Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 324, 2005 г.

В. М. Бабич, А. В. Кузнецов

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН, АНАЛОГИЧНЫХ ВОЛНАМ РЭЛЕЯ, В СЛУЧАЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ЛЕОНТОВИЧА

§1. Постановка задачи. Исходные уравнения

Работа посвящена построению лучевой теории поверхностных электромагнитных волн. Волны такого типа могут существовать в случае выполнения краевых условий Леонтовича[1] с чисто мнимым показателем. Излагаемая в статье теория аналогична лучевой теории волн Рэлея [2, 3].

Предположим, что плотность тока и плотность зарядов равны нулю, а волновой процесс в среде описывается классическими уравнениями Максвелла:

$$\begin{cases} \dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial \overrightarrow{H}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\overrightarrow{E} & \mathrm{div}\mu\overrightarrow{H} = 0 \\ \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\overrightarrow{H} & \mathrm{div}\varepsilon\overrightarrow{E} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть Σ – поверхность, ограничивающая область Ω, занятую электромагнитными колебаниями, и на Σ выполняется краевое условие Леонтовича с чисто мнимым показателем η (нормаль $\overrightarrow{n}$ направлена в область Ω):

$$\overrightarrow{E}_S\Big|_\Sigma = \overrightarrow{E} - \overrightarrow{n}\cdot\langle\overrightarrow{E},\overrightarrow{n}\rangle\Big|_\Sigma = \eta\cdot(\overrightarrow{n}\times\overrightarrow{H})\Big|_\Sigma. \tag{2}$$

В качестве Σ рассмотрим сначала плоскость $z = 0$, а затем регулярную поверхность в $\mathbb{R}^3$. В первом случае решение получим явно, а во втором – в виде формального асимптотического разложения.

Работа была выполнена при поддержки грантов НШ-2261.2003.1, 04-01-00522а, 05-01-00936.

§2. Случай однородного полупространства

В данном параграфе рассмотрим интересующие нас поверхностные волны в случае однородного полупространства. Здесь для них удается вывести явные формулы. Хотя эти формулы известны и элементарны, мы их приводим потому, что решения в случае произвольной поверхности в малом представляют собой именно волны для полупространства. Излагаемые в этом параграфе построения во многом отличаются от тех построений, которые содержатся в материалах, находящихся в нашем распоряжении.

Пусть полупространство $z > 0$ занято волновым процессом. Решение уравнений Максвелла будем искать в виде:

$$\begin{cases} \overrightarrow{E}(x,y,z,t) = e^{-i\omega t + i(k_1 x + k_2 y + i\gamma z)} \cdot \overrightarrow{E_0} \\ \overrightarrow{H}(x,y,z,t) = e^{-i\omega t + i(k_1 x + k_2 y + i\gamma z)} \cdot \overrightarrow{H_0} \end{cases} \tag{3}$$

k_1, k_2, γ, $\omega \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, $\omega > 0$; $\overrightarrow{E_0} = (E_{0j})$, $\overrightarrow{H_0} = (H_{0j})$, $j = 1,2,3$ – постоянные вектора в $\mathbb{C}^3$.

Ненулевое решение в таком виде, если оно существует, действительно задает поверхностную волну, так как при возрастании z решение экспоненциально убывает.

В силу равноправности направлений вдоль плоскости $z = 0$, предположим, что $\overrightarrow{k} = (k_1, k_2) = (k, 0)$, где $\overrightarrow{k}$ – волновой вектор, $k > 0$ – волновое число. Таким образом, мы рассматриваем тот случай, когда фазовая скорость направлена вдоль оси x, что не ограничивает общности рассмотрения.

Потребуем, чтобы выполнялись уравнения Максвелла (1). Это приводит к следующей системе, которая является основой построений этого параграфа.

$$\begin{cases} \dfrac{\omega\mu}{c}\overrightarrow{H_0} = \overrightarrow{K} \times \overrightarrow{E_0} \\ \dfrac{\omega\varepsilon}{c}\overrightarrow{E_0} = -\overrightarrow{K} \times \overrightarrow{H_0}, \end{cases} \qquad \text{где} \quad \overrightarrow{K} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ i\gamma \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Векторное умножение понимается в формальном смысле и не имеет геометрической интерпретации в силу комплексности векторов $\overrightarrow{K}$, $\overrightarrow{E}_0$, $\overrightarrow{H}_0$.

В нашем случае условия Леонтовича эквивалентны следующим предположениям:

$$E_{01} = -\eta H_{02} \quad E_{02} = \eta H_{01}. \tag{5}$$

Уравнения (4) позволяют свести задачу к нахождению собственных чисел и собственных векторов в $\mathbb{C}^6$: собственный вектор $(\overrightarrow{E}_0, \overrightarrow{H}_0)$, собственное число ω.

Умножим первое уравнение скалярно на $\overrightarrow{E_0}$ (скалярное произведение – $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \sum\limits_{i=1}^{3} x_i \cdot y_i$). Воспользуемся тем, что, во-первых, $\overrightarrow{K} \times \overrightarrow{H_0} \perp \overrightarrow{H_0}$ и, во-вторых, $(\overrightarrow{E_S}, \overrightarrow{H_S}) = 0$ (условия Леонтовича), где $\overrightarrow{E_S} = (E_{01}, E_{02})$, $\overrightarrow{H_S} = (H_{01}, H_{02})$, и получим:

$$E_{03} H_{03} = 0 \tag{6}$$

Следовательно, верно одно из следующих условий: 1) $E_{03} = 0$, $H_{03} \neq 0$; 2) $E_{03} \neq 0$, $H_{03} = 0$; 3) $E_{03} = 0$, $H_{03} = 0$.

