{x=h} = 0.$$

Опуская вполне стандартные построения лучевого метода (см. [6]), приведем представления для U, используемые ниже, при решении обратной задачи.

(i) При временах $0 < t < \frac{h}{c_1}$ (до первого отражения быстрой моды от конца $x = h$) справедливо представление

$$U(x,t) = -\begin{pmatrix} \frac{c_1}{a_1}\theta(t - \frac{x}{c_1}) & 0 \\ 0 & \frac{c_2}{a_2}\theta(t - \frac{x}{c_2}) \end{pmatrix} - \\ - \int\limits_0^x k(\xi)\, d\xi \begin{pmatrix} \frac{c_1^2}{a_1^2}(t - \frac{x}{c_1})_+ & 0 \\ 0 & \frac{c_2^2}{a_2^2}(t - \frac{x}{c_2})_+ \end{pmatrix} + \Phi(x,t), \tag{1.12}$$

где Φ – непрерывно дифференцируемая матрица-функция, аннулирующаяся при $t < \frac{x}{c_1}$. Первые два слагаемые в (1.12) описывают разрывы фундаментального решения и его первых производных. Эти разрывы распространяются со скоростями быстрой и медленной мод.

(ii) При $\frac{h}{c_1} < t < \frac{h}{c_1} + \delta$ ($\delta > 0$ достаточно мало) к первому слагаемому в (1.12) добавляется член, описывающий первое отражение быстрой моды от закрепленного конца $x = h$ и представление принимает вид

$$U(x,t) = \\ = -\begin{pmatrix} \frac{c_1}{a_1}\left[\theta(t - \dfrac{x}{c_1}) - \theta(t - \dfrac{2h - x}{c_1})\right] & 0 \\ 0 & \frac{c_2}{a_2}\theta(t - \dfrac{x}{c_2}) \end{pmatrix} + \\ + \Psi(x,t), \tag{1.13}$$

где Ψ – непрерывная всюду и гладкая вне прямых и отраженных характеристик матрица-функция.

Из (1.13) легко следует представление

$$U_x(h,t) = -\begin{pmatrix} \gamma\delta(t-\dfrac{x}{c_1})+g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad 0<t<\frac{h}{c_1}+\delta, \quad (1.14)$$

где $\gamma := \frac{2}{a_1}$; g_{ij} суть функции, гладкие при $t>\frac{h}{c_1}$ и аннулирующиеся при $t \leqslant \frac{h}{c_1}$.

(iii) Примем для простоты, что выполнено условие

$$c_1 < 3c_2. \quad (1.15)$$

Упрощение состоит в том, что в этом случае второе отражение быстрой моды от конца $x=h$ происходит в момент $t=\frac{3h}{c_1}$ позже первого отражения медленной моды в момент $t=\frac{h}{c_2}$ (рис. 1) и представление (1.14) оказывается справедливым в интервале $0<t<\frac{h}{c_2}=T_*$. В этом случае функции g_{ij} из представления (1.14) являются гладкими в промежутке $\frac{h}{c_2} \leqslant t \leqslant \frac{h}{c_1}$.

Отметим, что при нарушении условия (1.15) в элементе с индексами 1,1 последнего представления появляются дополнительные слагаемые вида $\gamma_j\delta(t-\frac{(2j+1)h}{c_1})$.

1.6. Оператор трансмиссии.

С системой (1.1)–(1.3) свяжем еще один оператор, отвечающий наблюдениям при $x=h$.