Рассмотрим случай 3). Умножим скалярно первое и второе уравнение системы (4) на $\overrightarrow{K} \Longrightarrow (\overrightarrow{E_0}, \overrightarrow{K}) = 0$; $(\overrightarrow{H_0}, \overrightarrow{K}) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{E_S} = a(0, k)$; $\overrightarrow{H_S} = b(0, k) \Longrightarrow (\overrightarrow{E_S}, \overrightarrow{H_S}) = 0 = abk^2$, $k^2 \neq 0 \Longrightarrow ab = 0$, значит одно из чисел a или b равно нулю, то есть либо $E_0 = 0$, а из равенства (4) $H_0 = 0$, либо, наоборот $H_0 = 0$, а тогда из (4) и $E_0 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{E_0} = \overrightarrow{H_0} = \overrightarrow{0}$.

Рассмотрим случай 1). Запишем в координатной форме систему (4):

$$\begin{cases} A \cdot H_{01} = A \cdot H_{02} = 0 \\ B \cdot H_{02} = 0 = -kH_{02} = 0 \\ B \cdot H_{01} = kH_{03} \\ \frac{\mu}{c}\omega H_{03} = k\eta H_{01} \end{cases}$$

$$A := \frac{\mu}{c}\omega + i\gamma\eta; \quad B := \frac{\varepsilon}{c}\omega\eta + i\gamma.$$

Ясно, что $H_{02} = 0$ и $A = 0$, то есть $\omega = -\frac{i\gamma\eta c}{\mu}$, откуда следует, что $\eta = |\eta| i$.

Обратимся к последним двум уравнениям системы. Из них и того, что мы строим отличные от нуля решения, найдем явное выражение для ω.

$$\frac{c\eta}{\mu\omega} \cdot k^2 = B = \frac{\varepsilon}{c}\omega\eta + i\gamma \quad \text{и, пользуясь тем, что} \quad i\gamma = -\frac{\mu\omega}{c\eta},$$

$$\text{получаем, что} \quad \omega = \frac{c|\eta|k}{\sqrt{\mu\varepsilon(|\eta|^2 + \frac{\mu}{\varepsilon})}}. \tag{7}$$

Из последней формулы следует совпадение фазовой ($\vec{v}_{\text{ф}}$) и групповой ($\vec{v}_{\text{гр}}$) скоростей:

$$\overrightarrow{v}_{\text{ф}} = \overrightarrow{v}_{\text{гр}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial k} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c|\eta|}{\sqrt{\mu\varepsilon(|\eta|^2 + \frac{\mu}{\varepsilon})}} & 0 \end{pmatrix}$$

После элементарных вычислений получим явное выражение для H_0 и E_0:

$$\overrightarrow{H_0} = \begin{pmatrix} k & 0 & \frac{i\omega}{c}(\varepsilon|\eta| + \frac{\mu}{|\eta|}) \end{pmatrix} C_1; \ \ \overrightarrow{E_0} = \begin{pmatrix} 0 & \eta k & 0 \end{pmatrix} C_1; \quad C_1 \in \mathbb{C}. \quad (8)$$

Построенное нами решение уравнения Максвелла будем называть магнитной волной (см. [5]).

Во втором случае $\eta = -|\eta| i$, а остальные вычисления – аналогичны. Построенное решение назовем электрической волной (см. [5]) и приведем итоговые выражения для ω, $\overrightarrow{v}_{\text{ф}}$, $\overrightarrow{v}_{\text{гр}}$, $\overrightarrow{E_0}$ и $\overrightarrow{H_0}$.

$$\gamma = \frac{\omega\varepsilon|\eta|}{c}, \quad \omega = \frac{ck}{\sqrt{\mu\varepsilon(\frac{|\eta|^2\varepsilon}{\mu} + 1)}};$$

$$\overrightarrow{v}_{\text{ф}} = \overrightarrow{v}_{\text{гр}} = \begin{pmatrix} \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon(\frac{|\eta|^2\varepsilon}{\mu}+1)}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

$$\overrightarrow{H_0} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{\eta} & 0 \end{pmatrix} C_2;$$

$$\overrightarrow{E_0} = \begin{pmatrix} k & 0 & \frac{i\omega}{c}(\varepsilon|\eta| + \frac{\mu}{|\eta|}) \end{pmatrix} C_2; \quad C_2 \in \mathbb{C}. \quad (10)$$

Таким образом, в зависимости от знака мнимой части η существуют два разных типа поверхностных волн – магнитная волна при $\eta = i|\eta|$ и электрическая волна $\eta = -i|\eta|$.

§3. Случай произвольной поверхности

1. Анзац, система координат, преобразование уравнений.

Перейдем от плоскости к общему случаю, когда Σ – двухмерная регулярная поверхность $r = r(q^1, q^2)$, $(q^1, q^2) \in \mathbb{R}^2$. В окрестности Σ выберем систему координат с образующими: $\overrightarrow{r_{q^1}}$, $\overrightarrow{r_{q^2}}$ и $\overrightarrow{n}$ – нормаль к поверхности, направленная в область, где происходит волновой процесс, и координатами (q^1, q^2, q^3), где $q^3 = n$ – расстояние от поверхности до точки по нормали. Мы будем теперь считать ε и μ функциями q^1, q^2, q^3.

При построении формального асимптотического решения уравнений математической физики ключевую роль играет вид асимптотического разложения – анзац. Для данной задачи удобно выбрать анзац в следующем виде (см. [2–4]):

$$\begin{cases} \overrightarrow{E} = e^{ip\theta(q^1, q^2, t)} \cdot \sum\limits_{j=0}^{\infty} \dfrac{\overrightarrow{E_j}(q^1,\ q^2,\ \nu,\ t)}{(ip)^j} & \overrightarrow{E_j} \underset{\nu \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{H} = e^{ip\theta(q^1, q^2, t)} \cdot \sum\limits_{j=0}^{\infty} \dfrac{\overrightarrow{H_j}(q^1,\ q^2,\ \nu,\ t)}{(ip)^j} & \overrightarrow{H_j} \underset{\nu \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \overrightarrow{0} \end{cases} \tag{11}$$

$\theta(q^1, q^2, t)$ – пространственно-временной эйконал; мы предполагаем, что $\frac{\partial\theta}{\partial t} < 0$, $\nu = pn = pq^3$; $\overrightarrow{E_j} = (E_{j1}, E_{j2}, E_{j3})$, $\overrightarrow{H_j} = (H_{j1}, H_{j2}, H_{j3})$ – векторы, заданные своими ковариантными компонентами. $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{H}$ должны удовлетворять системе уравнений Максвелла (1) и краевым условиям Леонтовича (2).

Уравнения $\mathrm{div}\mu\overrightarrow{H} = 0$ и $\mathrm{div}\varepsilon\overrightarrow{E} = 0$ формально выполняются автоматически, если выполнены другие два уравнения в (1). В самом деле, из них следует, что:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\varepsilon\overrightarrow{E} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\mu\overrightarrow{H} = 0. \tag{12}$$

Из последних двух утверждений следует требуемое: пусть

$$\mathrm{div}\varepsilon\overrightarrow{E} = e^{ip\theta(q^1,q^2,t)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j(q^1,\ q^2,\ \nu,\ t)}{(ip)^j}. \tag{13}$$

Дифференцируем формально по t обе части (13) и приравниваем выражения при одинаковых степенях по ip и получаем в силу $\frac{\partial\theta}{\partial t} < 0$, что $A_0 = 0$. Далее аналогично получаем равенства $A_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots$.

В дальнейшем нам понадобятся выражение для оператора rot и векторного произведения в произвольной системе координат. Пусть вектор $\overrightarrow{A} = (A_1, A_2, A_3)$ задан своими ковариантными составляющими. Операция rot задает ковариантный вектор $\mathrm{rot}\overrightarrow{A}$ после применения к дважды ковариантному тензору $\left(\frac{\partial A_k}{\partial q^j} - \frac{\partial A_j}{\partial q^k}\right)$

оператора $*$ (см. [6]):

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{rot} A)_k &= \left(* \Big(\frac{\partial A_j}{\partial q^i} - \frac{\partial A_i}{\partial q^j} \Big) \right)_k = \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{G} \epsilon_{i'j'k} G^{i'i} G^{j'j} \left(\frac{\partial A_j}{\partial q^i} - \frac{\partial A_i}{\partial q^j} \right),
\end{aligned} \tag{14}
$$

$$
\epsilon_{ijk} = \begin{cases} -1, & \text{если тройка } (i,j,k) \text{ – нечетная} \\ \ \ 0, & \text{если есть повторяющиеся индексы} \\ \ \ 1, & \text{если тройка } (i,j,k) \text{ – четная} \end{cases}
$$

$$
G = \det(G_{ij}), \quad (G^{ij}) = (G_{ij})^{-1},
$$

(G_{ij}) – метрический тензор в системе координат q^1, q^2, q^3. $G_{ij} = g_{ij} - 2nb_{ij} + O(n^2)$; i, $j = 1, 2$; g_{lm} и b_{lm} – коэффициенты первой и второй формы Гаусса; $G_{ij} = \delta_{ij}$, когда один из индексов равен трем. Мы везде предполагаем, что якобиан $\frac{\mathcal{D}(x^1,x^2,x^3)}{\mathcal{D}(q^1,q^2,q^3)}$ перехода от q^1, q^2, q^3 к x^1, x^2, x^3 – положительный.

Аналогично, для векторного произведения $A \times B$ имеет место формула:

$$
\begin{aligned}
(A \times B)_k &= (*(A_j B_i - A_i B_j))_k = \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{G} \epsilon_{i'j'k} G^{i'i} G^{j'j} \left(A_j B_i - A_i B_j \right).
\end{aligned} \tag{15}
$$

2. Главные члены рекуррентной системы равенств.