Вектор-функция времени $u^f_x(h,t)$ описывает силы, возникающие на правом конце балки под воздействием волны u^f. Отображение

$$Q^T : \mathcal{F}^T \;\to\; L^2([0,T];\mathbb{R}^2), \quad \left(Q^T f\right)(t) := u^f_x(h,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

называется оператором трансмиссии. Обсудим его свойства. В силу $u^f|_{t<\frac{x}{c_1}}=0$ имеем: $Q^T=\mathbf{0}$ при $T \leqslant \frac{h}{c_1}$. При $T>\frac{h}{c_1}$ представление для Q^T можно получить из формулы Дюамеля

$$u^f = U * f.$$

Полагая $\frac{h}{c_1}<T\leqslant\frac{h}{c_2}$, считая условие (1.15) выполненным и используя представление (1.14) в интервале $0<t<T$, легко получаем

$$\left(Q^T f\right)(t) := u^f_x(h,t) = \left(U_x(h,\cdot)*f\right)(t) = \quad (1.16)$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma f^1(t-\frac{h}{c_1}) + \int\limits_0^{(t-\frac{h}{c_1})_+} \left[q_{11}(t-\frac{h}{c_1}-s) f^1(s) + q_{12}(t-\frac{h}{c_1}-s) f^2(s) \right] ds \\ \int\limits_0^{(t-\frac{h}{c_2})_+} \left[q_{21}(t-\frac{h}{c_2}-s) f^1(s) + q_{22}(t-\frac{h}{c_2}-s) f^2(s) \right] ds \end{pmatrix},$$

где $f^1|_{t<0} := 0$, $q_{ij}(t) := g_{ij}(t+\frac{h}{c_1})$ суть функции, гладкие при $0 \leqslant t \leqslant T - \frac{h}{c_1}$. В случае нарушения (1.15) в первой компоненте правой части (1.16) появятся дополнительные слагаемые вида $\gamma_j f^1(t-(2j+1)\frac{h}{c_1}))$.

Полезно отметить, что во всех случаях оператор Q^T ограничен, а значения $Q^{T_*}f$ определяются значениями f при временах $0 \leqslant t \leqslant T - \frac{h}{c_1}$.

Пример. В случае $K = 0$, при условии $c_1 < 3c_2$ и $T < T_*$ имеем

$$\left(Q^T f\right)(t) = \begin{pmatrix} \gamma f^1(t-\frac{h}{c_1}) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T_*.$$

2. Обратная задача

2.1. Постановка.

Обратная задача состоит в восстановлении параметров балки по ее отклику на воздействие прикладываемое к одному из концов. Отклик измеряется на обоих концах.

Перейдем к точным формулировкам. Пусть известны:

(i) длина балки h и постоянные ρ_1, ρ_2, a_1, a_2 (а с ними и скорости мод c_1, c_2, причем $c_1 < 3c_2$);

(ii) матрица-функция отклика $r(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2T_*$;

(iii) функции $g_{11}(t)$, $g_{12}(t)$, $\frac{h}{c_1} \leqslant t \leqslant \frac{h}{c_2}$.

По этим данным требуется восстановить коэффициент $k(x)$, $0 \leqslant x \leqslant h$.

Приведенная постановка с физической точки зрения означает, что экспериментатор имеет возможность, прикладывая усилия к концу балки $x = 0$, возбуждать обе колебательные моды и измерять, во-первых, амплитуды обеих мод в $x = 0$ и, во-вторых, усилия, генерируемые быстрой модой на закрепленном конце $x = h$.

Определение функции l.

Здесь, на первом шаге решения обратной задачи, мы покажем, что наблюдения на правом конце позволяют найти функцию l, определяющую медленные волны. Сначала рассмотрим случай (1.15)

Лемма 1. *Функция l является единственным решением уравнения*

$$\gamma l(t) + \int_0^t q_{11}(t-\tau)l(s)ds = -q_{12}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \Big(1 - \frac{c_2}{c_1}\Big)T_*. \tag{2.1}$$

Доказательство. Выберем произвольное управление $f = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{F}_l^{T_*}$, так что

$$f^1(t) = \big(l * f^2\big)(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \Big(1 - \frac{c_2}{c_1}\Big)T_*. \tag{2.2}$$