Подставим разложение (11) в уравнения Максвелла (1) и, приравнивая главные по p члены в обеих частях равенства, мы придем к системе уравнений:

$$
\begin{aligned}
&N_0 \begin{pmatrix} \overrightarrow{E}_0 \\ \overrightarrow{H}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\theta_0 \varepsilon}{c} \overrightarrow{E_0} - \overrightarrow{Q} \times \overrightarrow{H_0} \\ \frac{\theta_0 \mu}{c} \overrightarrow{H_0} + \overrightarrow{Q} \times \overrightarrow{E_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{0} \end{pmatrix}, \quad \theta_0 = \frac{\partial \theta}{\partial t}; \\
&\overrightarrow{Q} = \begin{pmatrix} \theta_1 = \dfrac{\partial \theta}{\partial q_1} \\ \theta_2 = \dfrac{\partial \theta}{\partial q_2} \\ \dfrac{1}{i} \dfrac{\partial}{\partial \nu} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{16}
$$

Дополняя уравнения условиями $\overrightarrow{E_0} \underset{\nu \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{H_0} \underset{\nu \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \overrightarrow{0}$ и краевыми условиями Леонтовича, мы получим краевую задачу на полубесконечном интервале $[0, \infty)$ для определения $\overrightarrow{E}_0$ и $\overrightarrow{H}_0$, аналогичную задаче Штурма–Лиувилля на нахождение собственных чисел (их роль здесь играет θ_0) и собственных функций $\left(\overrightarrow{E}_0, \overrightarrow{H}_0\right)$.

Пусть $\overrightarrow{E_1}$, $\overrightarrow{H_1}$ имеют гладкие компоненты, удовлетворяют при $\nu = 0$ тем же граничным условиям, что и $\overrightarrow{E_0}$, $\overrightarrow{H_0}$, и экспоненциально с первыми и вторыми производными убывают на бесконечности. Покажем симметричность дифференциального оператора N_0, то есть выполнение следующего равенства:

$$\left\langle N_0 \begin{pmatrix} \overrightarrow{E_0} \\ \overrightarrow{H_0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overrightarrow{E_1} \\ \overrightarrow{H_1} \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \overrightarrow{E_0} \\ \overrightarrow{H_0} \end{pmatrix}, N_0 \begin{pmatrix} \overrightarrow{E_1} \\ \overrightarrow{H_1} \end{pmatrix} \right\rangle, \tag{17}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \overrightarrow{A}_0 \\ \overrightarrow{B}_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overrightarrow{A}_1 \\ \overrightarrow{B}_1 \end{pmatrix} \right\rangle = \int\limits_0^\infty \left(G^{ij} A_{0i} \overline{A_{1j}} + G^{ij} B_{0i} \overline{B_{1j}}\right) \, d\nu.$$

Формула (17) доказывается непосредственной проверкой.

Замечание. Из симметричности оператора (16) следует вещественность собственных чисел θ_0. Этот результат вытекает также и из дальнейших рассмотрений.

Для последующих построений нам потребуется решить краевую задачу для системы уравнений (16). Оказывается, что нахождение $\overrightarrow{E}_0$, $\overrightarrow{H}_0$ (с точностью до множителя) эквивалентно нахождению поверхностных волн для полупространства, чем был посвящен §2. Проведем соответствующие построения.

Переход от системы q^1, q^2 на Σ к новой координатной системе $q^{1'}$, $q^{2'}$ для компонент ковариантных векторов, которыми являются как левая, так и правая часть системы (16), осуществляется с помощью классических формул векторного анализа: $A_{i'} = A_i \frac{\partial q^i}{\partial q^{i'}}$. Этот переход в силу того, что $\frac{\partial q^i}{\partial q^{i'}}$ – не зависят от ν, является заменой уравнений системы на их линейные комбинации с постоянными коэффициентами. Краевое условия Леонтовича и убывание на бесконечности при такой замене имеют тоже инвариантный характер. Поэтому, достаточно того, чтобы система (16) выполнялась при каком-либо выборе базиса в касательном к поверхности пространстве. Выберем координатную систему q^1, q^2, чтобы в рассматриваемой точке на поверхности Σ имело место равенство $G_{ij} = G^{ij} = I$, I – единичная матрица.

Система (16) – система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (по ν). Дополняя ее краевыми условиями Леонтовича и требованием убывания к нулю на бесконечности, получаем систему эквивалентную уравнениям, рассмотренным в §2. Система (4) уже решена, что дает возможность сразу выписать решения, используя результаты (7)–(10):

$$\begin{aligned} \overrightarrow{H}_0 &= A_0(q_1, q_2, t)e^{-\lambda(q^1, q^2, t)\nu}\overrightarrow{h}_0, \\ \overrightarrow{E}_0 &= A_0(q_1, q_2, t)e^{-\lambda(q^1, q^2, t)\nu}\overrightarrow{e}_0, \end{aligned} \tag{18}$$

где $A_0(q^1, q^2, t)$ – функция, подлежащая определению (это будет сделано в следующем пункте).

Введем обозначение:

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{E}_{00} = A_0\overrightarrow{e}_0, \ \overrightarrow{H}_{00} = A_0\overrightarrow{h}_0; \\ &\overrightarrow{E}_{0f} = e^{-\lambda\nu}\overrightarrow{e}_0, \ \overrightarrow{H}_{0f} = e^{-\lambda\nu}\overrightarrow{h}_0. \end{aligned} \tag{19}$$

В случае магнитной волны:

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{h}_0 = \nabla\theta - \overrightarrow{n}\frac{i\theta_0}{c}(\varepsilon|\eta| + \frac{\mu}{|\eta|}); \\ &\overrightarrow{e}_0 = \eta(\overrightarrow{n} \times \nabla\theta); \quad \lambda = -\frac{\mu\theta_0}{c|\eta|}. \end{aligned} \tag{20}$$