Соответствующая волна u^f является медленной и из (1.6) следует

$$u^f_x(h,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T_*,$$

то есть в течение всего интервала наблюдений $[0, T_*]$ на конце $x = h$ быстрая мода не регистрируется. Согласно (1.16), это влечет соотношение

$$\gamma f^1\Big(t - \frac{h}{c_1}\Big) + \int_0^{t-\frac{h}{c_1}} \Big[q_{11}\Big(t - \frac{h}{c_1} - s\Big)f^1(s) + q_{12}\Big(t - \frac{h}{c_1} - s\Big)f^2(s)\Big]\, ds = 0,$$

$$\frac{h}{c_1} \leqslant t \leqslant T_*.$$

Заменяя переменную t на $t - \frac{h}{c_1}$ и учитывая (2.2), легко получаем уравнение в свертках

$$\gamma l * f^2 + q_{11} * l * f^2 + q_{12} * f^2 = 0,$$

на $[0, (1 - \frac{c_2}{c_1})T_*]$. В силу произвольности f^2, приходим к уравнению (2.1). Это уравнение Вольтерра второго рода с гладким ядром q_{11} и правой частью q_{12}. Его решение – функция l – единственно. $\square$

Определению функции l можно придать форму оптимизационной процедуры, что может оказаться полезным при численной реализации. Пусть $m = m(t)$ есть гладкая функция, заданная на промежутке $[0, \left(1-\frac{c_2}{c_1}\right)T_*]$; рассмотрим квадратичный функционал

$$\Phi(m) = \int\limits_{\frac{h}{c_1}}^{\frac{h}{c_2}} \left[\left(Q^{T_*} \begin{pmatrix} m \\ \theta \end{pmatrix} \right)^1 (t) \right]^2 dt.$$

Как легко видеть, глобальный минимум $\Phi = 0$ единствен и достигается на $m = \theta * l = \int\limits_0^t l(\tau) d\tau$.

2.3. Связывающий оператор.

Системе (1.1)–(1.3) сопоставим оператор

$$C^T : \mathcal{F}^T \;\to\; \mathcal{F}^T, \quad C^T := \left(W^T\right)^* W^T.$$

Этот неотрицательный и компактный оператор мы называем связывающим, имея в виду соотношения

$$(C^T f, g)_{\mathcal{F}^T} = (W^T f, W^T g)_{\mathcal{H}} = (u^f(\cdot, T), u^g(\cdot, T))_{\mathcal{H}},$$

связывающие метрики внешнего и внутреннего подпространств системы. Центральная роль оператора C^T в нашем подходе связана со следующим фактом: он явно и просто выражается через данные обратной задачи. Для формулировки соответствующего результата введем вспомогательные операторы:

оператор нечетного продолжения управлений $S^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^{2T}$,

$$(S^T f)(t) := \begin{cases} f(t) & 0 < t < T \\ -f(2T - t) & T \leqslant t < 2T. \end{cases}$$

оператор интегрирования

$$J^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \to \mathcal{F}^{2T}, \quad (J^T)(t) := \int\limits_0^t f(s)\, ds, \;\; 0 < t < T.$$

Обозначим

$$p(t) := \frac{1}{2} \int\limits_0^t r(s)\, ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2T,$$

где r – матрица-функция отклика системы (1.1)–(1.3).

Лемма 2. *Справедливы представления*

$$C^T = \frac{1}{2}(S^T)^* R^{2T} J^{2T} S^T \tag{2.3}$$

и

$$\left(C^T f\right)(t) = \int\limits_0^T \Big[p(2T-t-s) - p(|t-s|)\Big]\, dt. \tag{2.4}$$

Доказательство. Выберем управления $f,\, g \in C^\infty([0,T];\mathrm{Re}^2)$ и обозначим через f_- функцию $S^T f$. Пусть u^g, u^{f_-} суть решения задачи (1.1)–(1.3) с фиксированными моментами T, $2T$.