В случае электрической волны:

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{e}_0 = \nabla\theta - \overrightarrow{n}\frac{i\theta_0}{c}(\varepsilon|\eta| + \frac{\mu}{|\eta|} \\ &\overrightarrow{h}_0 = -\frac{1}{\eta}(\overrightarrow{n} \times \nabla\theta); \quad \lambda = -\frac{\varepsilon|\eta|\theta_0}{c}. \end{aligned} \tag{21}$$

Формулы (20), (21) справедливы в указанной системе координат с $G_{ij} = I$, но в силу инвариантности формулы (20), (21) справедливы в произвольной системе системе координат. Выражения для ω дают уравнение для нахождения θ_0:

$$\theta_0 + \mathcal{H}(q^1, \ q^2, \ \theta_1, \ \theta_2) = 0 \quad \mathcal{H} = c_s|\nabla\theta| = c_s\sqrt{g^{ij}\theta_i\theta_j} \tag{22}$$

c_s – скорость поверхностной волны, она различная в случае магнитной (c_s^m) и электрической волны(c_s^e) и равна соответственно:

$$c_s^m = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{|\eta|}{\sqrt{|\eta|^2 + \frac{\mu}{\varepsilon}}} \quad \text{и} \quad c_s^e = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{\frac{|\eta|^2\varepsilon}{\mu} + 1}}. \tag{23}$$

Уравнение (22) – это классическое уравнение Гамильтона–Якоби. Его решение можно получить (см., например, [4]), используя классическую технику, основанную на рассмотрении канонических уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{dt}{ds} = 1; \quad \frac{dq^j}{ds} = v^j_{\text{гр}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_j}; \quad \frac{d\theta}{ds} = 0, \\ &\frac{d\theta_0}{ds} = 0; \quad \frac{d\theta_j}{ds} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^j}; \quad j = 1,\ 2. \end{aligned} \tag{24}$$

3. Энергетические соображения.

В задачах, использующих технику ПВЛМ, энергетические соображения играют одну из ключевых ролей. Понятия энергии, распространение энергии и сохранение энергии позволяют иногда явно проинтегрировать уравнения.

Запишем уравнения Максвелла и их сопряженный вариант, а затем умножим их скалярно (в смысле обычного скалярного произведения в $\mathbb{C}^3$) на соответсвующие вектора и просуммируем (константу $\frac{c}{4\pi}$ вводим из физических соображений) полученные равенства:

$$\begin{cases} \dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial \overrightarrow{H}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\overrightarrow{E} & \Big|\cdot \overrightarrow{H^*}\dfrac{c}{4\pi} \\ \dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial \overrightarrow{H^*}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\overrightarrow{E^*} & \Big|\cdot \overrightarrow{H}\ \dfrac{c}{4\pi} \\ \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\overrightarrow{H} & \Big|\cdot \overrightarrow{E^*}\dfrac{c}{4\pi} \\ \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial \overrightarrow{E^*}}{\partial t} = \mathrm{rot}\overrightarrow{H^*} & \Big|\cdot \overrightarrow{E}\ \dfrac{c}{4\pi}. \end{cases}$$

Используя равенство $\mathrm{div}(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{b} \cdot \mathrm{rot}\,\overrightarrow{a} - \overrightarrow{a} \cdot \mathrm{rot}\,\overrightarrow{b}$, мы придем к комплексному варианту классического уравнения Пойнтинга:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \mathrm{div}\,\overrightarrow{S} = 0, \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\overrightarrow{E},\overrightarrow{H}) &:= \frac{\varepsilon\overrightarrow{E}\overrightarrow{E^*}+\mu\overrightarrow{H}\overrightarrow{H^*}}{8\pi},\\ \overrightarrow{S}(\overrightarrow{E},\overrightarrow{H}) &:= \frac{c}{8\pi}(\overrightarrow{E}\times\overrightarrow{H^*}+\overrightarrow{E^*}\times\overrightarrow{H}).\end{aligned}\tag{26}$$

В соответствии с классической интерпретацией теоремы Пойнтинга назовем $\mathcal{E}$ – энергией, а $\overrightarrow{S}$ – вектором Пойнтинга или вектором потока энергии. Из формулы (25) и из условия Леонтовича следует, что поток энергии через поверхность Σ равен нулю, то есть:

$$S_n\Big|_{\Sigma} = 0.\tag{27}$$

Обратимся к выражениям для $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{H}$ в первом приближении. Из формул (18)–(21) следует, что $S_n^0 = S_n(\overrightarrow{E}_0,\overrightarrow{H}_0) = 0$. Поэтому далее вместо $\overrightarrow{S}$ будем рассматривать $\overrightarrow{S}^s = (S^1,S^2)$. Для дальнейшего изложения нам потребуется доказать равенство

$$\overrightarrow{v}_{\text{гр}}\int\limits_0^\infty \mathcal{E}_0\ d\nu = \int\limits_0^\infty \overrightarrow{S}_0^s\ d\nu,\tag{28}$$

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}\left(\overrightarrow{E}_0,\overrightarrow{H}_0\right);\quad \overrightarrow{S}_0^s = \overrightarrow{S}^s\left(\overrightarrow{E}_0,\overrightarrow{H}_0\right);$$

которое мы, следуя работе [2] назовем гидро-энергетическим равенством.