Введем, следуя А. С. Благовещенскому, функцию

$$b^{fg}(s,t) := \left(u^{f_-}(\cdot,s), u^g(\cdot,t)\right)_{\mathcal{H}} =$$

$$= \int\limits_0^h dx \left\langle \rho u^{f_-}(x,s), u^g(x,t)\right\rangle, \qquad 0 \leqslant s \leqslant 2T, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Применение оператора Даламбера дает

$$(\partial_t^2 - \partial_s^2) b^{fg}(s,t) =$$

$$= \int\limits_0^h dx \left[\left\langle u^{f_-}(x,s), \rho u^g_{tt}(x,t)\right\rangle - \left\langle \rho u^{f_-}_{ss}(x,s), u^g(x,t)\right\rangle\right] =$$

$$= \int\limits_0^h dx \Big[\left\langle u^{f_-}(x,s), A u^g_{xx}(x,t) - K(x) u^g(x,t)\right\rangle -$$

$$- \left\langle A u^{f_-}_{xx}(x,s) - K(x) u^{f_-}(x,s), u^g(x,t)\right\rangle\Big] =$$

$$= \int\limits_0^h dx \Big[\left\langle u^{f_-}(x,s), A u^g_{xx}(x,t)\right\rangle - \left\langle A u^{f_-}_{xx}(x,s), u^g(x,t)\right\rangle\Big] =$$

$$=< \text{ см. } (1.3) >= -\left\langle u^{f_-}(0,s), A u^g_x(0,t)\right\rangle + \left\langle A u^{f_-}_x(0,s), u^g(0,t)\right\rangle =$$

$$= \left\langle \left(R^{2T} f_-\right)(s), g(t)\right\rangle - \left\langle f_-(s), \left(R^T g\right)(t)\right\rangle =: G(s,t).$$

Если принять во внимание нулевые начальные условия для волн, то приходим к начально-краевой задаче

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \partial_s^2) b^{fg} = G, & 0 < s < 2T, \quad 0 < t < T, \\ b^{fg}(s,0) = b_t^{fg}(s,0) = 0. \end{cases}$$

Интегрируя по Даламберу, при $s = t = T$ имеем

$$w^{fg}(T,T) = \frac{1}{2} \int\limits_0^T d\eta \int\limits_\eta^{2T-\eta} d\xi \left[\left\langle \left(R^{2T} f_- \right)(s), g(t) \right\rangle - \left\langle f_-(s), \left(R^T g \right)(t) \right\rangle \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^T d\eta \int\limits_\eta^{2T-\eta} d\xi \left\langle \left(R^{2T} f_- \right)(\xi), g(\eta) \right\rangle \tag{2.5}$$

(первый интеграл с f_- исчезает, так как f_- нечетная относительно T функция). Преобразуя правую часть (2.5) к виду скалярного произведения в $\mathcal{F}^T$, легко получить

$$b^{fg}(T,T) = \frac{1}{2} \left((S^T)^* J^{2T} R^{2T} S^T f, g \right)_{\mathcal{F}^T}. \tag{2.6}$$

С другой стороны, по определению связывающего оператора имеем:

$$\begin{aligned} b^{fg}(T,T) &= (u^{f_-}(\cdot,T), u^g(\cdot,T))_{\mathcal{H}} = \\ &= (u^f(\cdot,T), u^g(\cdot,T))_{\mathcal{H}} = (C^T f, g)_{\mathcal{F}^T}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Сопоставляя (2.6) с (2.7(, учитывая произвольность выбора f, g и плотность гладких управлений в $\mathcal{F}^T$, мы приходим к (2.4).

Последовательная запись действия оператор в в правой части представления (2.3) легко приводит к (2.4). □

Пример. В случае $K = 0$, $T < 2\frac{h}{c_1}$ легко найти

$$\left(C^T f \right)(t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^T (2T - t - s - |t-s|) \begin{pmatrix} \dfrac{c_1}{a_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{c_2}{a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1(s) \\ f^2(s) \end{pmatrix} ds. \tag{2.8}$$

2.4. Уравнение Гельфанда–Левитана–Крейна.

Здесь мы выводим линейное уравнение, являющееся основным инструментом решения обратной задачи. В основе вывода лежит традиционная для BC-метода связь между уравнениями Гельфанда–Левитана–Крейна и задачей граничного управления. Впервые эта связь отмечена и использована в [8].

Пусть $X_l^{T,\xi}$ есть ортогональный проектор в $\mathcal{F}^T$ на подпространство $\mathcal{F}_l^{T,\xi}$. Положим $\alpha(\xi) := T - \xi$, $\beta(\xi) := T - \frac{c_2}{c_1}\xi$ и введем оператор свертки $\mathcal{L}_\xi$, действующий на интервале $(\alpha(\xi), \beta(\xi))$ по правилу

$$(\mathcal{L}_\xi \varphi)(t) := \int\limits_{\alpha(\xi)}^{t} l(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau.$$

Для проектора $X_l^{T,\xi}$ справедливо представление [2]

$$\left(X_l^{T,\xi} f\right)(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leqslant \alpha(\xi), \\ (Zf)(t), & \alpha(\xi) < t \leqslant \beta(\xi), \\ f(t), & \beta(\xi) < t \leqslant T, \end{cases} \tag{2.9}$$

где

$$Z := \begin{pmatrix} \mathcal{L}_\xi \left(I^\xi + \mathcal{L}_\xi^* \mathcal{L}_\xi\right)^{-1} \mathcal{L}_\xi & \mathcal{L}_\xi \left(I^\xi + \mathcal{L}_\xi^* \mathcal{L}_\xi\right)^{-1} \\ \left(I^\xi + \mathcal{L}_\xi^* \mathcal{L}_\xi\right)^{-1} \mathcal{L}_\xi & \left(I^\xi + \mathcal{L}_\xi^* \mathcal{L}_\xi\right)^{-1} \end{pmatrix}$$

I^ξ – единичный проектор в $L^2(\alpha(\xi), \beta(\xi))$.

Доказать это представление можно, проверяя характеристические свойства проектора.

Пример. В случае $K = 0$ легко находим

$$\left(X_l^{T,\xi} f\right)(t) = \begin{pmatrix} \theta(t-\beta(\xi)) & 0 \\ 0 & \theta(t-\alpha(\xi)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1(t) \\ f^2(t) \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Положим $T = T_*$ и введем при $\xi \in [0, T_*]$ семейство кусочно-линейных вектор-функций

$$\chi^{c_2\xi}(x) := \begin{cases} (c_2\xi - x)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & 0 \leqslant x \leqslant c_2\xi \\ 0 & c_2\xi < x \leqslant h. \end{cases}$$

Отметим включение $\chi^{c_2\xi} \in \mathcal{H}_1^{c_2\xi}$. Фиксировав ξ поставим задачу граничного управления (1.7) специального вида: найти управление $f = f_\xi \in \mathcal{F}_l^{T_*,\xi}$ такое, что

$$u^{f_\xi}(\cdot, T_*) = \chi^{c_2\xi}. \tag{2.11}$$

Эта задача равносильна уравнению $W_l^{T_*} f = \chi^{c_2\xi}$ и, в силу изоморфности оператора $W_l^{T_*} : \mathcal{F}_l^{T_*,\xi} \to \mathcal{H}^1$, корректно разрешима (см. п. 1.4). Покажем, что задача (2.11) эквивалентна интегральному уравнению типа Гельфанда–Левитана–Крейна . Отметим, что вывод уравнения существенным образом использует специальный вид потенциала K. Именно, используется тот факт, что функция $\chi^{c_2\xi}$ аннулируется дифференциальным оператором $-A\frac{d^2}{dx^2} + k(x)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ на интервале $(0, c_2\xi)$.