Требуемое соотношение получается сразу для случая электрической и магнитной волны после следующих преобразований. Продифференцируем равенство (16) по θ_j $(j=1,2)$.

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\theta_0}{\partial\theta_j}\frac{\varepsilon}{c}\overrightarrow{E}_0-\overrightarrow{e}_j\times\overrightarrow{H}_0+\frac{\theta_0\varepsilon}{c}\frac{\partial\overrightarrow{E}_0}{\partial\theta_j}-\overrightarrow{Q}\times\frac{\partial\overrightarrow{H}_0}{\partial\theta_j}=0\\ &\frac{\partial\theta_0}{\partial\theta_j}\frac{\mu}{c}\overrightarrow{H}_0+\overrightarrow{e}_j\times\overrightarrow{E}_0+\frac{\theta_0\mu}{c}\frac{\partial\overrightarrow{H}_0}{\partial\theta_j}+\overrightarrow{Q}\times\frac{\partial\overrightarrow{E}_0}{\partial\theta_j}=0,\end{aligned}\tag{29}$$

где $\overrightarrow{e_j}$ – единичный базисный вектор.

Умножим равенства (29) справа соответственно на $\frac{c}{8\pi}\overrightarrow{E}_0$ и $\frac{c}{8\pi}\overrightarrow{H}_0$ в смысле (17). Из симметричности оператора N_0 (см. (17)) и равенства (16) следует, что члены, содержащие $\frac{\partial\overrightarrow{E}_0}{\partial\theta_j}$ и $\frac{\partial\overrightarrow{H}_0}{\partial\theta_j}$ сокращаются. Пользуясь тем, что

$$-(\overrightarrow{e}_j\times\overrightarrow{H}_0)\overrightarrow{E}_0+(\overrightarrow{e}_j\times\overrightarrow{E}_0)\overrightarrow{H}_0=(\overrightarrow{E}_0^*\times\overrightarrow{H}_0+\overrightarrow{E}_0\times\overrightarrow{H}_0^*)\overrightarrow{e}_j,$$

легко перейдем к соотношению

$$\frac{\partial\theta_0}{\partial\theta_j}\int\limits_0^\infty \mathcal{E}_0\ d\nu + \int\limits_0^\infty \overrightarrow{S}^s\overrightarrow{e}_j\ d\nu$$

эквивалентному (28).

Замечание. В силу соотношения (18) можно произвести интегрирование по ν в (28) и получить следующее равенство (определение $\overrightarrow{H}_{00}$ и $\overrightarrow{E}_{00}$ см. (19)):

$$\begin{aligned} &\frac{\vec{v}_{\text{гр}}\mathcal{E}_{00}}{2\lambda} = \frac{\overrightarrow{S}^s_{00}}{2\lambda} \quad \mathcal{E}_{00} = \mathcal{E}\left(\overrightarrow{E}_{00}, \overrightarrow{H}_{00}\right); \\ &\overrightarrow{S}^s_{00} = \overrightarrow{S}^s\left(\overrightarrow{E}_{00}, \overrightarrow{H}_{00}\right); \end{aligned} \tag{30}$$

Запишем уравнение Пойнтинга (25) в координатах q^1, q^2, n, произведем интегрирование по ν от 0 до ∞ и в первом приближении получим:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathcal{E}_{00}}{2\lambda} + \operatorname{div}_S\frac{\overrightarrow{S}^s_{00}}{2\lambda} = 0, \\ &\operatorname{div}_S(A) = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q^j}\left(\sqrt{g}A^j\right) \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{31}$$

Из первого гидроэнергетического соотношения (30) вытекает второе гидроэнергетическое соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathcal{E}_{00}}{2\lambda} + \operatorname{div}_S\frac{\mathcal{E}_{00}\overrightarrow{v}_{\text{гр}}}{2\lambda} = 0. \tag{32}$$

Пользуясь известным приемом (см. [4]), можно найти $\mathcal{E}_{00}$ вдоль ПВ луча. Перейдем в систему координат, связанную с ПВ-лучом: a^1, a^2, s, предположив, что $q^j = q^j(a^1, a^2, s)$, $t = s$, $j = 1, 2$ – решения канонической системы (24) и $q^j\big|_{s=0} = a^j$. Тогда левая часть уравнения (32) – дивергенция некоторого вектора $\overrightarrow{P}$, с компонентами:

$$\overrightarrow{P} = (P_1,\ P_2,\ P_3) = \left(\frac{\mathcal{E}_{00}}{2\lambda}, v^1_{\text{гр}}\frac{\mathcal{E}_{00}}{2\lambda}, v^2_{\text{гр}}\frac{\mathcal{E}_{00}}{2\lambda}\right).$$

Поэтому в координатах a^1, a^2, s уравнение (32) преобразуется в равенство:

$$\operatorname{div}\overrightarrow{P} = \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\mathcal{E}_{00}}{2\lambda}J\right) = 0 \qquad J = \frac{\mathcal{D}(q^1, q^2)}{\mathcal{D}(a^1, a^2)},$$

из которого получаем простую связь между значением энергии в начальной точке ПВ-луча со значением в произвольной:

$$J\frac{\mathcal{E}_{00}}{\lambda}\bigg|_{M} = J\frac{\mathcal{E}_{00}}{\lambda}\bigg|_{M_0} \qquad M=(a^1,a^2,s),\ \ M_0=(a^1,a^2,0).$$