Обозначим через

$$C_l^{T_*,\xi} := X_l^{T_*,\xi} C^{T_*}\Big|_{\mathcal{F}_l^{T_*,\xi}}$$

блок связывающего оператора в подпространствее $\mathcal{F}_l^{T_*,\xi}$; введем вектор-функцию $\kappa(t) := (T_* - t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пример. В случае $K = 0$, $T < \frac{h}{c_1}$ из (2.8), (2.10) выводим

$$\left(C_l^{T,\xi} f\right)(t) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{c_1}{a_1}\theta(t - \beta(\xi)) \int\limits_0^T (2T - t - s - |t - s|)\theta(s - \beta(\xi)) f^1(s) \\ \frac{c_2}{a_2}\theta(t - \alpha(\xi)) \int\limits_0^T (2T - t - s - |t - s|)\theta(s - \alpha(\xi)) f^2(s) \end{pmatrix}.$$

Лемма 3. *При любом $\xi \in [0, T_*]$ задача (2.11) разрешима единственным образом, а ее решение – управление f_ξ – удовлетворяет уравнению*

$$C_l^{T_*,\xi} f = X_l^{T_*,\xi}\left[c_2 T_* \kappa + \left(R^{T_*}\right)^* (A\kappa)\right] \tag{2.12}$$

в подпространсте $\mathcal{F}_l^{T_*,\xi}$.

Доказательство. Разрешимость задачи (2.11) и единственность ее решения следуют из результатов п. 1.4 (см. (1.8)).

Для управления f, решающего задачу (2.11) и произвольного гладкое управления $g \in \mathcal{F}_l^{T_*,\xi}$ имеем

$$\left(C^{T_*}f, g\right)_{\mathcal{F}^{T_*}} = \left(u^f(\cdot, T_*), u^g(\cdot, T_*)\right)_{\mathcal{H}} =< \text{ см. } (2.11) >=$$

$$= \left(\chi^{c_2\xi}, u^g(\cdot, T_*)\right)_{\mathcal{H}} \int_0^{c_2\xi} dx \left\langle \rho\chi^{c_2\xi}(x), u^g(x, T_*)\right\rangle =$$

$$= \int_0^{c_2\xi} dx \left\langle \rho\chi^{c_2\xi}(x), \int_0^{T_*} dt(T_* - t) u^g_{tt}(x,t)\right\rangle =$$

$$= \int_0^{T_*} dt(T_* - t) \int_0^{c_2\xi} dx \left\langle \rho\chi^{c_2\xi}(x), u^g_{tt}(x, T_*)\right\rangle =$$

$$= \int_0^{T_*} dt(T_* - t) \int_0^{c_2\xi} dx \left\langle \chi^{c_2\xi}(x), Au^g_{xx}(x,t) - K(x)u^g(x,t)\right\rangle$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\left(C^{T_*}f, g\right)_{\mathcal{F}^{T_*}} =$$

$$= \int_0^{T_*} dt(T_* - t)\Big[\left\langle \chi^{c_2\xi}, Au^g_x(x,t)\right\rangle - \left\langle \chi^{c_2\xi}_x, Au^g(x,t)\right\rangle\Big]\Big|_{x=0}^{x=c_2\xi} +$$

$$+ \int_0^{c_2\xi} dx \left\langle A\chi^{c_2\xi}_{xx}(x) - K(x)\chi^{c_2\xi}, u^g(x,t)\right\rangle.$$

Поскольку g порождает медленную волну, то $u^g(x, T_*) = 0$ при $t < \frac{x}{c_2} + T_* - \xi$. Отсюда

$$\left(C^{T_*}f, g\right)_{\mathcal{F}^{T_*}} =$$

$$= \int_0^{T_*} dt(T_* - t)\Big[\left\langle -c_2\xi \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, g(t)\right\rangle - \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, A\left(R^{T_*}g\right)(t)\right\rangle\Big]\Big|_{x=0}^{x=c_2\xi} =$$

$$= \left(-c_2\kappa - \left(R^{T_*}\right)^*(A\kappa), g\right)_{\mathcal{F}^{T_*}}$$

Поскольку $f = f_\xi \in \mathcal{F}_l^{T_*,\xi}$, $g \in \mathcal{F}_l^{T_*,\xi}$, то полученное равенство скалярных произведений приобретает вид

$$\left(C_l^{T_*,xi} f, g\right)_{\mathcal{F}^{T_*}} = \left(X_l^{T_*,\xi}\left[-c_2\kappa - \left(R^{T_*}\right)^*(A\kappa)\right], g\right)_{\mathcal{F}^{T_*}}.$$

Из плотности гладких g в $\mathcal{F}_l^{T_*,\xi}$ вытекает (2.12).

Обращая эти выкладки можно показать, что решение последнего уравнения является решением задачи (2.11). □

Управление f_ξ, решающее задачу граничного управления (2.11) можно найти по решению системы

$$\begin{aligned}
&\rho v_{tt} - Av_{xx} + Kv = 0; \quad (x,t) \in (0,h)\times(0,T),\\
&v|_{t<\frac{x}{c_2}} = 0,\\
&v|_{t=0} = \chi^{c_2\xi};
\end{aligned}$$

при этом $f_\xi = Av_x|_{x=0} = V^{T_*}\chi^{c_2\xi}$ (см. (1.9)–(1.11)). Применяя лучевой метод к этой системе, легко описать сингулярности решения v и, вслед за этим, найти особенности управления f_ξ.

$$\begin{aligned}
f_\xi(t) = &-\begin{pmatrix} a_1\theta(t-(T_*-\frac{c_2}{c_1}\xi)) \\ a_2\theta(t-(T_*-\xi)) \end{pmatrix} + \\
&+\begin{pmatrix} s_1\int\limits_0^{c_1\xi} k(s)\,ds(t-(T_*-\frac{c_2}{c_1}\xi))_+ \\ c_2\int\limits_0^{c_2\xi} k(s)\,ds(t-(T_*-\xi))_+ \end{pmatrix} + \varphi,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

где φ непрерывно дифференцируема.

Из представления для второй компоненты получаем соотношение, позволяющее по управлению f_ξ найти потенциал

$$k(c_2\xi) = a_2\frac{d}{d\xi}\left[\frac{df_\xi^2(T-\xi+0)}{dt}\right]. \tag{2.14}$$

Пример. При $K = 0$ управление f_ξ имеет вид первого слагаемого (2.13).

2.5. Решение обратной задачи.

Подытожим наши рассмотрения схемой восстановления потенциала по данным обратной задачи.

Шаг 1. Найдем функцию $l(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right)T_*$ из уравнения (2.1) или из решения оптимизационной задачи п. 2.2.

Шаг 2. Определим проекторы $X_l^{T_*,\xi}$ по представлению (2.9) и найдем блоки связывающего оператора $C_l^{T_*,\xi} = X_l^{T_*,\xi} C^{T_*}\Big|_{\mathcal{F}_l^{T_*,\xi}}$.

Шаг 3. Решая семейство уравнений (2.12) при всех $\xi \in [0, T_*]$ найдем управления f_ξ и восстановим потенциал по (2.14).

2.6. О численной реализации.

Несложно предложить устойчивый алгоритм оптимизационной процедуры нахождения l.

Для построения проекторов $X_l^{T_*,\xi}$ требуется обращать операторы $I^\xi + \left(L^\xi\right)^* L^\xi$, что равносильно решению интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода.

Уравнение (2.12) является уравнением первого рода с компактным положительным оператором. Оно может быть решено, например, с помощью регуляризации по Тихонову

$$f_\xi = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varepsilon I + C_l^{T_*,\xi}\right]^{-1} g_\xi,$$

где g_ξ – правая часть (2.12).