Найдем теперь выражение для модуля $|A_0|$ (определение A_0 см. (18)):

$$\mathcal{E}(\overrightarrow{E}_{00},\overrightarrow{H}_{00}) = |A_0|^2\mathcal{E}(\overrightarrow{e}_0,\overrightarrow{h}_0) \Rightarrow |A_0(M)| = \\ = \Psi(a^1,a^2)\sqrt{\frac{\lambda}{\mathcal{E}(\overrightarrow{e}_0,\overrightarrow{h}_0)J}}. \tag{33}$$

4. Уравнения при $(ip)^0$**.**

Разложим в ряд Тейлора ε и μ по степеням n в окрестности поверхности ($\nu = np$):

$$p\cdot\varepsilon = p\varepsilon_0 + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial n}\right)_0 \nu + o(\nu),$$
$$p\cdot\mu = p\mu_0 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial n}\right)_0 \nu + o(\nu).$$

Далее разложим по степеням n $\mathrm{rot}(e^{ip\theta}\overrightarrow{H}_0)$ и аналогично $\mathrm{rot}e^{ip\theta}\overrightarrow{E}_0$:

$$\mathrm{rot}(e^{ip\theta}\overrightarrow{H}_0) = ip\overrightarrow{Q}\times\overrightarrow{H}_0 + \nabla_S\times\overrightarrow{H}_0 + \\ + 2i\nu\left(h\cdot\nabla\theta\times\overrightarrow{H}_0 - B\overrightarrow{Q}\times\overrightarrow{H}_0 - \overrightarrow{Q}\times B\overrightarrow{H}_0\right), \tag{34}$$

$\nabla_S = \left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\quad \frac{\partial}{\partial\theta_2}\quad 0\right)$ – ковариантный векторный оператор; $h = b^{ij}g_{ij}$ – средняя кривизна; b_{ij} - ковариантная компонента второй квадратичной формы Гаусса; B – тензорный оператор, действующий на ковариантный вектор $\overrightarrow{A} = (A_1,A_2,A_3)$ по правилу: $(B\overrightarrow{A})_j = \mathring{G}_{jj'}b^{j'j''}A_{j''}$. $\mathring{G}_{jj'} = g_{jj'}$, если ни один из индексов не равен трем и нулю в противном случае.

Далее выпишем уравнения при ip^0:

$$N_0\begin{pmatrix}\overrightarrow{E}_1\\ \overrightarrow{H}_1\end{pmatrix} + N_1\begin{pmatrix}\overrightarrow{E}_0\\ \overrightarrow{H}_0\end{pmatrix} = 0, \tag{35}$$

N_0 – оператор из системы (16); $\overrightarrow{E}_1$, $\overrightarrow{H}_1$ – удовлетворяют тем же краевым условиям, что и $\overrightarrow{E}_0$, $\overrightarrow{H}_0$; $N_1 = N_1^{\mathrm{Re}} + N_1^{\mathrm{Im}}$.

$$N_1^{\mathrm{Re}} \begin{pmatrix} \overrightarrow{E} \\ \overrightarrow{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} - \nabla_S \times \overrightarrow{H} \\ \frac{\mu_0}{c} \frac{\partial \overrightarrow{H}}{\partial t} + \nabla_S \times \overrightarrow{E} \end{pmatrix}, \tag{36}$$

$$N_1^{\mathrm{Im}} \begin{pmatrix} \overrightarrow{E} \\ \overrightarrow{H} \end{pmatrix} = \tag{37}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{i\theta_0\nu}{c} \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial n}\right)_0 \overrightarrow{E} - 2i\nu \left(h \cdot \nabla\theta \times \overrightarrow{H} - B\overrightarrow{Q} \times \overrightarrow{H} - \overrightarrow{Q} \times B\overrightarrow{H}\right) \\ \frac{i\theta_0\nu}{c} \left(\frac{\partial\mu}{\partial n}\right)_0 \overrightarrow{E} + 2i\nu \left(h \cdot \nabla\theta \times \overrightarrow{E} - B\overrightarrow{Q} \times \overrightarrow{E} - \overrightarrow{Q} \times B\overrightarrow{E}\right) \end{pmatrix}.$$

Умножим уравнение (35) скалярно на частное решение ($\overrightarrow{E}_{of}$, $\overrightarrow{H}_{of}$) (см. (19)), воспользуемся симметричностью задачи (16) и получим условие разрешимости уравнения (35):

$$\begin{aligned} -\left\langle N_1 \begin{pmatrix} \overrightarrow{E}_0 \\ \overrightarrow{H}_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overrightarrow{E}_{0f} \\ \overrightarrow{H}_{0f} \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle N_0 \begin{pmatrix} \overrightarrow{E}_1 \\ \overrightarrow{H}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overrightarrow{E}_{0f} \\ \overrightarrow{H}_{0f} \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \overrightarrow{E}_1 \\ \overrightarrow{H}_1 \end{pmatrix}, N_0 \begin{pmatrix} \overrightarrow{E}_{0f} \\ \overrightarrow{H}_{0f} \end{pmatrix} \right\rangle = 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Далее подставим в (38) выражение для $\overrightarrow{E}_0$ и $\overrightarrow{H}_0$ через $\overrightarrow{E}_{0f}$ и $\overrightarrow{H}_{0f}$ соответственно (см. (18)), умножим обе части на $|A_0|^2$ и воспользуемся тем, что A_0 – не зависит от ν, получаем линейное дифференциальное уравнение в частных производных для A_0:

$$\frac{\partial A_0}{\partial t} + \frac{\partial A_0}{\partial q^j} \cdot \overrightarrow{v}^j_{\text{гр}} + A_0 \cdot \Phi = 0 \quad \Phi \text{ — не зависит от } A_0. \tag{39}$$