Вторая возможность регуляризации уравнения состоит в сведении (2.12) к Фредгольмову уравнению второго рода. Анализ показывает, что ядро оператора C^{T_*}, помимо скачка производной на диагонали $t = s$, имеет особенности, отвечающие, приходу в $x = 0$ быстрой моды, претерпевшей отражение от конца $x = h$. При переходе к оператору $C_l^{T_*,\xi}$ эти особенности исчезают, поскольку управления класса $\mathcal{F}_l^{T_*,\xi}$ быструю моду не возбуждают. Поэтому ядро $C_l^{T_*,\xi}$ оказывается гладким вне диагонали и сохраняет скачок производной на диагонали. В силу этого, двукратное дифференцирование уравнения (2.12) сводит его к уравнению Фредгольма второго рода.

2.7. Комментарии.

Поставленная в п. 2.1 обратная задача переопределена: по пяти функциональным параметрам r_{11}, r_{12}, r_{22}, q_1, q_2 восстанавливается один – функция k. Применяя схему работы [2], по таким данным можно было бы восстановить четыре независимых коэффициент a, b_{11}, $b_{12} = b_{21}$, b_{22} в операторе

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} - \left[\begin{pmatrix} 0 & \frac{da}{dx} \\ -\frac{da}{dx} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right], \ b_{12} = b_{21}.$$

Отметим также, что в работе [3] предложена процедура решения "в малом" непереопределенной задачи: по r_{11}, r_{12}, r_{22} восстанавливается симметричный потенциал в операторе

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Нарушения условия $c_1 < 3c_2$ приводит лишь к техническим осложнениям при нахождении функции l: усложняется вид уравнения (2.1); однако, оно остается корректно разрешимым.

Литература

1. R. P. Johnson, *Composite structures of steel and concrete.* Blackwell Scientific, Oxford (1964).
2. М. И. Белишев, С. А. Иванов, *Характеризация данных динамической обратной задачи для двускоростной системы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **259** (1999), 19–45.
3. М. И. Белишев, С. А. Иванов, *Единственность в малом в динамической обратной задаче для двускоростной системы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **275** (2001), 41–54.
4. M. Belishev, A. Blagoveshchenskiĭ, S. A. Ivanov, Erratum to: *The two-velocity dynamical system: boundary control of waves and inverse problems.* — Wave Motion **25** (1997), No. 1, 83–107; MR 98g:73015a. — Wave Motion **26(1)** 1997, 99.
5. A. Morassi, L. Roccetto, *A damage analysis of steel concrete composite beams via dynamic methods.* Part II. Experimental results. — J. Vibrat. Contr. **9(5)** (2003), 507–527.
6. М. И. Белишев, А. С. Благовещенский, *Динамические обратные задачи теории волн.* – Изд. С.-Петербург. унив., С. Петербург (1999).
7. A. S. Blagoveshchenskii, *Inverse Problems of Wave Processes.* Utrecht: VSP (2001).
8. M. M. Sondhi, B. Gopinath, *Determination of Vocal-Tract Shape from Impulse Response at the lips.* — J. Acoust. Soc. Am. **49(6)** (1971), 1867–1873.
9. A. Morassi, G. Nakamura, M. Sini, *An inverse problem for connected beams.* — Рукопись.
10. М. И. Белишев, А. В. Зуров, *Эффекты, связанные с совпадением скоростей в двухскоростной динамической системе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **264** (2000), 44–65.

11. М. И. Белишев, С. А. Иванов, *Граничное управление и канонические реализации двускоростной динамической системы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **222** (1995), 18–44.

Belishev M. I., Ivanov S. A. Determination of the parameters of the system of connected beams from dynamical boundary measurements.

We consider the dynamical inverse problem for a special kind of a two velocity system. The system describes the vibrations of a composite beam formed by two connected beams and we recover the shearing stiffness coefficient. The vibrations of the beam are generated by the control applied to the end of the beam. The inverse data are the response operator and the dynamical measurement at the other end of the beam.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 5 февраля 2005 г.

Российский центр
лазерной физики,
С.-Петербургский
государственный университет

E-mail: sergei.Ivanov@pobox.spbu.ru