Обратимся к характеристической системе (24). Из нее следует, что (39) – обыкновенное линейное дифференциальное уравнение вдоль ПВ-луча:

$$\frac{\partial A_0}{\partial s} + A_0 \cdot \Phi = 0, \tag{40}$$

A_0 – комплекснозначная функция. Представим ее в следующем виде:

$$A_0(q^1, q^2, t) = |A_0(q^1, q^2, t)| \cdot e^{iV_0(q^1, q^2, t)}. \tag{41}$$

Подставим выражение для A_0 в (40) и выделим вещественную и мнимую часть. Можно показать, что равенство нулю вещественной части (40) эквивалентно уравнению (31), из которого была получена формула для $|A_0|$. Следуя работе [2], назовем V_0 – фазой Берри. Выражение для фазы Берри оказывается (как и в других аналогичных задачах) довольно громоздким:

$$V_0 = V_0\Big|_{s=0} - \int_0^s \left(\frac{\theta_0}{4\lambda^2} \frac{\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial n}\right)_0 |e_0|^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial n}\right)_0 |h_0|^2}{\varepsilon_0|e_0|^2 + \mu_0|h_0|^2} + \right.$$
$$+ \frac{c}{2\lambda^2(\varepsilon_0|e_0|^2 + \mu_0|h_0|^2)} \cdot \Big(2h\mathrm{Re}\left((\nabla\theta \times \overrightarrow{e}_0)\overrightarrow{h}_0 \right) + \qquad (42)$$
$$\left. +2\mathrm{Re}\left((B\nabla\theta \times \overrightarrow{h}_0)\overrightarrow{e}_0 \right) + (\nabla\theta \times B\overrightarrow{h}_0)\overrightarrow{e}_0 - (\nabla\theta \times B\overrightarrow{e}_0)\overrightarrow{h}_0 \Big) \right) ds.$$

Каждое из слагаемых, стоящих под интегралом, характеризует влияние разных факторов на фазу Берри. Первое – влияние скорости изменения диэлектрической и магнитной проницаемости при удалении от поверхности, второе – влияние геометрических характеристик поверхности.

Таким образом нами построено выражение для $\overrightarrow{E}_0$ и $\overrightarrow{H}_0$ с точностью до множителя $A_0\Big|_{s=0} \cdot e^{iV}\Big|_{s=0}$:

$$\overrightarrow{E}_0 = |A_0|e^{iV}\overrightarrow{E}_{0f}, \qquad \overrightarrow{H}_0 = |A_0|e^{iV}\overrightarrow{H}_{0f}. \qquad (43)$$

Выражения для $|A_0|$, V_0, $\overrightarrow{E}_{0f}$, $\overrightarrow{H}_{0f}$ даются формулами (33), (42), (19)–(21).

5. О построении высших приближений.

Вернемся к уравнению (35) – линейное неоднородное уравнение в частных производных. Любое его решение записывается в виде суммы частного решения (35) и решения однородного уравнения (16):

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{E}_1 \\ \overrightarrow{H}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{E}_{01} \\ \overrightarrow{H}_{01} \end{pmatrix} + A_1(q^1, q^2, t) \begin{pmatrix} \overrightarrow{E}_{00} \\ \overrightarrow{H}_{00} \end{pmatrix}.$$

Уравнение в частных производных для A_1 – условия разрешимости уравнения, возникающего при ip^{-1}. Естественно, этот процесс можно продолжить для нахождения $\overrightarrow{E}_k$ и $\overrightarrow{H}_k$ для $k = 2, 3, \ldots$ и с принципиальными трудностями он не связан.

Литература

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика.* Том VIII. Электродинамика сплошных сред. — ФМЛ, М. (2001).
2. V. M. Babich, N. Ya. Kirpichnikova, *A new approach to the problem of the Rayleigh wave propagation along the boundary of a nonhomogeneous elastic body.* — Wave Motion **40** (2004), 209–223.
3. В. Е. Номофилов, *Распространение квазистационарных волн Рэлея в неоднородной анизотропной упругой среде.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **89** (1979), 234–245.
4. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, И. А. Молотков, *Пространственно-временной лучевой метод*, ЛГУ, Л. (1985).
5. М. А. Лялинов, *Дифракция акустических и электромагнитных волн в клиновидных и конусовидных областях с граничными условиями импедансного типа.* СПбГУ, С-Пб., Диссертация (2004).
6. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия.* Наука, М. (1986).

Babich V. M., Kuznetsov A. V. On the propagation of surface electromagnetic waves, similar to Rayleigh waves in the case the Leontovich boundary conditions.

Let Σ be a surface, which is a boundary of a domain containing electromagnetic wave field. We assume, that Leontovich boundary conditions take place on Σ. Surface waves (an electromagnetic version of classical Rayleigh surface waves in elasiticy theory) can exists, only if the coefficient in the Leontovich boundary conditions is pure imaginary. The ray theory of surface electromagnetic waves is developed in this paper.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 5 июня 2005 г.